



ANÁLISE NÃO LINEAR VIA ELEMENTOS FINITOS DE VIGAS DE CONCRETO PROTENDIDO COM CABO NÃO ADERENTE

Leandro Soares Moreira

João Batista Marques de Sousa Junior

leandrosmcivil@gmail.com

joabatistasousajr@hotmail.com

Universidade Federal do Ceará

Address, Zip-Code, Ceará, Fortaleza, Brasil

Resumo. Este artigo apresenta um modelo de elementos finitos para análise não linear física e geométrica de vigas de concreto protendido com cabo não-aderente. A teoria de vigas de Euler-Navier-Bernoulli é utilizada para o desenvolvimento da formulação do elemento finito. A não linearidade geométrica é considerada através da formulação Lagrangeana Total. O Método das Fatias é utilizado para integração dos esforços e da matriz de rigidez tangente na seção transversal, e a integração ao longo do elemento é feita pela quadratura de Gauss. A Lei constitutiva adotada para o concreto na compressão é a do Eurocode 2 (2004). O aço da armadura passiva é modelado elástico-linear até o escoamento, com endurecimento linear após o escoamento. O modelo adotado para o aço de protensão é o proposto por Menegotto e Pinto (1973). As perdas por atrito do aço com a bainha são desprezadas. A ação da protensão é modelada como carga nodal equivalente, através da discretização do cabo em segmentos retos dentro de cada elemento finito. Ao final, a qualidade da formulação para a simulação de vigas protendidas com cabos não-aderentes é avaliada através da comparação com resultados experimentais disponíveis na literatura, para cargas de curta duração.

Palavras-chave: Concreto protendido, Elementos finitos, Cabo não-aderente

1 INTRODUÇÃO

O concreto é um material frágil que apresenta boa resistência à compressão, mas baixa resistência à tração. Baseado nesse fato, a fim de combater as tensões de tração, presentes nos esforços de flexão, surgiu a ideia de colocar barras de aço no interior dos elementos de concreto, nas regiões onde o concreto apresentasse tensões de tração. Assim, foi criado o concreto armado.

No entanto, devido à aderência entre o aço e o concreto, formam-se fissuras na região tracionada. Sendo assim, na tentativa de maximizar a utilização resistência à compressão do concreto e a resistência a tração do aço, idealizou-se a aplicação de um conjunto de esforços auto-equilibrado, através de uma armadura de aço pré-alongada no interior do concreto.

A ideia da aplicação da protensão é que no Estado Limite de Serviço, o concreto não apresente tensões de tração (protensão total), ou que essa tensão de tração seja limitada de modo que o concreto não fissure, fazendo com que a peça trabalhe no Estádio I, o que reduz significativamente as flechas, aumenta a esbeltez da peça, a fim de vencer maiores vãos.

A protensão pode ser classificada como aderente e não aderente, dependendo se após a fase de protensão dos cabos, a aderência entre a bainha e o aço de protensão é imposta, pela injeção de nata de cimento no interior da bainha.

Na protensão aderente, existe então compatibilidade da variação de deformação do aço de protensão e o concreto que envolve a bainha. Este fato permite com que o aço de protensão seja considerado, após a aplicação da protensão, como uma armadura passiva.

No entanto, a protensão não aderente tem sido cada vez mais utilizada em estruturas de concreto protendido, devido a facilidade de aplicação da protensão não aderente e rapidez no processo, visto que não existe aplicação de nata de cimento após a fase de protensão.

Na protensão não aderente, não existe compatibilidade de deformações entre o concreto e o aço de protensão, visto que não há aplicação de nata de cimento, após a protensão. No entanto, existe ainda a compatibilidade dos deslocamentos do concreto e do aço de protensão nos pontos de ancoragens.

Alguns modelos têm sido propostos na tentativa de simular estruturas de concreto protendido.

Machado (2002) apresenta um modelo de elementos finitos para análise de vigas de concreto armado e protendido sob estado plano de tensões, baseado em um modelo elasto-viscoplástico no tempo.

Barbieri (2006) apresenta um modelo híbrido de elementos finitos de pórtico plano, baseado em interpolação de forças, para o cálculo de vigas de concreto protendido com cabo aderente e não aderente, considerando os efeitos do tempo.

Lou (2012) propõe um modelo de elementos finitos para análise de vigas de concreto protendido com cabo não aderente, considerando os efeitos do tempo.

Nesse trabalho, busca-se implementar um modelo de elementos finitos baseado em deslocamento, com formulação Lagrangeana Total, para análise vigas de concreto protendido com cabo não aderente, para carga de curta duração, onde o cabo é modelado como carga equivalente de protensão.

2 METODOLOGIA

O método dos elementos finitos baseado em deslocamento será o modelo utilizado neste trabalho, sendo o Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV) o método de energia adotado, já que este princípio pode ser empregado em situações onde o campo de energia não é conservativo, que é o caso da solução da análise não linear física.

A formulação do elemento finito de pórtico plano Lagrangeano Total (rotações moderadas) será utilizada, com vista a aplicação do modelo em vigas de concreto protendido.

2.1 Formulação do element finite de pórtico plano

Neste elemento finito será utilizada a teoria de vigas de Euler-Navier-Bernoulli para barras submetidas à flexão, acrescida da consideração dos efeitos axiais devido a esforços normais à seção transversal.

A Figura 1 mostra a seção do elemento antes da deformação (A-B), depois da translação (A'-B') e ainda depois da translação e da rotação (A''-B''). Um ponto P qualquer é mostrado nos três estágios.

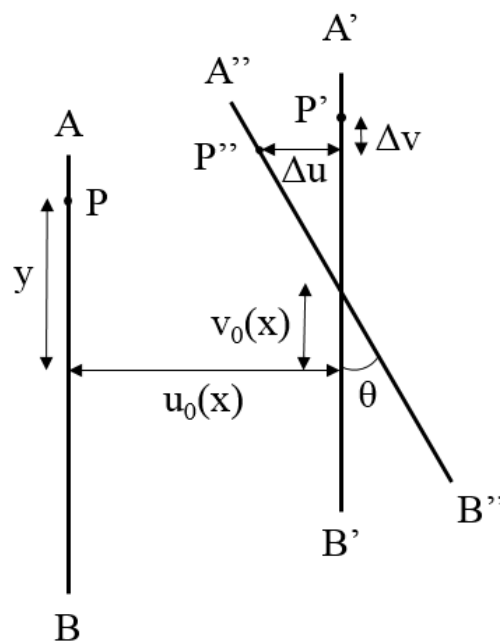


Figura 1. Seção do elemento antes e depois da translação e da rotação

Da hipótese de que as seções planas após a deformação permanecem planas e perpendiculares ao eixo da viga, nota-se que:

$$\tan \theta = \frac{dv}{dx} \quad (1)$$

Assim, o campo de deslocamento pode ser escrito como:

$$u(x) = u_0(x) - y \cdot \frac{dv}{dx} \quad (2)$$

$$v(x) = v_0(x) \quad (3)$$

A deformação de Green-Lagrange é então utilizada:

$$\varepsilon_G = \frac{du}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{du}{dx} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 \cong \frac{du}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 \quad (4)$$

Substituindo os deslocamentos da Eq. (2) e da Eq. (3) na deformação:

$$\varepsilon_x = \frac{du_0}{dx} - y \cdot \frac{d^2v}{dx^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{dv_0}{dx} \right)^2 \quad (5)$$

$$\varepsilon_x = \varepsilon_0 - y \cdot \kappa \quad (6)$$

Onde: $\varepsilon_0 = \frac{du_0}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{dv_0}{dx} \right)^2$ é a deformação de membrana e $\kappa = \frac{d^2v}{dx^2}$ é a curvatura.

Assim, pode-se chamar de vetor de deformações generalizadas (ε), o vetor constituído pela deformação de membrana (ε_0) e pela curvatura (κ):

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_0 \\ \kappa \end{bmatrix} \quad (7)$$

O vetor de deformações generalizadas pode ainda ser decomposto nas parcelas linear (ε_L) e não linear (ε_{NL}):

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_0 \\ \kappa \end{bmatrix} = \varepsilon_L + \varepsilon_{NL} = \begin{bmatrix} \frac{du_0}{dx} \\ \frac{d^2v}{dx^2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (8)$$

Como foi dito, a obtenção das equações de equilíbrio será realizada pelo Princípio dos Trabalhos Virtuais. Segundo o PTV, o trabalho realizado pelas forças internas devido a um deslocamento virtual arbitrário, pequeno, e possível é o mesmo trabalho realizado pelas forças externas. Então:

$$\delta U = \delta W_{ext} \quad (9)$$

Onde δU é o trabalho virtual interno e δW_{ext} é o trabalho virtual externo

Para um corpo qualquer, o trabalho virtual interno é dado pela seguinte expressão genérica:

$$\delta U = \int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot dV \quad (10)$$

Como a única tensão e deformação correspondente atuante no elemento de pórtico plano baseado na TCV são ao longo do eixo x , pode-se escrever o trabalho virtual interno como sendo:

$$\delta U = \int_V \delta \varepsilon_x \cdot \sigma_x \cdot dV \quad (11)$$

Da Equação (6), a deformação virtual ($\delta \varepsilon_x$) pode ser escrita como:

$$\delta \varepsilon_x = \delta \varepsilon_0 - y \cdot \delta \kappa \quad (12)$$

Utilizando a Equação (12) para reescrever a Equação (11), tem-se:

$$\delta U = \int_V (\delta \varepsilon_0 - y \cdot \delta \kappa) \cdot \sigma_x \cdot dV = \int_V \delta \varepsilon_0^T \cdot \sigma_x \cdot dV + \int_V -y \cdot \delta \kappa^T \cdot \sigma_x \cdot dV \quad (13)$$

A Equação (13) ainda pode ser escrita de forma diferente se fizermos a integral do volume como sendo integral ao longo do comprimento x , da integral ao longo da área A . Sendo assim, como a deformação de membrana ($\delta \varepsilon_m$) e a curvatura (κ) não variam ao longo da área A , podem ser retiradas da integral na área.

$$\delta U = \int_L \delta \varepsilon_0^T \int_A \sigma_x \cdot dA dx + \int_L \delta \kappa^T \int_A -y \cdot \sigma_x \cdot dA dx \quad (14)$$

Assim, a integral na área das tensões normais à seção transversal resulta no esforço normal (N):

$$N = \int_A \sigma_x \cdot dA \quad (15)$$

E a integral na área dos momentos fletores em torno do eixo x gerados pelas tensões normais à seção transversal resulta no esforço de flexão (M):

$$M = \int_A (-y \cdot \sigma_x) \cdot dA \quad (16)$$

Substituindo os termos da integral na área pelos esforços internos das Equações (15) e (16):

$$\delta U = \int_L \delta \varepsilon_0 N dx + \int_L \delta \kappa M dx \quad (17)$$

Os esforços internos normal (N) e de flexão (M) definem o vetor de tensões generalizadas ($\boldsymbol{\sigma}$), mostrado na Equação

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix} \quad (18)$$

Substituindo o vetor de tensões generalizadas ($\boldsymbol{\sigma}$) e o vetor de deformações virtuais generalizadas ($\delta \boldsymbol{\epsilon}$) na Equação (17), tem-se a expressão do trabalho virtual interno de forma compacta.

$$\delta U = \int_L \delta \boldsymbol{\epsilon}^T \boldsymbol{\sigma} \cdot dx \quad (19)$$

Na aplicação do Método dos Elementos Finitos, devem-se definir os polinômios de interpolação para os deslocamentos no interior do elemento, em função da coordenada do ponto e dos deslocamentos nodais. Esses deslocamentos no interior do elemento são necessários para o cálculo do trabalho virtual interno.

Neste trabalho, os deslocamentos relativos à parcela de membrana (u) são interpolados com uma função linear, sendo necessários apenas dois graus de liberdade para compor o polinômio de interpolação, como mostra a Equação (20).

$$u = L_1 \cdot u_1 + L_2 \cdot u_2 \quad (20)$$

Onde u_1 e u_2 são os deslocamentos nodais axiais e L_1 e L_2 são polinômios lineares definidos no intervalo de 0 a L :

$$L_1 = 1 - \frac{x}{L} \quad (21)$$

$$L_2 = \frac{x}{L} \quad (22)$$

Já os deslocamentos verticais (v) são interpolados através dos polinômios de Hermite:

$$v = H_1 \cdot v_1 + H_2 \cdot \theta_1 + H_3 \cdot v_2 + H_4 \cdot \theta_2 \quad (23)$$

Onde: v_1 e v_2 são os deslocamentos verticais nodais, θ_1 e θ_2 são as rotações nodais e H_1 , H_2 , H_3 e H_4 são os polinômios de Hermite:

$$H_1 = 1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3} \quad (24)$$

$$H_2 = x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \quad (25)$$

$$H_3 = \frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3} \quad (26)$$

$$H_4 = -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \quad (27)$$

Com os deslocamentos no interior do elemento, é possível calcular as deformações no interior do elemento, utilizando a Eq. (8).

A parcela não linear do vetor de deformações-generalizadas (ϵ_L) pode então ser expressa pela seguinte equação:

$$\epsilon_L = \begin{bmatrix} \frac{du_0}{dx} \\ \frac{d^2v}{dx^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1' & 0 & 0 & L_2' & 0 & 0 \\ 0 & H_1'_{xx} & H_2'_{xx} & 0 & H_3'_{xx} & H_4'_{xx} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \rightarrow \epsilon_L = \mathbf{B}_L \mathbf{u}_e \quad (28)$$

Onde $\mathbf{B}_L$ é a matriz deformação-deslocamento linear, que transforma os deslocamentos nodais ($\mathbf{u}_e$) na parcela linear do vetor de deformações generalizadas (ϵ_L).

A parcela não linear do vetor de deformações generalizadas (ϵ_{NL}) também pode ser desenvolvida derivando-se os deslocamentos verticais (v), conforme:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \begin{bmatrix} 0 & H_1' & H_2' & 0 & H_3' & H_4' \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ 0 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \rightarrow \frac{\partial v}{\partial x} = \mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{u}_e \quad (29)$$

$$\epsilon_{NL}(1,1) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 = \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{2} \mathbf{u}_e^T \mathbf{H}_1^T \mathbf{H}_1 \mathbf{u}_e \quad (30)$$

Logo, a parcela não linear do vetor de deformações generalizadas (ϵ_{NL}) fica sendo:

$$\epsilon_{NL} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_e^T \mathbf{H}_1^T \mathbf{H}_1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{u}_e \rightarrow \epsilon_{NL} = \frac{1}{2} \mathbf{B}_{NL} \mathbf{u}_e \quad (31)$$

Onde $\mathbf{B}_{NL}$ é a matriz deformação-deslocamento não linear, que transforma os deslocamentos nodais ($\mathbf{u}_e$) na parcela não linear do vetor de deformações generalizadas (ϵ_{NL}).

Sendo assim, o vetor de deformações generalizadas (ϵ) fica sendo:

$$\epsilon_{NL} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_e^T \mathbf{H}_1^T \mathbf{H}_1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{u}_e \rightarrow \epsilon_{NL} = \frac{1}{2} \mathbf{B}_{NL} \mathbf{u}_e \quad (32)$$

Onde $\mathbf{B}$ é matriz deformação-deslocamento, que transforma os deslocamentos nodais ($\mathbf{u}_e$) no vetor de deformações generalizadas (ϵ).

Por fim, para calcular o vetor de deformações generalizadas virtual ($\delta \epsilon$) basta fazer a diferenciação da Equação (32):

$$\delta \epsilon = (\mathbf{B}_L + \mathbf{B}_{NL}) \cdot \mathbf{u}_e = \bar{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{u}_e \quad (33)$$

Onde $\bar{\mathbf{B}}$ é a matriz deformação-deslocamento virtual, que transforma os deslocamentos nodais virtuais ($\delta \mathbf{u}_e$) no vetor de deformações generalizadas virtual ($\delta \epsilon$).

Substituindo o vetor de deformações generalizadas virtual ($\delta \epsilon$) da Equação (33) na expressão do trabalho virtual interno da Equação (19), tem-se:

$$\delta U = \int_L \delta \mathbf{u}_e^T \bar{\mathbf{B}}^T \boldsymbol{\sigma} \cdot d\mathbf{x} = \delta \mathbf{u}_e^T \int_L \bar{\mathbf{B}}^T \boldsymbol{\sigma} \cdot d\mathbf{x} = \delta \mathbf{u}_e^T \mathbf{g}_e \quad (34)$$

$$\mathbf{g}_e = \int_L \bar{\mathbf{B}}^T \boldsymbol{\sigma} \cdot d\mathbf{x} \quad (35)$$

Onde $\mathbf{g}_e$ é o vetor de forças internas do elemento.

Logo a matriz de rigidez tangente ($\mathbf{K}_t$) pode ser calculada, diferenciando o vetor de forças internas ($\mathbf{g}_e$) em relação vetor de deslocamentos nodais ($\mathbf{u}_e$):

$$\mathbf{K}_t = \frac{\partial \mathbf{g}_e(\mathbf{u}_e)}{\partial \mathbf{u}_e} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}_e} \left(\int_L \bar{\mathbf{B}}^T \boldsymbol{\sigma} \cdot d\mathbf{x} \right) \quad (36)$$

$$\mathbf{K}_t = \int_L \bar{\mathbf{B}}^T \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \mathbf{u}_e} \cdot d\mathbf{x} + \int_L \frac{\partial \bar{\mathbf{B}}^T}{\partial \mathbf{u}_e} \boldsymbol{\sigma} \cdot d\mathbf{x} = \mathbf{K}_{tE} + \mathbf{K}_{tG} \quad (37)$$

Onde $\mathbf{K}_{tE}$ é a matriz de rigidez tangente elástica e $\mathbf{K}_{tG}$ é a matriz de rigidez tangente geométrica.

$$\mathbf{K}_{tE} = \int_L \bar{\mathbf{B}}^T \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \mathbf{u}_e} \cdot d\mathbf{x} = \int_L \bar{\mathbf{B}}^T \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial \mathbf{u}_e} \cdot d\mathbf{x} = \int_L \bar{\mathbf{B}}^T \mathbf{C}_t \bar{\mathbf{B}} d\mathbf{x} \quad (38)$$

$$\mathbf{K}_{tG} = \int_L \frac{\partial \bar{\mathbf{B}}^T}{\partial \mathbf{u}_e} \boldsymbol{\sigma} \cdot d\mathbf{x} = \int_L \left(\frac{\partial \mathbf{B}_L^T}{\partial \mathbf{u}_e} + \frac{\partial \mathbf{B}_{NL}^T}{\partial \mathbf{u}_e} \right) \boldsymbol{\sigma} \cdot d\mathbf{x} = \int_L \mathbf{N} \cdot \mathbf{H}_1^T \mathbf{H}_1 \cdot d\mathbf{x} \quad (39)$$

Onde $\mathbf{C}_t$ é a matriz constitutiva tangente e $\mathbf{N}$ é o esforço normal

2.2 Modelos constitutivos

No presente modelo, a não linearidade física será considerada, através do uso de relações tensão-deformação uniaxiais, para os materiais concreto, aço passivo e aço de protensão.

O aço passivo possui comportamento normalmente similar na compressão e na tração e por ser um material homogêneo e isotrópico, pode ser modelado com relação tensão deformação linear, até atingir o patamar de escoamento. Após o escoamento, em geral, o

material aço sofre um fenômeno chamado encruamento, onde a estrutura cristalina é modificada, e a rigidez diminui, até chegar a ruptura.

Desse modo, o material aço passivo é modelado como elástico, apresentando comportamento linear até o escoamento, com endurecimento, também linear, como mostra a figura abaixo.

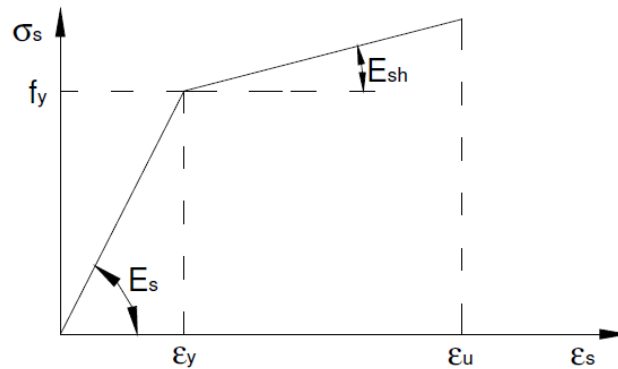


Figura 2. Diagrama tensão-deformação do aço passivo (Stramandinoli, 2007)

Já o material concreto é um material heterogêneo e não apresenta um trecho inicial linear como o aço, pois mesmo antes da aplicação de carga este apresenta microfissuras, devido ao processo de cura. Estas microfissuras se propagam à medida que a carga é aplicada na estrutura, diminuindo assim a rigidez do material.

Nesse trabalho, a curva tensão-deformação adotada foi a do Eurocode 2 (2004), tendo vista a sua boa concordância com resultados experimentais, dado pela seguinte expressão:

$$\sigma_c = f_{cm} \left[\frac{\kappa\eta - \eta^2}{1 + (\kappa - 2)\eta} \right] \quad (40)$$

Onde f_{cm} é a resistência a compressão média em 28 dias, $\eta = \epsilon_c / \epsilon_{c1}$, sendo ϵ_c a deformação do concreto e ϵ_{c1} é a deformação de pico ($\epsilon_{c1} = 0,7 \cdot f_{cm}^{0.31}$) e $\kappa = 1,05 \cdot E_{cm} \cdot |\epsilon_{c1}| / f_{cm}$, sendo $E_{cm} (GPa) = 22[0,1 \cdot f_{cm}]^{0,3}$.

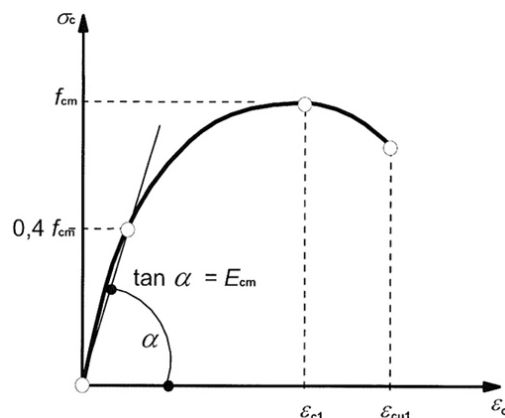


Figura 3. Diagrama tensão-deformação do concreto sob compressão uniaxial (Eurocode 2, 2004)

Por fim, o aço de protensão é definido por um trecho inicial linear elástico, um segundo trecho na proximidade do escoamento do aço, onde o material vai perdendo gradativamente rigidez e um terceiro trecho novamente linear, onde o material apresenta uma pequena rigidez e escoamento até a ruptura.

Menegotto e Pinto (1973) propuseram uma equação que representa bem esse comportamento do aço de protensão dada pela seguinte relação:

$$\sigma_p = \varepsilon_p E_p \left\{ Q + \frac{1-Q}{\left[1 + (\varepsilon_p E_p / K \sigma_{py})^R \right]^{\frac{1}{R}}} \right\} \leq \sigma_{pu} \quad (41)$$

Onde σ_p é a tensão no aço de protensão, ε_p é a deformação no aço de protensão, E_p é o módulo de elasticidade do aço de protensão, σ_{py} é a tensão de escoamento do aço de protensão, definida pela tensão corresponde a deformação de 0.01, σ_{pu} é a tensão última do aço de protensão e K , Q e R são coeficientes adimensionais que podem ser encontrados, a fim de aproximar a curva a resultados experimentais.

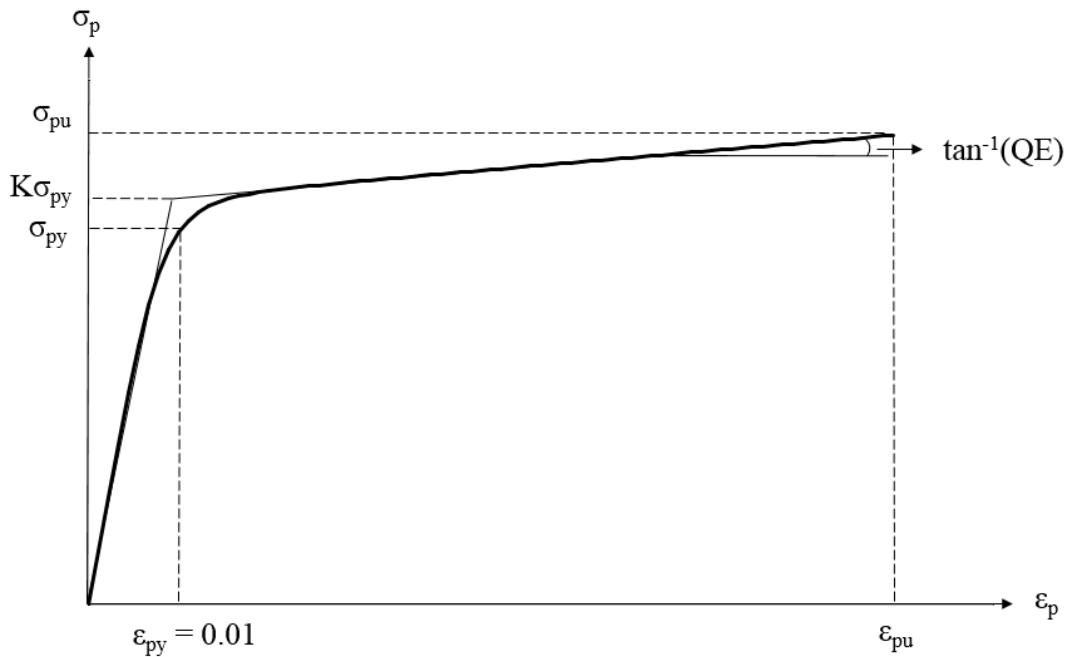


Figura 4. Diagrama tensão-deformação segundo Menegotto e Pinto (1973)

Utilizando uma simples relação trigonométrica, o coeficiente Q pode ser expresso por:

$$Q = \frac{\sigma_{pu} - K \sigma_{py}}{\varepsilon_{pu} - K \sigma_{py}} \quad (42)$$

O coeficiente R pode ser determinado a partir de um processo iterativo, utilizando a Equação (41), com a condição de que a tensão no aço de protensão (σ_p) deve ser igual a tensão de escoamento (σ_{py}) para deformação de 0.01, ou seja:

$$\sigma_p(\varepsilon_p = 0.01) = \sigma_{py} \quad (43)$$

O coeficiente K pode ser determinado caso se tenha uma curva experimental do aço de protensão, a fim de aproximar a curva experimental a curva teórica. Segundo Mattock (1979), para cordoalhas de sete fios, adotando valor de $K = 1.04$, a expressão apresenta em geral boa concordância com resultados experimentais.

2.3 Efeito da protensão

Em estruturas de concreto com protensão aderente, existe aderência entre o aço de protensão e o concreto que envolve a bainha, ou seja, existe compatibilidade de deformações entre os dois materiais. Sendo assim, a deformação no aço de protensão em um determinado ponto depende apenas da deformação de membrana (ε_m) e da curvatura (κ) naquele ponto.

Em estruturas de concreto com protensão não aderente, não existe compatibilidade de deformações entre o concreto, mas compatibilidade de deslocamentos entre o concreto e o aço de protensão, sendo apenas nos pontos de ancoragens do cabo de protensão, ou seja, a deformação não depende apenas da deformação de membrana (ε_m) e da curvatura (κ) naquele ponto, mas depende das deformações ao longo de todo o cabo.

Nas estruturas de concreto com protensão não aderente, que é o foco desse trabalho, o atrito entre a cordoalha engraxada e a bainha é praticamente nulo e pode ser desprezado. Logo, a deformação ao longo do cabo é constante.

Neste trabalho, o efeito da protensão será considerado através da discretização do cabo em trechos retos, igual ao número de elementos de viga, conforme Lou (2014).

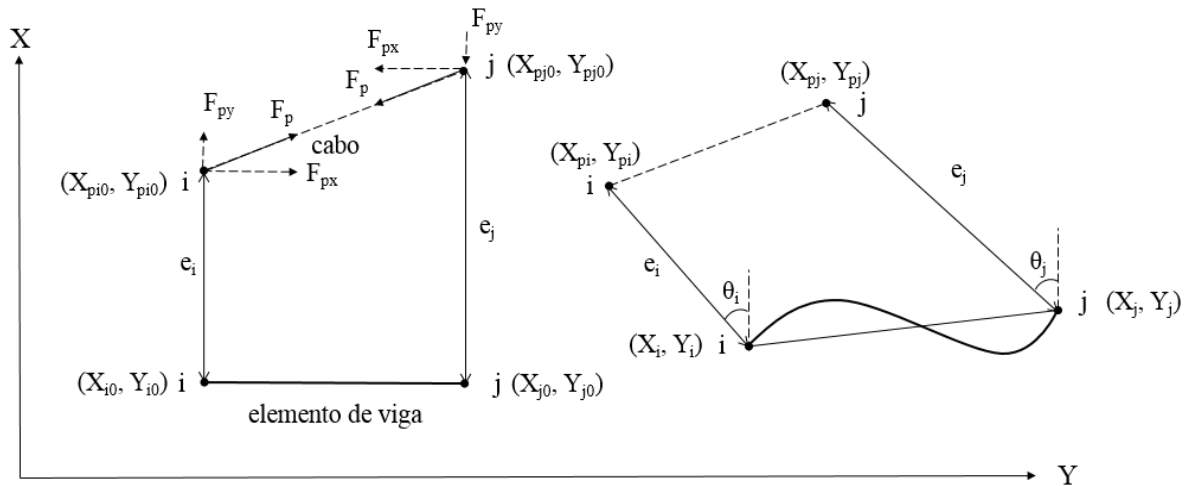


Figura 5. Elemento de viga e cabo antes e depois da deformação

A posição de cada trecho de cabo pode ser calculada pelas seguintes expressões:

$$X_{pi} = X_i - e_i \cdot \sin \theta_i \quad (44)$$

$$X_{pj} = X_j - e_j \cdot \sin \theta_j \quad (45)$$

$$Y_{pi} = Y_i + e_i \cdot \cos \theta_i \quad (46)$$

$$Y_{pj} = Y_j + e_j \cdot \cos \theta_j \quad (47)$$

Com as coordenadas dos trechos retos de cabos, é possível calcular de cada trecho reto de cabo, o comprimento inicial (l_{p0}) e o comprimento final (l_p):

$$l_{p0} = \sqrt{(X_{pj0} - X_{pi0})^2 + (Y_{pj0} - Y_{pi0})^2} \quad (48)$$

$$l_p = \sqrt{(X_{pj} - X_{pi})^2 + (Y_{pj} - Y_{pi})^2} \quad (49)$$

Com isso, a variação de deformação no cabo ($\Delta \varepsilon_p$) pode ser calculada de maneira aproximada pela seguinte expressão:

$$\Delta \varepsilon_p = \frac{\sum l_p - \sum l_{p0}}{\sum l_{p0}} \quad (50)$$

Logo, a deformação no cabo pode ser obtida:

$$\varepsilon_p = \varepsilon_{p0} + \Delta \varepsilon_p \quad (51)$$

Onde ε_{p0} é a deformação inicial teórica do cabo.

Com isso, a partir da deformação no cabo (ε_p), a tensão no cabo (σ_p) pode ser obtida pela Equação (41). E com a tensão no cabo, a força no cabo pode ser calculada:

$$F_p = \sigma_p \cdot A_p \quad (52)$$

Onde A_p é a área do cabo.

Por fim, a força equivalente de protensão pode ser calculada. As expressões a seguir são válidas para cada trecho de cabo. Ou seja, o processo deve se repetir em cada trecho de cabo e seu respectivo elemento de viga.

Inicialmente, calcula-se o seno e o cosseno da inclinação do cabo na configuração pela seguinte relação:

$$\sin \theta_{pi} = \frac{Y_{pj} - Y_{pi}}{l_p} \quad (53)$$

$$\cos \theta_{pi} = \frac{X_{pj} - X_{pi}}{l_p} \quad (54)$$

Calcula-se então as componentes da força de protensão (F_p) nas direções x e y:

$$F_{px} = F_p \cdot \cos \theta_i \quad (55)$$

$$F_{py} = F_p \cdot \sin \theta_i \quad (56)$$

Agora, basta transferir as componentes para os nós dos elementos de viga, aplicando um momento correspondente. Logo as componentes de força nos nós i e j serão:

$$F_{pix} = F_{px} \quad (57)$$

$$F_{piy} = F_{py} \quad (58)$$

$$M_{pi} = -F_{px} (Y_{pi} - Y_i) + F_{py} (X_{pi} - X_i) \quad (59)$$

$$F_{pjx} = -F_{px} \quad (60)$$

$$F_{piy} = -F_{py} \quad (61)$$

$$M_{pj} = F_{px} (Y_{pj} - Y_j) - F_{py} (X_{pj} - X_j) \quad (62)$$

A deformação inicial teórica (ε_{p0}) deve ser calculada de maneira iterativa. Assim, um valor inicial deve ser estimado para deformação inicial teórica. Para cada valor estimado da deformação inicial teórica, a deformação efetiva no cabo é calculada, através da solução do equilíbrio da viga através do modelo de elementos finitos, sem aplicação de carga externa. Com isso, procura-se a deformação inicial teórica (ε_{p0}) que gera uma deformação igual a deformação efetiva (ε_{pe}) dada no experimento. A deformação efetiva é a deformação no cabo após a aplicação da protensão e perdas iniciais, devido ao encurtamento do concreto.

3 RESULTADOS

Neste trabalho, serão apresentados dois exemplos de viga de concreto protendido não-aderente, baseado em ensaios experimentais disponíveis na literatura, a fim de avaliação do modelo proposto. O modelo apresentado foi implementado em MATLAB.

Nos dois exemplos, foi utilizada uma malha de 40 elementos finito, a seção foi discretizada em 50 fatias e 3 pontos de Gauss foram utilizados no cálculo da integral longitudinal de cada elemento. O método incremental-iterativo de controle de carga, com um incremento de 1 kN e tolerância para convergência de 1×10^{-5} , foi utilizado.

3.1 Viga bi apoiada (Hussien et al, 2012)

O primeiro exemplo é uma viga ensaiada Hussien et al. (2012). No caso, a viga escolhida do artigo foi a viga B7, que é uma viga bi apoiada fletida em quatro pontos. O cabo tem traçado poligonal.

A seção da viga é retangular, com 16 cm de largura e 34 cm de altura. A armadura positiva e negativa tem a mesma área, sendo igual a 1.57 cm². A distância da face da viga ao centro da armadura longitudinal ($c + \Phi_c + \Phi_f/2$) foi adotada igual a 4.0 cm. A armadura ativa tem área de 1.0 cm². O traçado do cabo de protensão é poligonal, como mostra a Figura abaixo.

Os dados do material concreto foram obtidos através de ensaios próprios feitos pelo próprio Hussien et al. (2012). Os valores dos parâmetros do concreto foram: $f_{cm} = 43.0$ Mpa. Os demais parâmetros foram obtidos, segundo Eurocode 2:2004 e CEB (1990), $\varepsilon_{c1} = -2.246\%$, $E_{cm} = 34.08$ GPa. A contribuição do concreto a tração foi desprezada. Para o material aço foi adotado o modelo elasto-plástico p

erfeito, com endurecimento linear, com uma tensão de escoamento (f_y) igual a 470 MPa, módulo de elasticidade longitudinal de 210 GPa, módulo de elasticidade de endurecimento (E_{sh}) de 1.0 GPa e deformação última de 20%, sendo os dois últimos parâmetros adotados. O aço de protensão desse exemplo apresenta tensão de escoamento (f_y) igual a 1720 MPa, tensão de última (f_u) igual a 1890 MPa, módulo de elasticidade longitudinal de 190 GPa, deformação última de 8% e coeficiente $K = 1.06$, sendo os últimos dois parâmetros adotados.

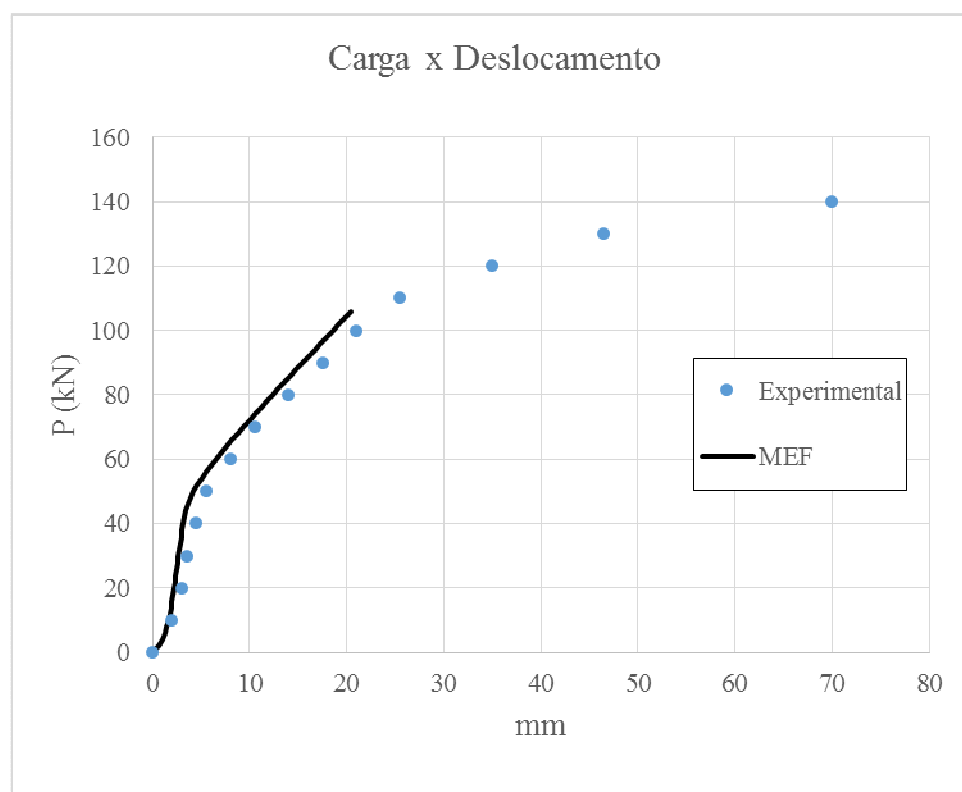


Figura 6. Caminho de equilíbrio da viga ensaiada por Hussien et al (2012)

3.2 Viga bi apoiada (Tao e Du, 1985)

O segundo exemplo é uma viga ensaiada por Tao e Du (1985). No caso, a viga escolhida do artigo foi a viga A2, que é uma viga bi apoiada fletida em quatro pontos.

A seção da viga é retangular, com 16 cm de largura e 28 cm de altura. Não há armadura negativa e a armadura positiva é igual a 1.57 cm^2 . A distância da face inferior da viga ao centro da armadura longitudinal positiva ($c + \Phi_f/2$) foi dada e é igual a 3.0 cm. A armadura ativa tem área de 0.98 cm^2 . O traçado do cabo é reto com excentricidade de 8 cm.

Os dados do material concreto foram obtidos através de ensaios próprios feitos pelo próprio Hussien et al. (2012). Os valores dos parâmetros do concreto foram: $f_{cm} = 30.6 \text{ Mpa}$. Os demais parâmetros foram obtidos, segundo Eurocode 2:2004 e CEB (1990), $\varepsilon_{c1} = -2.021\%$, $E_{cm} = 30.77 \text{ GPa}$. A contribuição do concreto a tração foi desprezada. Para o material aço foi adotado o modelo elasto-plástico perfeito, com endurecimento linear, com uma tensão de escoamento (f_y) igual a 430 MPa, módulo de elasticidade longitudinal de 210 GPa, módulo de elasticidade de endurecimento (E_{sh}) de 1.0 GPa e deformação última de 20%, sendo estes dois últimos parâmetros adotados. O aço de protensão desse exemplo apresenta tensão de escoamento (f_y) igual a 1465 MPa, tensão de última (f_u) igual a 1790 MPa, módulo de elasticidade longitudinal de 205 GPa, deformação última de 8% e coeficiente $K = 1.06$, sendo os últimos dois valores adotados.

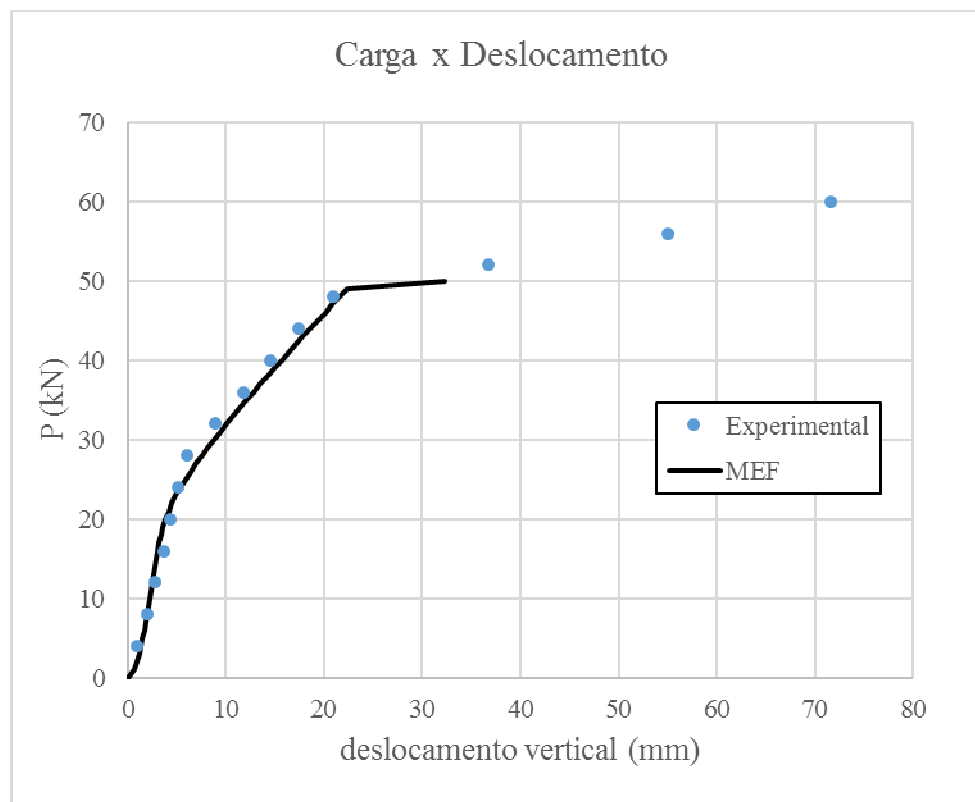


Figura 7. Caminho de equilíbrio da viga ensaiada por Tao e Du (1985)

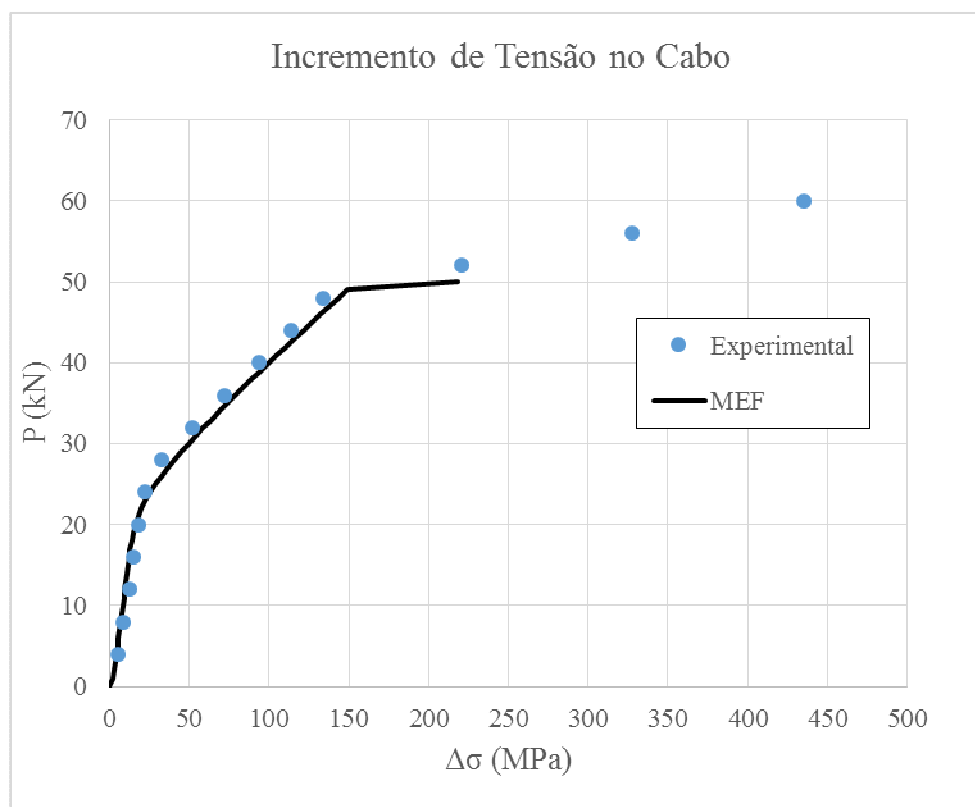


Figura 8. Incremento de tensão no cabo da viga ensaiada por Tao e Du (1985)

4 CONCLUSÃO

O presente modelo apresentou resultados satisfatórios simulando vigas de concreto protendido com cordoalha não aderente, em ensaios de curta duração realizados em laboratório.

No entanto, o modelo não conseguiu acompanhar os pontos da curva de equilíbrio próximos ao pico de carga, mais precisamente após o escoamento da armadura passiva. Sendo assim, esse modelo deve ser aprimorado, utilizando-se um método de traçado do caminho de equilíbrio mais avançado, como controle de deslocamentos e comprimento de arco.

Resultados de análises numéricas de Moreira (2013) mostram instabilidades no traçado do caminho de equilíbrio em vigas de concreto armado, utilizando o método de controle de deslocamentos, gerando tangente negativas em alguns trechos de transição do estágio I para o estágio II e no escoamento da armadura. Essas instabilidades numéricas podem ser os motivos pelos quais o método de controle de carga foi insuficiente no traçado do caminho de equilíbrio após o escoamento da armadura.

Além disso, a modelagem da protensão como carga equivalente pode ser vista como um método simplificado de tratar o problema, visto que a força de protensão depende dos deslocamentos, logo o mais correto seria considerar uma matriz de rigidez da força de protensão. Esse talvez seja um outro motivo para que a análise por esse método seja incapaz de traçar todo o caminho de equilíbrio da estrutura.

Por fim, os resultados ainda são preliminares, visto que o objetivo final deste trabalho é a implementação de um modelo de vigas de concreto protendido, em ensaios de curta e de longa duração, abrangendo ainda os efeitos de fluência e retração.

AGRADECIMENTOS

Ao Laboratório de Mecânica Computacional e Visualização (LMCV) e à UFC pelo apoio ao trabalho desenvolvido.

À Capes e ao CNPq pelos formentos à pesquisa.

REFERÊNCIAS

Barbieri, R. A., Gastal, F. P. S. L., & Filho, A. C. Numerical Model for the Analysis of Unbonded Prestressed Members. *Journal of Structural Engineering*, v. 132, p. 34-42, 2006.

European Committee for Standardization (CEN). Eurocode 2: Design of concrete structures - Part 1-1: General rules and rules for buildings. EN 1992-1-1. Brussels. 2004.

Hussien, O. F., Elafand, T. H. K., Abdelrahman, A. A., Abdel, B. S. A.; Nasr, E. A. Behavior of bonded and unbonded prestressed normal and high strength concrete beams. *HRBC Journal*, p. 239-251, 2012.

Lou, Tie-jiong. Nonlinear and time-dependent analysis of continuous unbonded prestressed concrete beams. *Engineering Structures*, v. 119, p. 166-176, 2013.

Lou, Tie-jiong. Finit element modeling of concrete beams prestressed with external tendons. *Computers and Structures*, v. 28, p. 1919-1926, 2006.

Machado, M. A. S. Aplicação do método dos elementos finitos para a análise elasto-viscoplástica de peças de concreto armado e protendido, submetidas a estados planos de tensão. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2002.

Mattock, A. H. Flexural strength of prestressed concrete sections by programmable calculator. *PCI Journal*. January-February, 1979.

Menegotto, M.; Pinto P. E. Method of analysis for cyclically loaded reinforced concrete plane frames, including changes in geometry and non-elastic behavior of elements under combined normal force and bending. IABSE preliminary report for symposium on resistance and ultimate deformability of structures acted on well-defined repeated loads, Lisbon. p 15-22, 1973.

Moreira, L. S. Análise não linear física de pórticos planos de concreto armado. 2013. Monografia (Graduação em Engenharia Civil) – Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2013.

Parente JR. E., Nogueira, G. V., Meireles, M. N., Moreira, L. S. Material and geometric nonlinear analysis of reinforced concrete frames. Revista IBRACON de Estruturas e Materiais, v. 7, p. 879-904, 2014.

Stramandinoli, R. S. B. Modelos de Elementos Finitos para Análise não linear física e geométrica de vigas e pórticos planos de concreto armado. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) - Universidade Federal de Santa Catarina, 2007.

Tao, Xuekang; Du, Gongchen. Ultimate stress of unbonded tendons in partially prestressed concrete beams. PCI Journal. November-December, 1985.