



ANÁLISE DE SENSIBILIDADE, RESPOSTA IMPULSIVA, TEMPO DE PENETRAÇÃO E DESVIO DE CALOR EM PROBLEMA INVERSO DE CONDUÇÃO DE CALOR

Luís Henrique da Silva Ignacio

Fernando Costa Malheiros

Alisson Augusto Azevedo Figueiredo

Ana Paula Fernandes¹

Gilmar Guimarães²

Universidade Federal de Uberlândia, Faculdade de Engenharia Mecânica

Av. João Naves de Ávila, 2121, 38400-902, Uberlândia-MG, Brasil

Abstract. A solução de problemas inversos em condução de calor transiente normalmente envolve sensores de temperatura nos quais, inerentemente, estão presentes erros aleatórios. Como problemas inversos pertencem à classe de problemas mal postos matematicamente, esses ruídos de medição tendem a amplificar o seu efeito nas estimativas de fluxo de calor. Um dos fatores que certamente contribuem para o sucesso de técnicas de problemas inversos é a localização dos sensores. Intuitivamente percebe-se que quanto mais próximo o sensor estiver da fonte de calor, maior será o êxito de sua estimativa, uma vez que existe um nível maior de informação sobre a própria fonte investigada. Em outras palavras, localizações mais próximas tendem a produzir dados experimentais com maior coeficiente de sensibilidade, e portanto, a influência de erros de medição é menor. Além da localização, existem vários parâmetros que podem influenciar no sucesso de estimativas de fluxo de calor. Conceitos como tempo de penetração e desvio de calor são extremamente importantes para o estabelecimento da relação ótima entre duração de um experimento e a localização do sensor. Estes conceitos foram investigados nesse trabalho por meio do uso de técnicas de solução de problemas inversos: método da função especificada sequencial e da função transferência baseada em funções de Green.

Keywords: sensibilidade, resposta impulsiva, tempo de penetração e desvio de calor, condução de calor, problema inverso, funções de Green.

¹beneficiário de auxílio financeiro da CAPES - Brasil

²autor correspondente: gguima@mecanica.ufu.br

1 INTRODUÇÃO

Neste trabalho a estimativa do fluxo de calor foi abordada por dois métodos. O primeiro deles trata-se do método clássico sequencial [Beck et al., 1985], o qual é necessário calcular a sensibilidade, o segundo, trata-se do método da função transferência baseada em funções de Green (TFBGF) [Fernandes, 2013], nesse caso é necessário conhecer o comportamento da resposta impulsiva do problema térmico.

Os conceitos de tempo de penetração e desvio de calor foram inicialmente abordados por de Monte et al. [2008] e foram aqui explorados. A análise destes tempos complementa o estudo da dinâmica do problema térmico e podem ser aplicados com o objetivo de simplificar problemas térmicos multidimensionais ou com geometrias complexas, dependendo da observação da ocorrência dos fenômenos físicos presentes no processo.

Em alguns casos, problemas tridimensionais podem ser reduzidos a problemas bi ou unidimensionais sem perda de precisão. Em outros, problemas unidimensionais com geometria finita podem ser reduzidos a problemas de geometria mais simples como a semi-infinita. A possibilidade física de análise dessas condições pode permitir a obtenção de soluções simplificadas e com a mesma confiança e precisão da formulação mais geral e complexa.

O uso dessas simplificações pode, por exemplo, ser aplicada na solução de problemas inversos, obtendo-se estimativas de fluxo de calor em regiões inacessíveis à instrumentação. Nesse caso, o fluxo de calor pode ser estimado em condições físicas onde a simplificação do modelo pode ser aplicada, e posteriormente, conhecido o fluxo de calor, o problema direto é resolvido considerando o modelo completo com a geometria real e tempos requeridos.

A análise dos coeficientes de sensibilidade, resposta impulsiva e tempos de penetração e desvio de calor permitem a previsão do comportamento de estimativa do método inverso empregado. Nesse sentido, permite a otimização das medidas de temperatura. Por exemplo, as escolhas da posição de termopares bem como do tempo de duração do experimento são cruciais para o sucesso de qualquer problema inverso. Uma vez feita esta análise, testes experimentais são otimizados.

Observa-se que os testes experimentais foram realizados em uma amostra de policloreto de polivinila (PVC), considerando um gradiente de temperatura em torno de 5°C . O baixo gradiente térmico representa uma dificuldade adicional à solução do problema inverso e permite o teste efetivo das técnicas empregadas.

2 FUNDAMENTOS

O modelo térmico transiente e tridimensional, mostrado na Fig. 1, denominado $X23Y23Z23$ por Cole et al. [2010] foi investigado neste trabalho.

$X23Y23Z23$ refere-se ao problema térmico de geometria retangular cujas condições de contorno nas direções x , y e z são dadas pelas condições de contorno do tipo 2, fluxo de calor prescrito e, condição de contorno do tipo 3, superfície exposta à convecção de calor. Para os planos xy , yz e xz que se interceptam na origem, é imposto fluxo de calor nulo. Observa-se na Fig. 1 que em $x = L$ e $z = R$ as superfícies estão expostas ao meio convectivo. E, fluxo de calor, $q(t)$, é imposto na área destacada em $y = W$, sendo a área restante exposta ao meio convectivo.

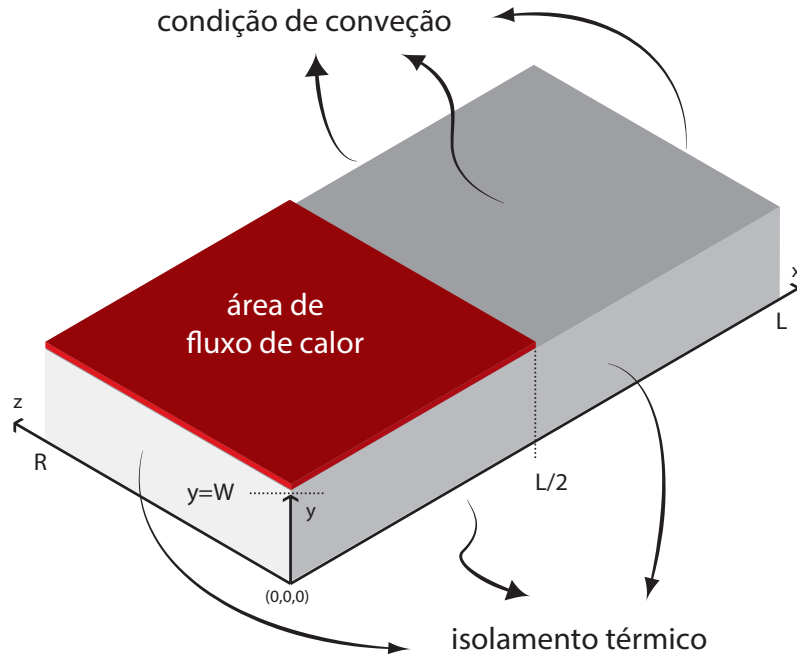


Figura 1: Modelo térmico 3D - X23Y23Z23

2.1 Modelo matemático

A equação governante que define o problema térmico $X23Y23Z23$ (Fig. 1), em sua versão homogênea, é dada por

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \theta}{\partial t} \quad (1a)$$

sujeita às condições de contorno para $t \in (0, \infty)$:

$$\begin{aligned} -k \frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{x=0} &= 0, \quad -k \frac{\partial \theta}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0, \quad -k \frac{\partial \theta}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0, \\ -k \frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{x=L} &= h\theta, \quad -k \frac{\partial \theta}{\partial z} \Big|_{z=R} = h\theta, \end{aligned} \quad (1b)$$

$$-k \frac{\partial \theta}{\partial y} \Big|_{y=W} = h\theta - q(t), \quad q(t) \in \left(0, \frac{L}{2}\right) \times (0, R); \quad h\theta \in \left(\frac{L}{2}, L\right) \times (0, R)$$

e condição inicial:

$$\theta_0 = T(x, y, z, 0) - T_\infty, \quad (x, y, z) \in (0, L) \times (0, W) \times (0, R), \quad (1c)$$

onde $\theta = T - T_\infty$, sendo T a temperatura do corpo e T_∞ a temperatura do meio, α , k e h são, respectivamente, a difusividade térmica, a condutividade térmica e o coeficiente de troca de calor por convecção.

As Equações (1a) - (1c) representam o modelo térmico do problema direto estudado. Caso o fluxo de calor $q(t)$ seja uma função desconhecida e uma variável a ser estimada, então, se estabelece o problema inverso. Apresenta-se a seguir a solução do problema direto. As técnicas de solução de problemas inversos aplicadas nesse trabalho são descritas em detalhes nos trabalhos de Beck et al. [1985] e Fernandes [2013].

2.2 Problema direto

Empregou-se o método de funções de Green para a obtenção da solução do problema direto. Uma vantagem no uso de soluções integrais por funções de Green é a possibilidade de se construir, sem dificuldades adicionais, soluções multidimensionais a partir da obtenção das funções de Green unidimensionais. As versões da equação-solução 2D e 3D são absolutamente equivalentes à equação unidimensional e as funções de Green podem ser obtidas a partir de produtos das funções de Green 1D nas diversas direções, respeitando-se algumas particularidades da geometria do problema de condução de calor [Cole et al., 2010].

Assim a solução do problema homogêneo, descrito pelas Eqs. (1a)-(1c), em termos de funções de Green é dada por

$$\begin{aligned} \theta(x, y, z, t) = & \int_{x'=0}^L \int_{y'=0}^W \int_{z'=0}^R G(x, y, z, t|x', y', z', 0) \theta_0 dx' dy' dz' \\ & + \frac{\alpha}{k} \int_{\tau=0}^t \int_{x'=0}^{L/2} \int_{z'=0}^R q(\tau) G(x, y, z, t|x', W, z', \tau) dx' dz' d\tau. \end{aligned} \quad (2)$$

O primeiro termo da Equação (2) é referente ao termo da temperatura inicial (θ_0) e o segundo termo está relacionado à condição de contorno de fluxo de calor imposto à área arbitrária delimitada por $0 \leq x \leq \frac{L}{2}$ e $0 \leq z \leq R$ em $y = W$.

É importante perceber que o efeito da condição de contorno do tipo 3 (convecção de calor) é preservado pela função de Green, G , que aparece na Eq. (2), e não pela equação em si, pois, o problema original na variável T foi transformado em um problema homogêneo na variável $\theta = T - T_\infty$, portanto, em $y = W$, na área dada por $\frac{L}{2} \leq x \leq L$ e $0 \leq z \leq R$, a condição de contorno também é homogênea, ou seja, nessa área tem-se $q(t) = 0$.

E, nesse caso, G é dada por

$$\begin{aligned} G(x, y, z, t|x', y', z', \tau) = & \frac{8}{LWR} \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{\alpha_m^2}{L^2} + \frac{\beta_n^2}{W^2} + \frac{\gamma_p^2}{R^2}\right)\alpha(t-\tau)} \\ & \times \left[\frac{\alpha_m^2 + B_1^2}{\alpha_m^2 + B_1^2 + B_1} \right] \left[\frac{\beta_n^2 + B_2^2}{\beta_n^2 + B_2^2 + B_2} \right] \left[\frac{\gamma_p^2 + B_3^2}{\gamma_p^2 + B_3^2 + B_3} \right] \\ & \times \left[\cos\left(\frac{\alpha_m x}{L}\right) \cos\left(\frac{\alpha_m x'}{L}\right) \right] \left[\cos\left(\frac{\beta_n y}{W}\right) \cos\left(\frac{\beta_n y'}{W}\right) \right] \\ & \times \left[\cos\left(\frac{\gamma_p z}{R}\right) \cos\left(\frac{\gamma_p z'}{R}\right) \right]. \end{aligned} \quad (3)$$

Os autovalores α_m , β_n e γ_p são obtidos por meio das equações transcendentais $\alpha_m \tan \alpha_m = B_1$, $\beta_n \tan \beta_n = B_2$ e $\gamma_p \tan \gamma_p = B_3$. Os índices $m = 1, \dots, M$, $n = 1, \dots, N$ e $p = 1, \dots, P$ definem a quantidade de iterações (autovalores) necessárias para a convergência das séries, dado

um erro de truncamento, ε , desejado. Sendo $B_1 = \frac{hL}{k}$, $B_2 = \frac{hW}{k}$ and $B_3 = \frac{hR}{k}$ os números de Biot associados a cada superfície.

Assim, substituindo a função de Green, Eq. (3), na Eq. (2) tem-se a solução analítica em termos da variável θ ,

$$\begin{aligned} \theta(x, y, z, t) = & 8\theta_0 \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{\alpha_m^2}{L^2} + \frac{\beta_n^2}{W^2} + \frac{\gamma_p^2}{R^2}\right)\alpha t} \\ & \times \left[\frac{\alpha_m^2 + B_1^2}{\alpha_m^2 + B_1^2 + B_1} \right] \left[\frac{\beta_n^2 + B_2^2}{\beta_n^2 + B_2^2 + B_2} \right] \left[\frac{\gamma_p^2 + B_3^2}{\gamma_p^2 + B_3^2 + B_3} \right] \\ & \times \left[\cos\left(\frac{\alpha_m x}{L}\right) \frac{\sin \alpha_m}{\alpha_m} \right] \left[\cos\left(\frac{\beta_n y}{W}\right) \frac{\sin \beta_n}{\beta_n} \right] \left[\cos\left(\frac{\gamma_p z}{R}\right) \frac{\sin \gamma_p}{\gamma_p} \right] \\ & + \frac{8\alpha}{kW} \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{\alpha_m^2}{L^2} + \frac{\beta_n^2}{W^2} + \frac{\gamma_p^2}{R^2}\right)\alpha t} \\ & \times \left[\frac{\alpha_m^2 + B_1^2}{\alpha_m^2 + B_1^2 + B_1} \right] \left[\frac{\beta_n^2 + B_2^2}{\beta_n^2 + B_2^2 + B_2} \right] \left[\frac{\gamma_p^2 + B_3^2}{\gamma_p^2 + B_3^2 + B_3} \right] \\ & \times \left[\cos\left(\frac{\alpha_m x}{L}\right) \frac{\sin\left(\frac{\alpha_m}{2}\right)}{\alpha_m} \right] \left[\cos\left(\frac{\beta_n y}{W}\right) \cos \beta_n \right] \left[\cos\left(\frac{\gamma_p z}{R}\right) \frac{\sin\left(\frac{\gamma_p}{2}\right)}{\gamma_p} \right] \\ & \times \int_0^t \left[q(\tau) e^{-\left(\frac{\alpha_m^2}{L^2} + \frac{\beta_n^2}{W^2} + \frac{\gamma_p^2}{R^2}\right)\alpha \tau} \right] d\tau. \end{aligned} \quad (4)$$

A solução em termos da variável original T é prontamente obtida por $T = \theta + T_{\infty}$. Observa-se que a solução do problema direto de condução de calor $X23Y23Z23$ é determinada desde que se conheça o fluxo de calor, $q(t)$, e, também, os coeficientes de troca de calor por convecção, h .

A solução analítica do problema $X23Y23Z23$, dada pela Eq. 4, foi verificada a partir da comparação com o problema $Y23$, e também, verificada intrinsecamente com o problema $Y03$. O contorno dado pelo índice 0 indica geometria semi-infinita. A solução analítica de problema cuja geometria é semi-infinita é computacionalmente exata, pois, não possui somatórios, e, portanto, não é necessário aplicar nenhuma forma de truncamento a eles.

3 Testes simulados

Como um dos objetivos deste trabalho é a investigação da influência de parâmetros físicos e geométricos na estimativa de fluxo de calor, testes de comportamento das técnicas de problemas inversos foram reavaliados. Nesse caso, optou-se inicialmente pela utilização de testes com simulações computacionais. Consequentemente, definindo-se as melhores condições de estimativas, testes experimentais também foram realizados. Apresentam-se estes testes a seguir.

Um dos requisitos para a estimativa de fluxo de calor na solução de problemas inversos é o uso de dados experimentais, no caso temperaturas medidas em posições de fácil acesso [Fernandes, 2013]. Assim num primeiro momento essas temperaturas experimentais são simuladas

usando-se a própria solução do problema direto dado pela Eq. (4), considerando-se $q(t)$ uma variável conhecida. Obviamente, aplicado-se as técnicas de problemas inversos es fluxo de calor deve ser recuperado.

As temperaturas, $y(t_i)$, mostradas na Fig. 2 foram simuladas a partir da Eq. (4), para as posições dos sensores de 1 – 7, todos localizados no plano yz em $x = 0$. A localização de cada sensor é mostrada na Tab. 1 e na Fig. 3.

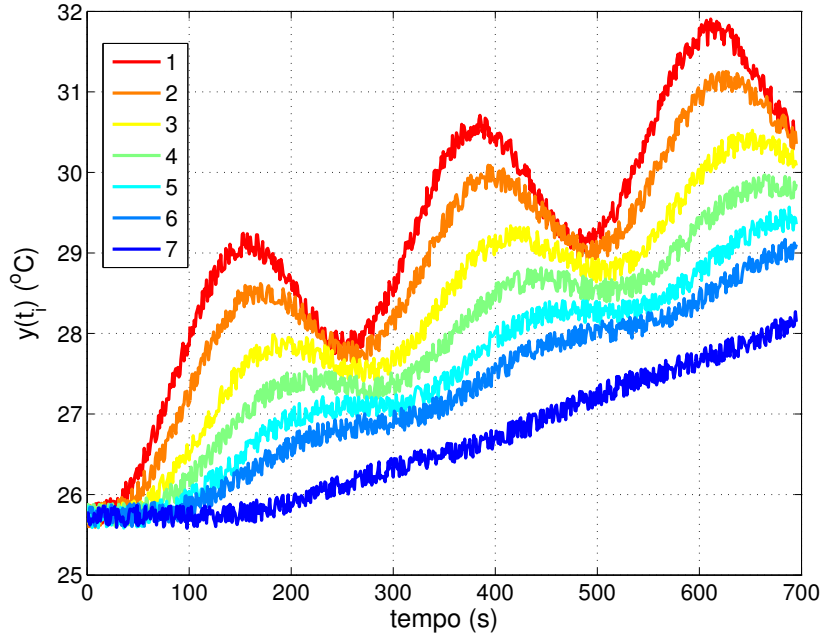


Figura 2: Temperaturas simuladas em diversas posições (Tab. 1 e Fig. 3).

Além disso, foram conjecturados os seguintes dados, como dimensão da amostra considerou-se, $L = 0,3030$ (m), $W = 0,0125$ (m) e $R = 0,1530$ (m). Temperaturas inicial, T_0 , e ambiente, T_∞ , iguais à 25.16 ($^{\circ}C$). Propriedades termofísicas do policloreto de polivinila (PVC) $k = 0,152$ (W/mK) e $\alpha = 1,24E - 07$ (m^2/s), h , nos planos yz , em $x = L$ e xy em $z = R$ igual à 5 (W/m^2K), equivalente à convecção natural, e, $h \simeq 0$, na área adjacente ao fluxo de calor, simulando isolamento térmico, $dt = 1$ (s). Além disso, adicionou-se à temperatura simulada, o erro aleatório, ϵ , de no máximo 1% do máximo valor da temperatura, $\epsilon = \pm 0,1588^{\circ}C$, ou seja,

$$y(t_i) = T(x_i, y_i, z_i, t_i) + \epsilon_i. \quad (5)$$

Para a obtenção da temperaturas sintéticas foi imposto um fluxo periódico, mostrado na Fig. 4, dado por $q(t) = (c_1 \cdot \sin^2(c_2 \cdot t))$, onde c_1 e c_2 são constantes e t é a variável tempo.

Como dito anteriormente, nesse trabalho foram aplicadas duas técnicas de problema inverso. A primeira técnica, o método sequencial com função especificada [Beck et al., 1985], baseia-se nos coeficientes de sensibilidade para as estimativas das componentes de fluxo de calor, enquanto a segunda técnica, o método da função transferência baseada em funções de Green (TFBGF) [Fernandes, 2013], é fundamentada na obtenção da função transferência do problema térmico. Embora neste trabalho estas técnicas não estejam descritas, o comportamento de suas funções básicas foi analisado, ou seja, o coeficiente de sensibilidade e a resposta impulsiva do problema em estudo foram calculados para cada posição possível de um sensor de temperatura.

Tabela 1: Localização dos sensores.

posição	x (m)	y (m)	z (m)
1	0	W	0.1
2	0	$0.9W$	0.1
3	0	$0.8W$	0.1
4	0	$0.7W$	0.1
5	0	$0.6W$	0.1
6	0	$0.5W$	0.1
7	0	0	0.1

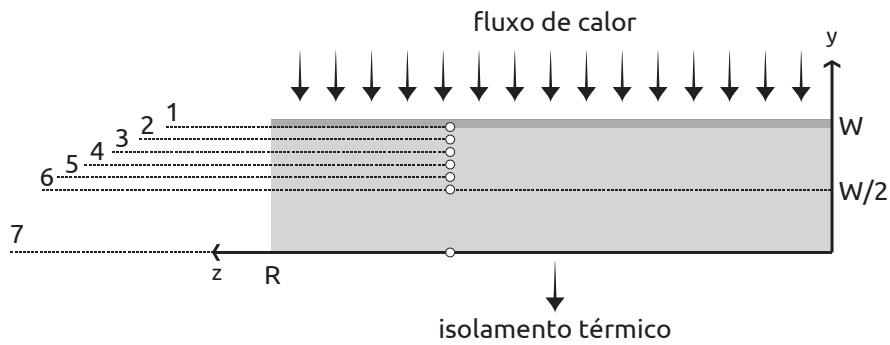


Figura 3: Localização dos sensores na geometria (vista lateral)

3.1 Sensibilidade

O coeficiente de sensibilidade é definido como a primeira derivada da variável a ser medida em relação à grandeza a ser estimada, ou seja,

$$\phi = \frac{\partial T}{\partial q}. \quad (6)$$

A sensibilidade pode assim ser calculada pela Eq. (4), considerando o fluxo de calor unitário, $q(t) = 1$ (W/m^2), temperatura inicial e ambiente iguais a zero.

A Figura 5 mostra o comportamento da sensibilidade para as posições dos sensores mostradas na Tab. 1 e Fig. 3, que são as mesmas posições referentes às temperaturas simuladas mostradas na Fig. 2.

A sensibilidade indica o quanto cada posição (x, y, z) na geometria é suscetível à erros de medições [Beck, 1979, Ling e Atluri, 2006, Lin, 2011]. Nota-se, na Fig. 5, que quanto mais próximo à fonte de calor, maiores são os valores para a sensibilidade. Sensibilidade muito pequena ou correlacionadas uma com as outras, implica em maior vulnerabilidade à erros inerentes a temperaturas experimentais, e consequentemente, maior dificuldade em estimar o fluxo de calor [Beck et al., 1985].

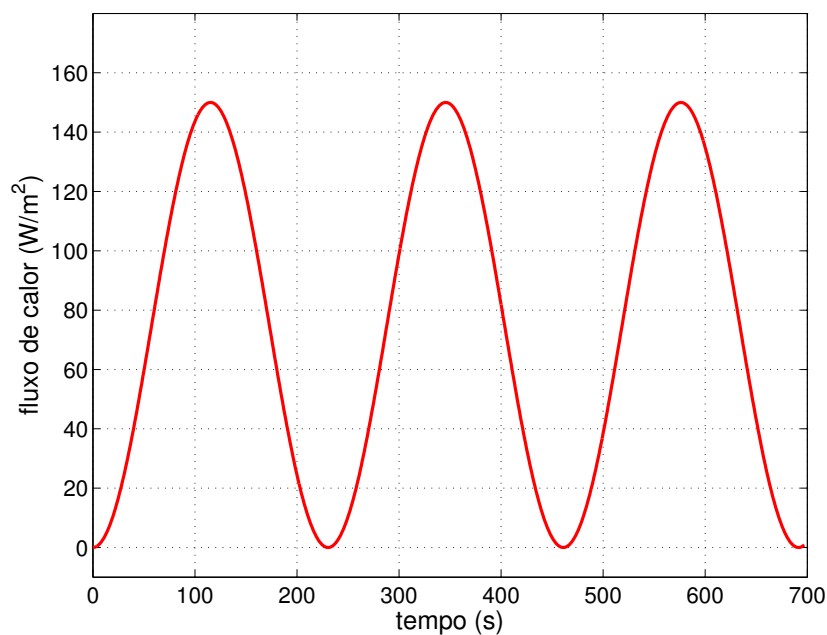


Figura 4: Fluxo de calor imposto para os testes simulados

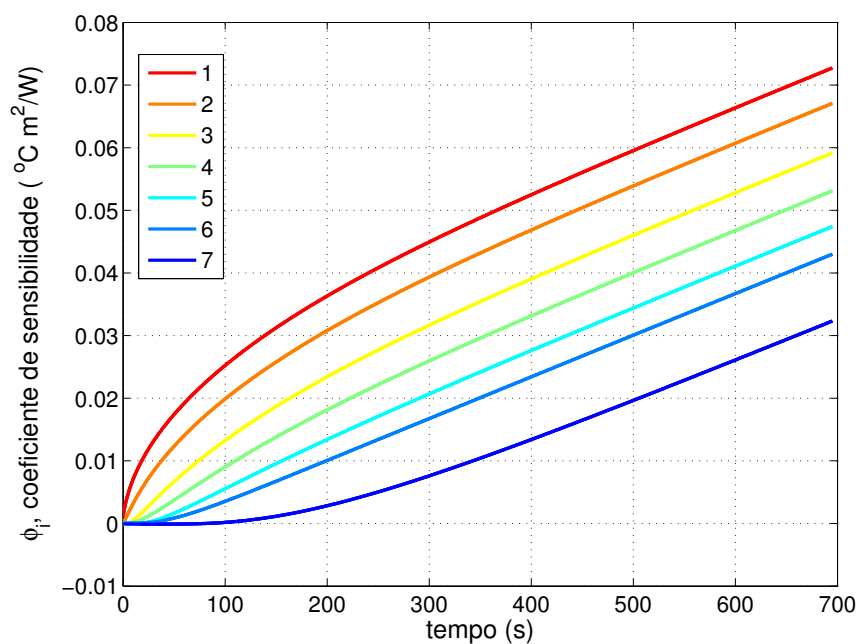


Figura 5: Sensibilidade calculada a partir da Eq. (4)

3.2 Resposta impulsiva

A resposta impulsiva do problema térmico é obtida por meio da Eq. (2). Considera-se, nesse caso, o fluxo de calor $q(t)$ sendo uma função Delta de Dirac, isto é, $q(t) = \delta(t)$. Ou seja, idealiza-se o fluxo de calor como um impulso instantâneo.

Das propriedades da função impulso, tem-se $\int_0^t \delta(\tau) G(x, y, z, t|x', W, z', \tau) d\tau = G(x, y, z, t)$.

Portanto, identifica-se a resposta impulsiva do problema como sendo

$$h(x, y, z, t) = \frac{\alpha}{k} \int_{x'=0}^{\frac{L}{2}} \int_{z'=0}^R G(x, y, z, t|x', W, z', \tau) dx' dz', \quad (7)$$

considerando que $\theta_0 = 0$, e G é dada pela Eq. (3). Desta forma, a expressão analítica para a resposta impulsiva do problema $X23Y23Z23$ é dada por

$$\begin{aligned} h(x, y, z, t) = & \frac{8\alpha}{kW} \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{\alpha_m^2}{L^2} + \frac{\beta_n^2}{W^2} + \frac{\gamma_p^2}{R^2}\right)\alpha t} \\ & \times \left[\frac{\alpha_m^2 + B_1^2}{\alpha_m^2 + B_1^2 + B_1} \right] \left[\frac{\beta_n^2 + B_2^2}{\beta_n^2 + B_2^2 + B_2} \right] \left[\frac{\gamma_p^2 + B_3^2}{\gamma_p^2 + B_3^2 + B_3} \right] \\ & \times \left[\cos\left(\frac{\alpha_m x}{L}\right) \frac{\sin\left(\frac{\alpha_m}{2}\right)}{\alpha_m} \right] \left[\cos\left(\frac{\beta_n y}{W}\right) \cos \beta_n \right] \left[\cos\left(\frac{\gamma_p z}{R}\right) \frac{\sin\left(\frac{\gamma_p}{2}\right)}{\gamma_p} \right] \end{aligned} \quad (8)$$

Apresenta-se na Figura 6 o comportamento da resposta impulsiva para as posições mostradas na Tab. 1 e Fig. 3.

A resposta impulsiva evidencia o comportamento dinâmico do sistema. Ou seja, o problema térmico comporta-se como um sistema dinâmico não amortecido, quando ele é caracterizado por uma exponencial negativa. Assim, quanto mais afastado for a posição de aquisição de temperatura da fonte de calor, mais amortecido será o comportamento do sistema [Fernandes et al., 2015].

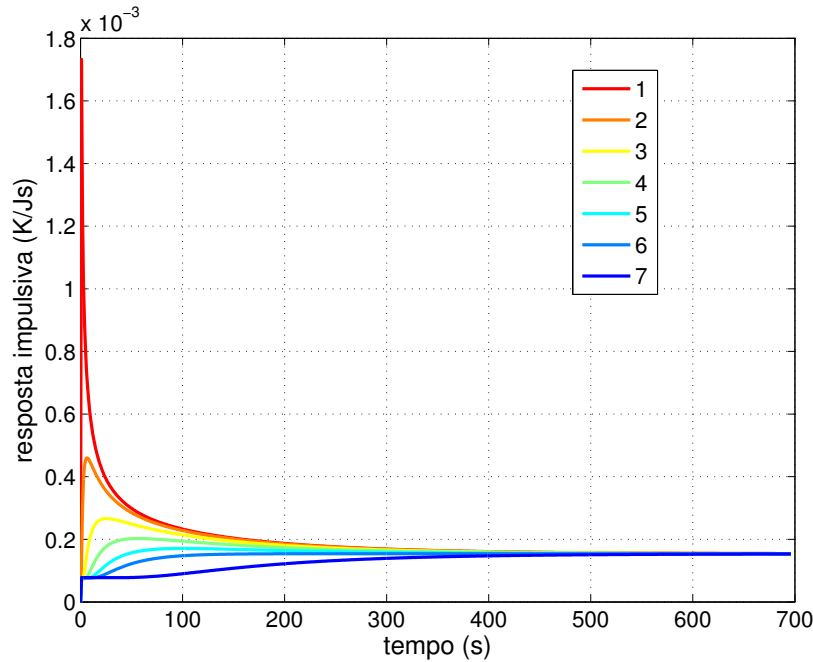


Figura 6: Resposta impulsiva calculada a partir da Eq. (8)

4 Solução do problema inverso

A sensibilidade e a temperatura simulada (ou experimental, quando for o caso) foram aplicadas ao método da função sequencial, enquanto a resposta impulsiva e temperatura foram usadas para estimar o fluxo de calor, através do método TFBGF.

Mostra-se na Figura 7 as estimativas obtidas para o fluxo de calor, por meio dos dois métodos, a partir das temperaturas simuladas para a posição do sensor 2 (Tab 1 e Fig. 3).

A posição referente ao sensor 2 é favorável a estimativa para o fluxo de calor, pois, possui maior sensibilidade e a resposta impulsiva tem o comportamento de um sistema dinâmico não amortecido. Desta forma, apesar da adição do erro aleatório de 1% do máximo valor da temperatura, obteve-se estimativa satisfatória para o fluxo de calor.

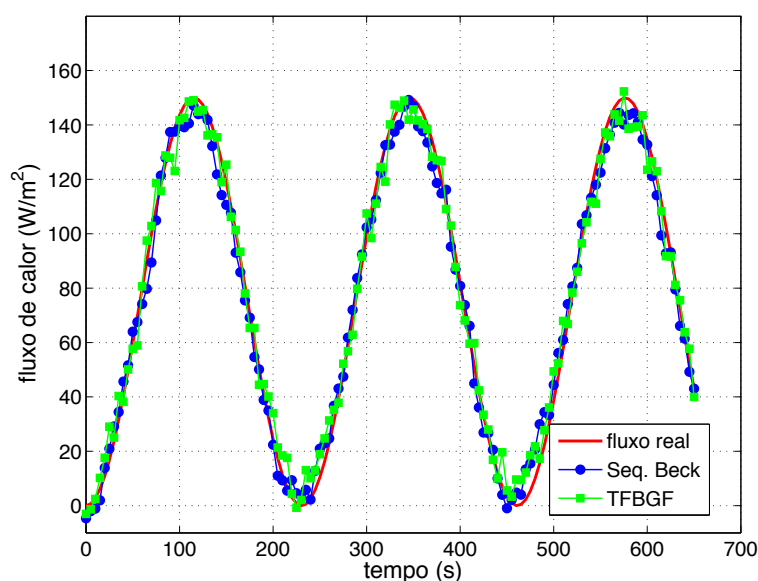


Figura 7: Fluxo de calor estimado usando as informações do sensor 2.

Na estimativa do fluxo de calor por meio do método da função sequencial foram necessários o uso de tempo futuro, r , igual a 20, para proporcionar maior estabilidade ao problema inverso. Para o TFBGF foi aplicada média móvel de tamanho 70, apenas nos dados de fluxo de calor, mantendo a discretização do tempo igual a 1 segundo para ambos métodos.

Analisando a posição 5, que está 40% de W de distância da fonte de calor, obteve-se a estimativa mostrada na Fig. 8. Para essa posição a sensibilidade tem valores menores que para posição 2, sendo muito mais sensível ao erro adicionado à temperatura, o que implica na necessidade de um número maior de tempo futuro, neste caso, definido como $r = 60$. Para o TFBGF foi aplicado média móvel na temperatura de tamanho 50 e média móvel de tamanho 20 no fluxo de calor.

Examinando os valores de sensibilidade para as posições 6 e 7, que são valores ainda menores que os apresentados pela posição 5, e considerando erro aleatório inserido à temperatura simulada, para adicionar estabilidade ao problema inverso, tanto o tempo futuro como a média móvel devem ser amplificados, porém, não obteve-se sucesso na estimativa do fluxo de calor para essas posições.

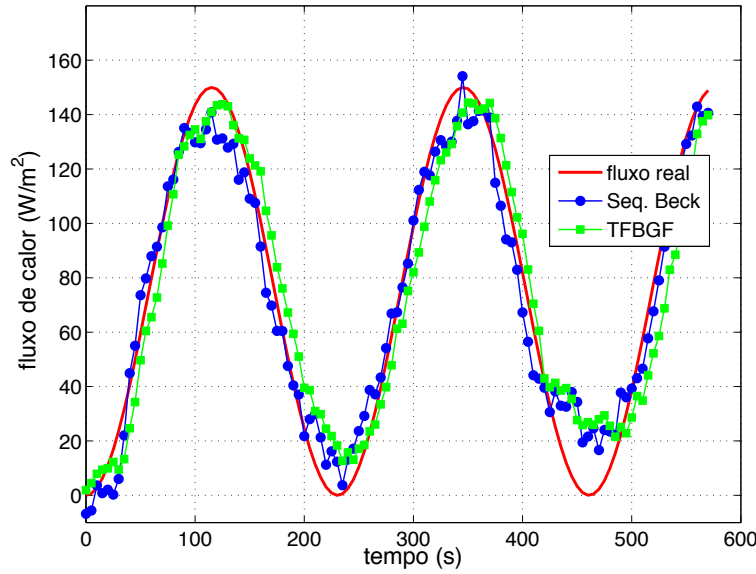


Figura 8: Fluxo de calor estimado usando as informações do sensor 5, adição de erro 1%.

Beck et al. [1985] afirmam que o tempo futuro grande é responsável por degradar a estimativa do fluxo de calor. O mesmo fenômeno ocorre com a aplicação da média móvel. Os métodos de estimativa de fluxo de calor mostraram-se equivalentes, apesar da diferença de concepção entre os parâmetros sensibilidade e resposta impulsiva.

Outro mecanismo de análise para o sucesso da estimativa do fluxo de calor é o estudo do comportamento do tempo de penetração e desvio de calor [Ignacio et al., 2015].

4.1 Tempo de penetração e desvio de calor

Analizando as características do material, a geometria da amostra e as posições onde foram calculadas as temperaturas simuladas propõe-se aproximar o modelo tridimensional $X23Y23Z23$ (problema original), cuja solução analítica é mostrada na Eq. (4), pelo modelo semi-infinito (problema auxiliar) $Y20$, com solução analítica mostrada abaixo.

$$\theta_{Y20}(y, t) = \frac{2\alpha}{\sqrt{\pi k}} \int_0^t \frac{q(\tau)}{(4\alpha(t - \tau))^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{y^2}{4\alpha(t - \tau)}} d\tau \quad (9)$$

Considerando fluxo de calor constante obtém-se:

$$\theta_{Y20}(y, t) = \frac{q_0}{k} \sqrt{4\alpha t} \operatorname{ierfc} \left(\frac{y}{\sqrt{4\alpha t}} \right) \quad (10)$$

Observa-se que ambos modelos apresentam soluções analíticas e seus comportamentos são idênticos em determinadas condições físicas e/ou geométricas. Desta forma, determinadas essas regiões as soluções podem ser usadas indistintamente. Além disso, identificando-se esse comportamento, cada solução na realidade verifica a outra. A este tipo de verificação dá-se o nome de verificação intrínseca [Cole et al., 2014], pois cada solução exata é obtida e implementada numericamente de forma independente.

Duas variáveis fundamentais para o estabelecimento físico dessa verificação são dadas pelos chamados tempos de penetração de calor e tempo de desvio de calor que indicam, respectivamente, a influência da condição de contorno ativa (fluxo de calor) em uma posição, e, a influência das condições de contorno inativas (condições homogêneas dadas pela convecção) na mesma posição.

Em outras palavras, o tempo de penetração de calor irá determinar quanto tempo leva para que uma dada posição (x,y,z) seja influenciada pelo fluxo de calor $q(t)$. de Monte et al. [2008] definem em seu trabalho a Eq. (11), que estabelece uma relação para a obtenção do tempo de penetração de calor.

A expressão (Eq. (11)) determina o tempo gasto para que a temperatura em um dado ponto da geometria comece a mudar em uma fração de 10^{-n} em relação à temperatura do ponto onde é aplicado o fluxo de calor [de Monte et al., 2008, Cole et al., 2014]. Nota-se que ambas temperaturas são calculadas pela expressão do modelo semi-infinito, pois, a definição de tempo de penetração de calor leva em consideração apenas a condição de contorno ativa que é preservada por este modelo.

$$\frac{\theta_{Y20}(y, t)}{\theta_{Y20}(0, t)} = 10^{-n} \quad (11)$$

Na Tabela 2 apresenta-se os diversos tempos de penetração de calor para os pontos apresentados na Tab. 1 e Fig 3. Tanto os tempos de penetração de calor quanto os tempos de desvio de calor foram calculados para um expoente $n = 2$, pois, assim, são obtidos os denominados tempos de penetração e desvio de calor “visuais” [de Monte et al., 2008]. A discretização temporal utilizada nos cálculos foi a mesma das simulações.

Portanto, determinando-se os valores dos tempos de penetração do calor (Tab. 2), pode-se calcular os respectivos tempos adimensionais de penetração de calor, definidos por $t_{pen}^+ = \frac{\alpha t_{pen}}{(W - y)^2}$, e apresentados na Tab. 3.

Tabela 2: Tempos de penetração de calor (s).

Posição	$\frac{t_{pen}}{n = 2}$
1	0
2	1
3	5
4	11
5	19
6	30
7	122

Tabela 3: Tempos adimensionais de penetração de calor para cada um dos tempos.

Posição	$\frac{t_{pen}^+}{n = 2}$
1	∞
2	0,0794
3	0,0992
4	0,0970
5	0,0942
6	0,0952
7	0,0968

O tempo de desvio de calor representa o tempo gasto para que o efeito da convecção de calor influencie uma dada posição (x,y,z) , ou seja, o instante em que o modelo $X23Y23Z23$ diverge do $Y20$. Portanto, de Monte et al. [2008] sugerem em seu trabalho uma outra relação de temperatura:

$$\frac{\theta_{X23Y23Z23}(x, y, z, t) - \theta_{Y20}(y, t)}{\theta_{Y20}(0, t)} = 10^{-n} \quad (12)$$

Nota-se que o numerador desta relação é a diferença de temperatura entre os modelos original e auxiliar, por esta razão, o tempo de desvio de calor determina o instante em que o modelo tridimensional diverge do unidimensional semi-infinito.

As Tabelas 4 e 5 mostram, respectivamente, os valores obtidos para o tempo de desvio de calor e os tempos adimensionais de desvio de calor, calculados por $t_{desv}^+ = \frac{\alpha t_{desv}}{(2W - (W - y))^2}$.

Tabela 4: Tempos de desvio de calor (s).

Posição	$\frac{t_{desv}}{n = 2}$
1	488
2	441
3	396
4	353
5	312
6	275
7	122

Tabela 5: Tempos adimensionais de desvio de calor para cada um dos tempos.

Posição	$\frac{t_{desv}^+}{n = 2}$
1	0,0968
2	0,0969
3	0,0970
4	0,0969
5	0,0967
6	0,0970
7	0,0968

Vale ressaltar que em seu trabalho de Monte et al. [2008] mostram que os valores dos tempos adimensionais tanto para o tempo de penetração quanto para o tempo de desvio de calor são constantes e iguais a 0,0970. Neste trabalho ocorreram pequenas variações nestes valores, as quais podem ser justificadas através da discretização temporal. Foi utilizado 1 segundo para tal discretização, o que fez com que o cálculo dos tempos de penetração e desvio de calor fossem menos precisos do que os calculados pelo referido autor.

Na Figura 9 tem-se a visualização dos tempos de penetração e desvio para a posição 5, mostrada na Tab. 1. Enfatiza-se que isso significa dizer que as soluções $X23Y23Z23$ e $Y20$ são seguramente equivalentes no intervalo de tempo de 0 a 312 segundos, para a posição 5 e o calor leva 19 segundos para atingir tal posição, conforme as Tabs. 2 e 4.

Para a posição 6 tem-se o intervalo de 0 a 275 segundos em que as soluções 3D e 1D são equivalentes, levando 30 segundos para o calor atingir esta posição, porém, nesse caso, não obteve-se sucesso na estimativa do fluxo de calor. Para posição 7, o intervalo de penetração e desvio de calor são iguais, ou seja, quando o calor atinge essa posição, que está sobre o outro contorno, ela já desvia, pois já começa a sofrer influência da condição de contorno inativa.

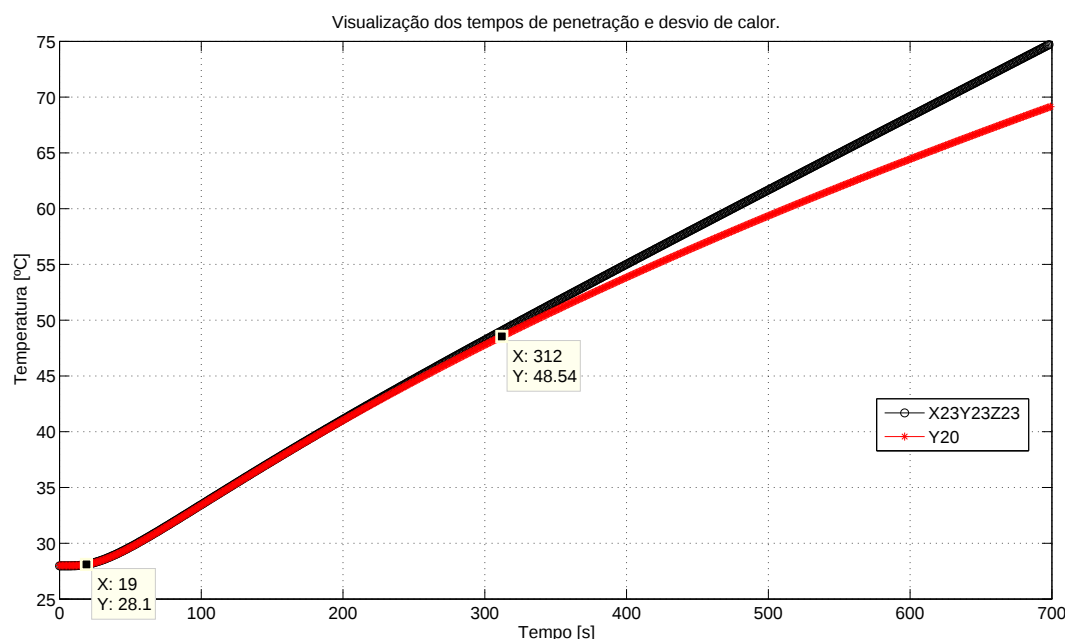


Figura 9: Tempos de penetração e desvio de calor para a posição 5 (Tab. 1).

Os tempos de penetração e desvio de calor foram calculados considerando-se fluxo constante aplicado em $x = 0$, portanto, para a análise dos dados simulados e experimentais realizados nesse trabalho, deve-se levar em consideração o tempo em que o fluxo de calor não permeou a geometria. De posse dos valores desses tempos, pode-se aplicar a solução de problemas inversos utilizando a Eq. (10), a qual é matematicamente mais simples, sua solução computacional é livre de somatórios e independente da geometria, por ser um semi-infinito.

5 RESULTADOS OBTIDOS - DADOS EXPERIMENTAIS

Mostra-se a seguir os resultados obtidos a partir dos testes experimentais realizados em uma amostra de policloreto de polivinila (PVC), um mau condutor. Além disso, considerou-se gradiente de temperatura em torno de 5°C , os mesmos parâmetros realizados nos testes simulados.

Para o aparato experimental fez-se a construção de um experimento que repetisse os testes simulados optando por uma montagem que minimizasse os erros de isolamento, a influencia do coeficiente de convecção h , a influencia de possíveis variações na temperatura ambiente e que possibilitasse colher temperatura na direção perpendicular à área de aplicação do fluxo e a aplicação dos conceitos de tempo de penetração e desvio.

Os materiais usados foram:

- 2 placas iguais de PVC de dimensões $0,3 \times 0,3 \times 0,025$ m, difusividade $\alpha = 1,24 \times 10^{-7} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$ e condutividade $k = 0,152 \frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}}$;
- 2 resistências. $R1 = 18 \Omega$ e $R2 = 20,5 \Omega$, ambas com dimensões $0,3 \times 0,3 \times 0,001$ m;
- 2 Transdutores (T1 e T2) calibrados [Figueiredo et al., 2014] de dimensões $0,05 \times 0,05 \times 0,001$ m;

- 1 Termopar tipo T (Tp1) calibrado [Figueiredo et al., 2014];
- 2 fontes de potência. F1 modelo EMG18134. F2 modelo MCE1051;
- 1 aquisitor de sinais Agilent 34972A;
- 1 computador pessoal;
- 1 placa de poliestireno expandido (isopor) para ser usado como isolante térmico;

O experimento foi construído como um “sanduíche” como mostrado nas Fig. 10 e 11. Colocou-se uma placa de isolante térmico sobre a bancada, em seguida colocou-se a resistência R2 ligada à fonte F2. Sobre a resistência colocou-se o transdutor T2. Em cima destas camadas, colocaram-se as duas placas de PVC lado a lado de forma que cada placa estivesse sobre metade da área da resistência e o transdutor estivesse abaixo de apenas umas das placas. Além disso, colocou-se o termopar Tp1 (posição 5 da Tab. 1) que está entre as duas placas para que as temperaturas colhidas sejam em uma direção perpendicular à área de aplicação do fluxo. O transdutor T1 foi colocado sobre a placa de PVC na mesma direção do T2. O mesmo ocorreu com a resistência R1 que foi colocada na mesma direção da R2 e ligada na fonte F1. Sobre o experimento foi colocado outra placa de isolante térmico. Os termopares, transdutores e o sinal de saída das fontes foram adquiridos pela Agilent que estava conectado ao computador.

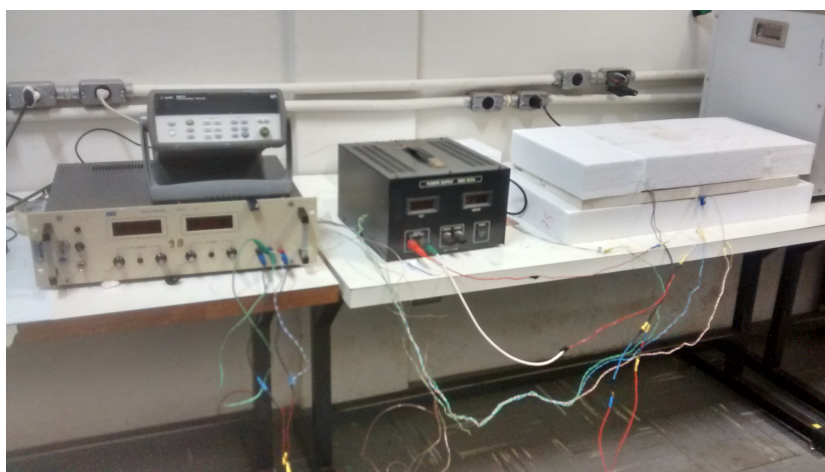


Figura 10: Bancada experimental.

Esta montagem tem simetria em todas as direções quando as densidades de fluxo (W/m^2) em R1 e R2 são iguais. Desta forma consegue-se representar o modelo simulado quanto a geometria e as condições de contorno.

A Figura 12 mostra o fluxo de calor aplicado à área superficial da geometria (Fig. 1).

Na Figura 13 tem-se a temperatura adquirida por meio do sensor, termopar do tipo K, como resposta ao fluxo de calor (Fig. 12), na posição do sensor 5, referenciado na Tab. 1.

Apresenta-se na Fig. 13(b) a flutuação da temperatura, isto é, a diferença entre duas componentes consecutivas da temperatura. Verifica-se que a temperatura oscila entre $\pm 0.05^\circ C$, um valor inferior a 1% do máximo valor da temperatura considerado na simulação.

As estimativas para o fluxo de calor experimental, utilizando a solução X23Y23X23, são apresentadas na Fig. 14, nesse caso foram necessários o tempo futuro $r = 40$, para o método da

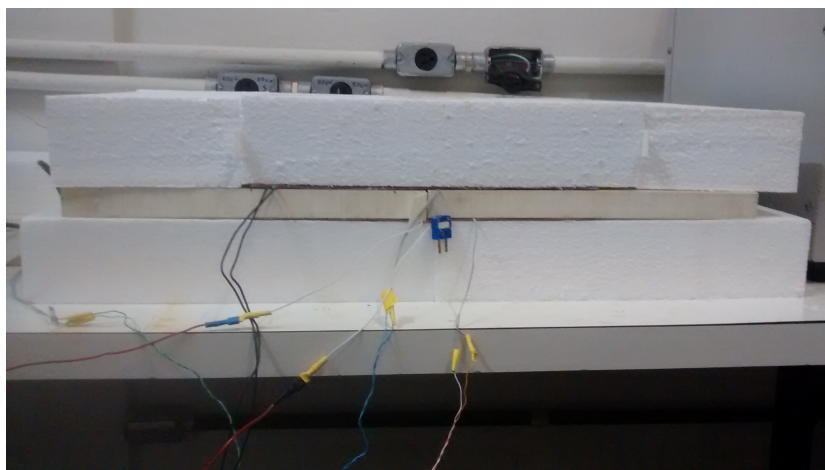


Figura 11: Bancada experimental.

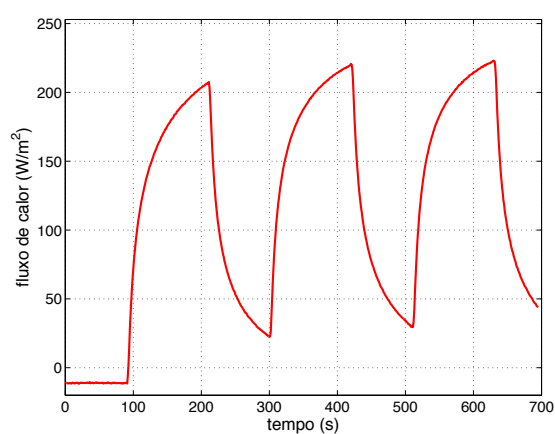
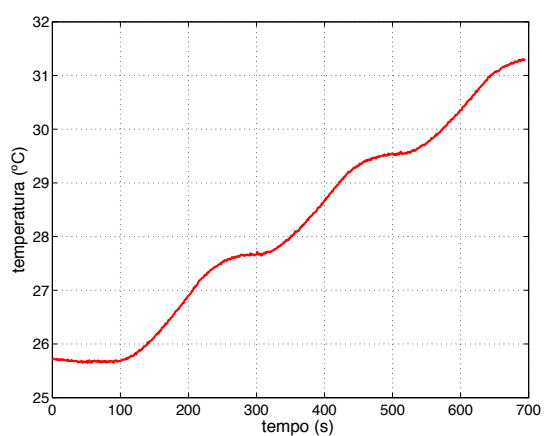
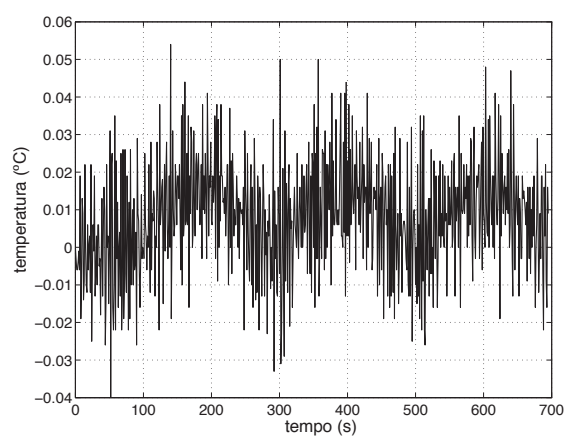


Figura 12: Fluxo de calor experimental.



(a) Resposta ao fluxo de calor (Fig. 12)



(b) Flutuação da temperatura

Figura 13: Temperatura experimental

função sequencial, e, média móvel no fluxo de calor igual a 40, para o TFBGF.

Observa-se, na Figura 14, que as estimas para o fluxo de calor obtidas pelos dois métodos

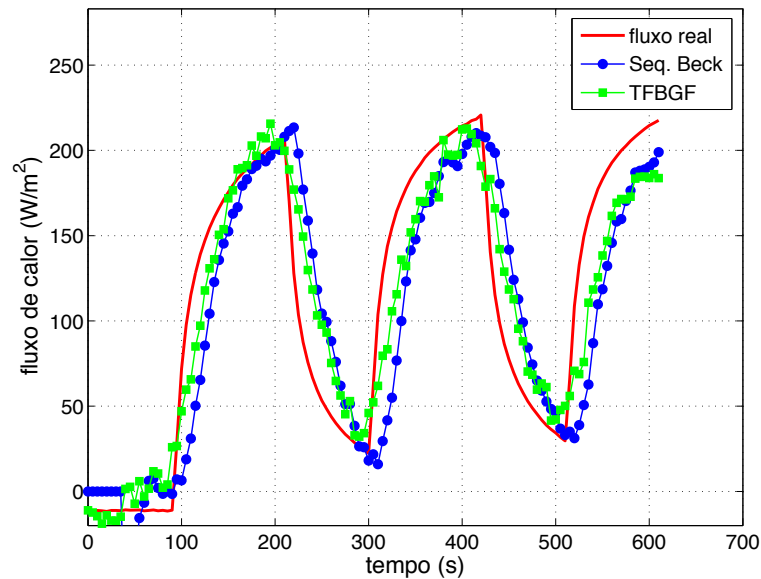


Figura 14: Estimativas para o fluxo de calor experimental sensor 5

aplicados estão de acordo entre si e com o fluxo de calor experimental, e de acordo com os resultados obtidos com dados simulados.

É possível constatar que as estimativas para o fluxo de calor sofreram atrasos, o que é consequência do tempo de penetração necessário para o fluxo de calor atingir a posição do sensor 5. Esse atraso é de aproximadamente 20 segundos, conforme mostrado na Tab. 2.

6 CONCLUSÃO

Apresentou-se nesse trabalho o estudo da solução de um problema inverso de condução de calor, abarcado por meio dos métodos sequencial e TFBGF, respaldando-se na análise de sensibilidade, resposta impulsiva, tempo de penetração e desvio de calor.

Considerou-se uma amostra de policloreto de vinila (PVC) cujos baixos gradientes de temperaturas somados aos ruídos experimentais poderiam tornar-se obstáculos para obtenção da solução do problema inverso. Entretanto, foi possível estimar satisfatoriamente o fluxo de calor a partir de temperatura adquirida para posição que está no máximo 40% da distância de W da fonte de calor, sendo W o comprimento da amostra na direção y .

Com a investigação dos tempos de penetração e desvio de calor demonstrou-se a possibilidade substituir soluções analíticas tridimensionais por soluções unidimensionais. Mostrou-se que, considerando fluxo de calor constante, as soluções $X23Y23Z23$ e $Y20$ são seguramente equivalentes até o tempo de desvio de calor para cada posição analisada. Comprovou-se que quanto maior for a distância entre o sensor de aquisição de temperatura e a fonte de calor, menor é o intervalo onde as soluções 3D e 1D são equivalentes. Portanto, após a seleção da melhor localização para o sensor de temperatura, tendo como base a sensibilidade e a resposta impulsiva, pode-se determinar os tempos de penetração e desvio de calor da posição escolhida. Feito isto é possível estabelecer a ótima duração de um experimento, que deve ser no mínimo igual ao tempo de penetração de calor e no máximo igual ao tempo de desvio de calor, para que assim possa ser feita a substituição de uma solução mais complexa por outra numericamente equivalente e

matematicamente e computacionalmente mais simples, mas sem perder a precisão na estimativa do fluxo de calor.

O sucesso obtido na estimativa do fluxo de calor foi decorrente das investigações realizadas a partir de dados simulados, assim, foi possível verificar por meio dos coeficientes de sensibilidade o quanto a posição de aquisição de temperatura é suscetível aos ruídos de medição. E, por meio do estudo da resposta impulsiva e dos tempos de penetração e desvio de calor compreendeu-se o comportamento dinâmico do problema, desta forma, a estimativa do fluxo de calor pode ser confirmada experimentalmente.

Constatou-se nesta pesquisa que é conveniente analisar todos esses parâmetros em conjunto, com propósito de estabelecer critérios otimizados para a aquisição de temperatura que possam assegurar estabilidade para a solução do problema inverso.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem as agências CAPES, CNPq e FAPEMIG.

REFERÊNCIAS

James V. Beck. Criteria for comparison of methods of solution of the inverse heat conduction problem. *Nuclear Engineering and Design*, (5):11 – 22, 1979.

James V. Beck, Ben Blackwell, Charles. R. St. Clair Jr. *Inverse Heat Conduction: Ill-Posed Problems*. A Wiley-Interscience Publication. John Wiley & Sons Incorporated, 1985. ISBN 9780471083191.

Kevin D. Cole, James. V. Beck, A. Haji-Sheikh, Bahman Litkouhi. *Heat Conduction Using Green's Functions*. Series in computational and physical processes in mechanics and thermal sciences. Taylor & Francis Group, 2010. ISBN 9781439813546.

Kevin D. Cole, J. V. Beck, Keith A. Woodbury, Filippo de Monte. Intrinsic verification and a heat conduction database. *Int. J. Heat and Mass Transfer*, 78:36–47, 2014.

Filippo de Monte, James V. Beck, Donald E. Amos. Diffusion of thermal disturbances in two-dimensional cartesian transient heat conduction. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 51(25-26):5931–5941, 2008.

Ana Paula Fernandes. *Função de transferência analítica aplicada à solução de problema inverso em condução de calor*. Tese de doutorado, Universidade Federal de Uberlândia, 2013.

Ana Paula Fernandes, Marcelo B. dos Santos, Gilmar Guimarães. An analytical transfer function method to solve inverse heat conduction problems. *Applied Mathematical Modelling*, 2015. ISSN 0307-904X. doi: <http://dx.doi.org/10.1016/j.apm.2015.02.012>.

Alisson A. A. Figueiredo, Fábio G. T. Ferreira, Fernando C. Malheiros, Gilmar Guimarães. Calibração de transdutores. Relatório técnico, Laboratório de Transferência de Calor e Massa, Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Uberlândia, Dezembro 2014.

Luís Henrique S. Ignacio, Ana Paula Fernandes, Gilmar Guimarães. Use of simplified thermal model and early times to solve inverse heat conduction problem. *23rd ABCM International Congress of Mechanical Engineering (COBEM 2015)*, 2015.

Shih-Ming Lin. A sequential algorithm and error sensitivity analysis for the inverse heat conduction problems with multiple heat sources. *Applied Mathematical Modelling*, 35(6):2607 – 2617, 2011. ISSN 0307-904X. doi: <http://dx.doi.org/10.1016/j.apm.2010.11.015>.

Xianwu Ling S. N. Atluri. Stability analysis for inverse heat conduction problems. *CMES: Computer Modeling in Engineering & Sciences*, 13(3):219 – 228, 2006.