



ON NON-LINEAR DYNAMICS AND STABILITY OF A SHALLOW ARCH

Fabio Condado Barbosa

Reyolando M. L. R. F. Brasil

condado@usp.br

reyolando.brasil@poli.usp.br

Department of Structural and Geotechnical Engineering Polytechnic School, University of São Paulo, São Paulo SP, CEP 04102-000, Brazil

Abstract. *Shallow arch may experience a loss of stability called snap-through or unstable asymmetric bifurcation, depending on various parameters, such as shallowness, stiffness and boundary conditions. This paper investigates the in-plane stability and simple dynamic behavior of simple supported sinusoidal arch subjected to dynamic load. The equations of motion are obtained using Rayleigh-Ritz method, adopting an approximating function for the deformed configuration. Configurations of equilibrium are shown, as well as critical values. In addition time-integration scheme is used to achieve numerical solutions and plot the phase plane of free damped vibration, allowing the visualization of two centers and one saddle-point.*

Keywords: *Structural stability, elastic stability, shallow truss, shallow arch, dynamic analysis.*

1 INTRODUÇÃO

A transição entre configurações de equilíbrio estáveis e instáveis corresponde à instabilidade estrutural, podendo surgir de dois modos: por bifurcação do equilíbrio perto da configuração não perturbada ou por ocorrência de um ponto limite sem qualquer bifurcação anterior, não existindo um estado alternativo de equilíbrio nas proximidades da configuração não perturbada. No primeiro caso, a estrutura deforma-se de um modo quando solicitada a carregamento crescente e então, numa carga dita crítica abandona repentinamente esse modo, que se torna instável, indo buscar outro. No segundo caso a deformação se dá de um mesmo modo desde o início do carregamento até que a carga limite é atingida.

Estruturas como treliças, arcos e calotas esféricas abatidas, largamente utilizadas na indústria da construção civil, petrolífera e aeroespacial, podem apresentar os dois tipos de instabilidade, sendo, ainda, de maior interesse devido ao comportamento altamente não linear e a perda de rigidez devido a elevadas tensões de compressão.

Se, no entanto, o carregamento é dinâmico, como, por exemplo, harmônico, a resposta do sistema adquire uma grande riqueza de possíveis comportamentos, em função da amplitude e frequência desse carregamento. As respostas podem resultar vibrações periódicas de vários períodos diferentes, quase periódicas, caóticas etc.

A qualidade altamente genérica e interdisciplinar dos desenvolvimentos em Dinâmica Não-linear ganhos nas últimas poucas décadas tem permitido miríades de aplicações em quase todas as áreas da ciência e da tecnologia, e mesmo além. Onde a modelagem e análise de complexos fenômenos não lineares, possivelmente caóticos, se faz necessária, seus métodos podem ter um papel chave. Caos e dinâmica não-linear se desenvolveram como um campo emergente com fundamentos na engenharia e ciências aplicadas. Aplicações modeladas analiticamente, simuladas numericamente e realizadas experimentalmente levam a novas capacitações e desafios. Deve-se ter em mente que vibrações de sistemas reais são melhor descritas como multifrequência, variáveis no tempo, estocásticas etc. Modelos lineares de banda estreita estão fadados a serem altamente ineficientes sob essas circunstâncias. Modelos não lineares são capazes de responder sobre uma larga faixa de frequências e amplitudes, sugerindo uma intrínseca capacidade de performance eficiente em casos reais.

O comportamento dinâmico do arco foi objeto de vários estudos. Namachchivaya (1994) cita que notavelmente Mettler, Lock, Humphreys e Hsu estudaram o comportamento dinâmico sob cargas impulsivas. No entanto, sabendo que sob excitações harmônicas simples, ressonância interna pode resultar em modulação de amplitude e movimento caótico, Namachchivaya (1994) determinou a dinâmica não linear de um arco abatido com ressonância interna 1:2 sob uma excitação paramétrica. Malhotra e Namachchivaya (1997) também determinaram o comportamento sob excitação na presença de ressonância interna na razão 1:1. Breslavskya et al. (2008) utilizando os modos não lineares de Shaw–Pierre para movimentos perto do equilíbrio concluíram que a aproximação com dois modos é suficiente. Recentemente Yu e Chen (2014) apresentaram uma investigação sobre orbitas homoclínicas em um arco abatido submetido à excitação periódica na presença de ressonância interna na razão 1:1. Foi utilizado o método das múltiplas escalas de tempo junto com o método de perturbação de Melnikov para exibir a existência de saltos que conectam o equilíbrio de uma banda ressonante de uma variedade lenta. Concluem que estes resultados implicam em caos com amplitude modulada no sentido da ferradura de Smale.

2 EQUILÍBRIO ESTÁTICO

A função que caracteriza a configuração indeformada de um arco senoidal é dada por:

$$y_0(x) = h \sin \frac{\pi x}{l} \quad (1)$$

O carregamento também é dado por uma função com variação senoidal da forma:

$$p(x) = p_0 \sin \frac{\pi x}{l} \quad (2)$$

A figura 1 ilustra o problema.

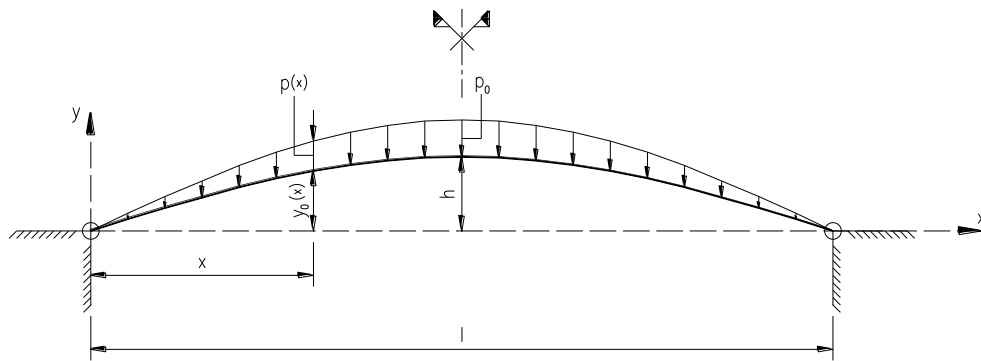


Figura 1: Arco abatido senoidal biarticulado com carregamento senoidal.

A configuração deformada pode ser discretizada por duas coordenadas generalizadas, dadas por funções harmônicas, com a primeira sendo a configuração simétrica e a segunda a assimétrica. A escolha das coordenadas generalizadas é válida para arcos abatidos conforme relatado em Thompson e Hunt (1973) e com comprovação experimental em Roorda.

$$\bar{y}(x, t) = (h - q_1(t)) \sin \frac{\pi x}{l} + q_2(t) \sin \frac{2\pi x}{l} \quad (3)$$

A energia de deformação, diferentemente do caso da treliça, possui contribuição axial e de flexão, dadas por:

$$U_{axial} = \frac{EA}{2} \int_0^l \varepsilon(x, t)^2 dx \quad , \quad U_{flexão} = \frac{EI}{2} \int_0^l k_x(x, t)^2 dx \quad (4)$$

Onde EA caracteriza a rigidez axial e EI a rigidez de flexão, constantes para o caso em estudo. A energia potencial das forças distribuídas é:

$$W = \int_0^l p(y_0 - y(t)) dx \quad (5)$$

A deformação axial ε , para este caso de engenharia, é dada por:

$$\varepsilon(x, t) = \frac{ds(t) - ds_0}{ds_0} \quad (6)$$

Os segmentos infinitesimais ds_0 e $ds(t)$, indicados na figura 2, são dados por:

$$ds_0 = \sqrt{1 + \frac{dy_0^2}{dx^2}} dx, \quad ds(t) = \sqrt{1 + \frac{dy(t)^2}{dx^2}} dx \quad (7)$$

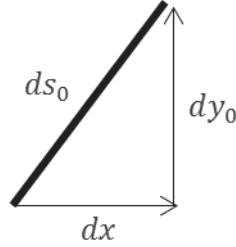


Figura 2: Segmentos infinitesimais.

Simplificadamente, os segmentos infinitesimais podem ser expandidos em série de Taylor, considerando os três primeiros termos:

$$ds_0 \cong \left(1 + \frac{1}{2} \frac{dy_0^2}{dx^2}\right) dx, \quad ds(t) \cong \left(1 + \frac{1}{2} \frac{dy(t)^2}{dx^2}\right) dx \quad (8)$$

Substituindo, a deformação axial ε torna-se:

$$\varepsilon(x, t) = \frac{\left(1 + \frac{1}{2} \frac{dy(t)^2}{dx^2}\right) dx - \left(1 + \frac{1}{2} \frac{dy_0^2}{dx^2}\right) dx}{\left(1 + \frac{1}{2} \frac{dy_0^2}{dx^2}\right) dx} = \frac{1}{2} \frac{\frac{dy(t)^2}{dx^2} - \frac{dy_0^2}{dx^2}}{1 + \frac{1}{2} \frac{dy_0^2}{dx^2}} \quad (9)$$

Aproximando, tem-se:

$$\varepsilon(x, t) \cong \frac{1}{2} \left(\frac{dy(t)^2}{dx^2} - \frac{dy_0^2}{dx^2} \right) \quad (10)$$

Como dito anteriormente, considera-se adequado à adoção de duas coordenadas generalizadas, de modo que é necessário reescrever a equação anterior. Assim a deformação axial fica:

$$\varepsilon(x, t) \cong \frac{1}{2} \left(\frac{d\bar{y}(t)^2}{dx^2} - \frac{d\bar{y}_0^2}{dx^2} \right) \quad (11)$$

Onde as derivadas são:

$$\frac{d\bar{y}}{dx} = \frac{\pi}{l} (h - q_1(t)) \cos \frac{\pi x}{l} + \frac{2\pi}{l} q_2(t) \cos \frac{2\pi x}{l}, \quad \frac{d\bar{y}_0}{dx} = \frac{\pi}{l} h \cos \frac{\pi x}{l} \quad (12)$$

Substituindo fica:

$$\varepsilon(x, t) = \frac{1}{2} \left\{ \left[\frac{\pi}{l} (h - q_1(t)) \cos \frac{\pi x}{l} + \frac{2\pi}{l} q_2(t) \cos \frac{2\pi x}{l} \right]^2 - \frac{\pi^2}{l^2} h^2 \cos^2 \frac{\pi x}{l} \right\} \quad (13)$$

Fazendo as expansões, têm-se:

$$\varepsilon(x, t) = \frac{1}{2} \left\{ -2 \frac{\pi^2}{l^2} h q_1(t) \cos^2 \frac{\pi x}{l} + \frac{\pi^2}{l^2} q_1^2(t) \cos^2 \frac{\pi x}{l} + \frac{4\pi^2}{l^2} q_2(t)^2 \cos^2 \frac{2\pi x}{l} + \frac{2\pi^2}{l^2} (h - q_1(t)) q_2(t) \cos \frac{\pi x}{l} \cos \frac{2\pi x}{l} \right\} \quad (14)$$

Para facilitar os cálculos será admitida a hipótese de que as deformações podem ser tomadas pelo seu valor médio ($\bar{\varepsilon}(t)$). Assim têm-se a aproximação:

$$\int_0^l \varepsilon(x, t)^2 dx \cong \left[\frac{1}{l} \int_0^l \varepsilon(x, t) dx \right]^2 l \equiv \bar{\varepsilon}(t) l \quad (15)$$

Realizando a integral de $\varepsilon(x, t)$ chega-se:

$$\bar{\varepsilon}(t) = \frac{\pi^4}{16 l^4} \left[-2 h q_1(t) + q_1^2(t) + 4 q_2(t)^2 \right]^2 \quad (16)$$

A energia de deformação axial fica:

$$U_{axial} \approx \frac{EA}{2} \bar{\varepsilon}(t) l = \frac{EA \pi^4}{32 l^3} \left[-2 h q_1(t) + q_1^2(t) + 4 q_2(t)^2 \right]^2 \quad (17)$$

A curvatura k_x possa ser dada como a diferença entre a curvatura inicial e final, de modo que:

$$k_x(x, t) = -\frac{d^2(y_0 - y(t))}{dx^2} = \frac{d^2 y(t)}{dx^2} - \frac{d^2 y_0}{dx^2} \quad (18)$$

Considerando à adoção de duas coordenadas generalizadas a curvatura aproximada $\bar{k}_x$ passa a ser dada por:

$$\bar{k}_x(x, t) = \frac{d^2 \bar{y}(t)}{dx^2} - \frac{d^2 \bar{y}_0}{dx^2} \quad (19)$$

Onde as derivadas são:

$$\frac{d^2 \bar{y}}{dx^2} = -\frac{\pi^2}{l^2} (h - q_1(t)) \sin \frac{\pi x}{l} - \frac{4\pi^2}{l^2} q_2(t) \sin \frac{2\pi x}{l}, \quad \frac{d^2 y_0}{dx^2} = -\frac{\pi^2}{l^2} h \sin \frac{\pi x}{l} \quad (20)$$

Substituindo fica:

$$\bar{k}_x(x, t) = \frac{\pi^2}{l^2} q_1(t) \sin \frac{\pi x}{l} - \frac{4\pi^2}{l^2} q_2(t) \sin \frac{2\pi x}{l} \quad (21)$$

A curvatura elevada ao quadrado é dada por:

$$\bar{k}_x^2(x, t) = \frac{\pi^4}{l^4} q_1^2(t) \sin^2 \frac{\pi x}{l} + \frac{16 \pi^4}{l^4} q_2^2(t) \sin^2 \frac{2\pi x}{l} - \frac{8 \pi^4}{l^4} q_1(t) q_2(t) \sin \frac{\pi x}{l} \sin \frac{2\pi x}{l} \quad (22)$$

A energia de deformação a flexão fica:

$$U_{flexão} = \frac{EI}{2} \int_0^l k_x(x, t)^2 dx \quad (23)$$

$$U_{flexão} = \frac{\pi^4}{l^4} q_1^2(t) \sin^2 \frac{\pi x}{l} + \frac{16 \pi^4}{l^4} q_2^2(t) \sin^2 \frac{2\pi x}{l} - \frac{8 \pi^4}{l^4} q_1(t) q_2(t) \sin \frac{\pi x}{l} \sin \frac{2\pi x}{l} \quad (24)$$

Realizando a integral têm-se:

$$U_{flexão} = \frac{EI \pi^4}{4 l^3} (q_1^2(t) + 16 q_2^2(t)) \quad (25)$$

A função de forma aplicada na caracterização das forças externas pode ser dada por:

$$p(\bar{y}_0 - \bar{y}(t)) = p_0 \sin \frac{\pi x}{l} \left[h \sin \frac{\pi x}{l} - (h - q_1(t)) \sin \frac{\pi x}{l} - q_2(t) \sin \frac{2\pi x}{l} \right] \quad (26)$$

Simplificando, fica:

$$p(\bar{y}_0 - \bar{y}(t)) = p_0 \left[q_1(t) \sin^2 \frac{\pi x}{l} - q_2(t) \sin \frac{\pi x}{l} \sin \frac{2\pi x}{l} \right] \quad (27)$$

O trabalho das forças externas torna-se:

$$W = \int_0^l p(y_0 - y(t)) dx = p_0 \frac{l}{2} q_1(t) \quad (28)$$

Pode-se observar que não se realiza trabalho na segunda coordenada generalizada. A energia potencial total fica dada por:

$$V[q_1, q_2, p_0, t] = \frac{EA \pi^4}{32 l^3} [-2h q_1(t) + q_1^2(t) + 4 q_2^2(t)]^2 + \frac{EI \pi^4}{4 l^3} (q_1^2(t) + 16 q_2^2(t)) - p_0 \frac{l}{2} q_1(t) \quad (29)$$

Aplicando a condição de equilíbrio, i.e., derivada parcial da energia potencial total em relação à coordenada generalizada igual a zero, têm-se:

$$\frac{\partial V}{\partial q_1} = 0 \rightarrow \frac{EA \pi^4}{8 l^3} (-2h q_1 + q_1^2 + 4 q_2^2) (-h + q_1) + \frac{EI \pi^4}{2 l^3} q_1 = p_0 \frac{l}{2} \quad (30)$$

$$\frac{\partial V}{\partial q_2} = 0 \rightarrow \frac{EA \pi^4}{2 l^3} q_2 (-2h q_1 + q_1^2 + 4 q_2^2) + 8 \frac{EI \pi^4}{l^3} q_2 = 0 \quad (31)$$

Neste caso é interessante tornar o problema adimensional, podendo fazer:

$$a_1 = \frac{q_1}{h} \quad , \quad a_2 = \frac{q_2}{h} \quad , \quad \lambda = \frac{4 l^4}{\pi^4 E A h^3} p_0 \quad (32)$$

Assim as equações passam a:

$$4 \left(\frac{i}{h} \right)^2 a_1 + (a_1^2 - 2a_1 + 4a_2^2) (a_1 - 1) = \lambda \quad (33)$$

$$16 \left(\frac{i}{h} \right)^2 a_2 + (a_1^2 - 2a_1 + 4a_2^2) a_2 = 0 \quad (34)$$

A derivada parcial da energia potencial total em relação à segunda coordenada generalizada só pode ser zero caso:

$$\frac{\partial V}{\partial q_2} = 0 \text{ se } \begin{cases} a_2 = 0 \\ a_1^2 - 2a_1 + 4a_2^2 = -16 \left(\frac{i}{h} \right)^2 \end{cases} \quad (35)$$

A primeira condição, i.e., $a_2 = 0$, implica na derivada parcial da energia potencial total em relação à primeira coordenada generalizada:

$$\lambda = 4 \left(\frac{i}{h} \right)^2 a_1 + (a_1^2 - 2a_1) (a_1 - 1) \quad (36)$$

Que representa a trajetória de equilíbrio do ponto limite. Fazendo a derivada parcial de λ em relação à coordenada generalizada a_1 e igualando a zero, obtêm-se as duas coordenadas dos pontos limites.

$$\frac{\partial \lambda}{\partial a_1} = 0 \rightarrow a_1^2 - 2a_1 + \frac{2}{3} \left[1 + 2 \left(\frac{i}{h} \right)^2 \right] = 0 \quad (37)$$

$$a_1 = 1 \pm \sqrt{1 - \frac{2}{3} \left[1 + 2 \left(\frac{i}{h} \right)^2 \right]}$$

A carga crítica é encontrada substituindo as coordenadas na função λ .

$$\lambda = 4 \left(\frac{i}{h} \right)^2 a_1 + (a_1^2 - 2a_1) (a_1 - 1) \quad (38)$$

A segunda condição implica na derivada parcial da energia potencial total em relação à primeira coordenada generalizada:

$$\lambda = 12 \left(\frac{i}{h} \right)^2 \left(\frac{4}{3} - a_1 \right) \quad (39)$$

Que representa a trajetória de equilíbrio da bifurcação simétrica instável. A carga crítica da bifurcação simétrica instável é encontrada na intersecção das funções λ para $a_2 = 0$. Assim tem-se:

$$4 \left(\frac{i}{h} \right)^2 a_1 + (a_1^2 - 2a_1) (a_1 - 1) = 12 \left(\frac{i}{h} \right)^2 \left(\frac{4}{3} - a_1 \right) \quad (40)$$

Resolvendo esta equação encontra-se o valor da coordenada a_1 :

$$a_1 = 1 - \sqrt{1 - 16 \left(\frac{i}{h} \right)^2} \quad (41)$$

A carga crítica, obtida substituindo a coordenada a_1 na função de λ , fica:

$$\lambda = 12 \left(\frac{i}{h} \right)^2 \left(\frac{4}{3} - a_1 \right) = \left(\frac{i}{h} \right)^2 \left(4 + 12 \sqrt{1 - 16 \left(\frac{i}{h} \right)^2} \right) \quad (42)$$

Também pode ser expressa sem a adimensionalização:

$$p_0 = \frac{\pi^4 EI h}{l^4} \left(1 + 3 \sqrt{1 - 16 \left(\frac{i}{h} \right)^2} \right) \quad (43)$$

Dos valores obtidos pode-se plotar as curvas de p_0 em função do parâmetro i/h , que corresponde a uma relação entre rigidez axial, rigidez a flexão e abatimento da estrutura, como se pode observar no gráfico 1. A curva vermelha corresponde à instabilidade tipo ponto limite e a curva preta corresponde à bifurcação. Quando a curva preta intercepta a vermelha, i.e., quando a bifurcação passa a ser limitante, a configuração do ponto limite passa a ter a linha tracejada. Este gráfico foi estabelecido para uma relação i/l igual a 0,091, mas estas curvas variam conforme este parâmetro.

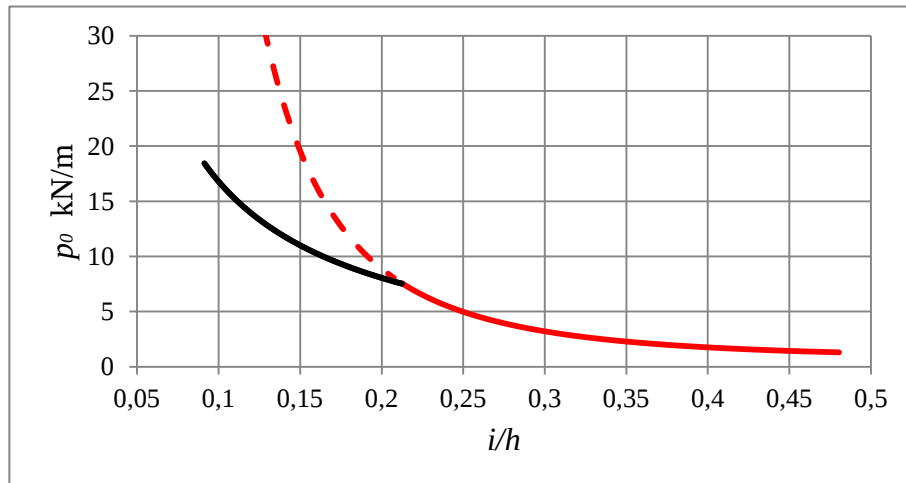


Gráfico 1: Gráfico parcial para localização dos modos de instabilidades do arco abatido.

Assim o gráfico 1 não revela a dependência do vão do arco, devendo para tanto observar o gráfico 2. Neste gráfico restringimo-nos a mostrar apenas os valores limites, de modo que pode-se observar a importância da relação i/l com os demais parâmetros.

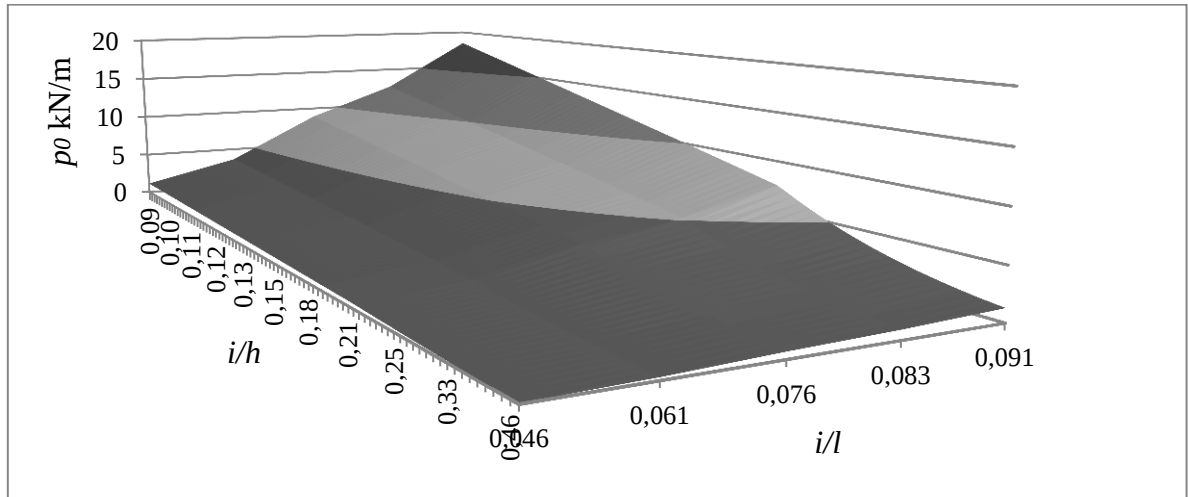


Gráfico 2: Gráfico para localização total dos modos de instabilidades do arco abatido.

Tomando como exemplo a relação i/l igual a 0,091 e para i/h igual a aproximadamente 0,22 pode-se determinar a trajetória de equilíbrio dada no gráfico 7. Novamente as trajetórias de equilíbrio em vermelho correspondem à instabilidade tipo ponto limite e a preta à bifurcação. Como era de se esperar pela análise do gráfico 1, o limitante é o ponto limite.

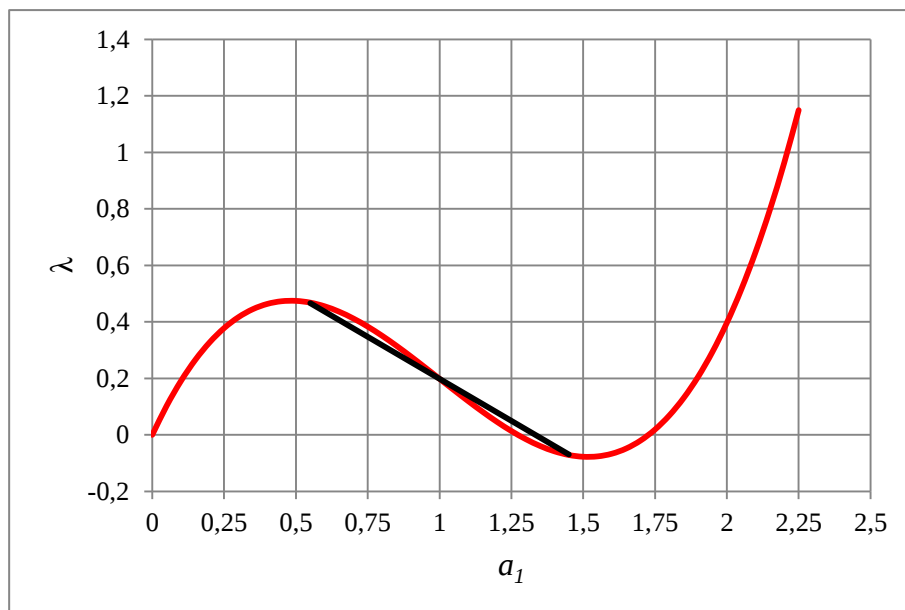


Gráfico 3: Trajetória de equilíbrio para arco abatido com $i/l = 0,091$ e $i/h = 0,22$.

Já para i/h igual a aproximadamente 0,16 com o mesmo valor de i/l o limitante passa a ser a bifurcação, como mostra a trajetória do gráfico 4.

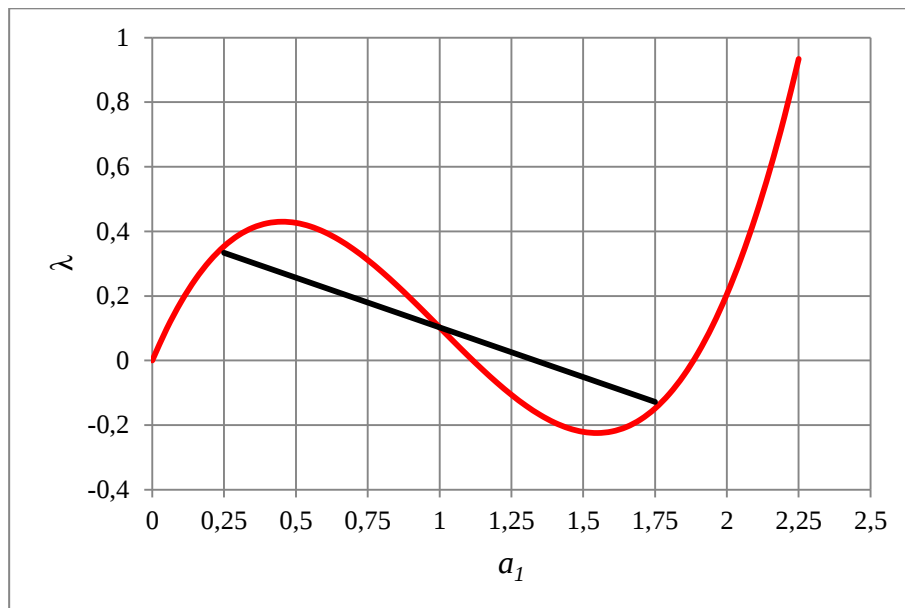


Gráfico 4: Trajetória de equilíbrio para arco abatido com $i/l = 0,091$ e $i/h = 0,16$.

A trajetória de equilíbrio da bifurcação, projetada no plano $\lambda - a_1$, pode ser visualizada no gráfico 5, fazendo a projeção no plano $a_1 - a_2$.

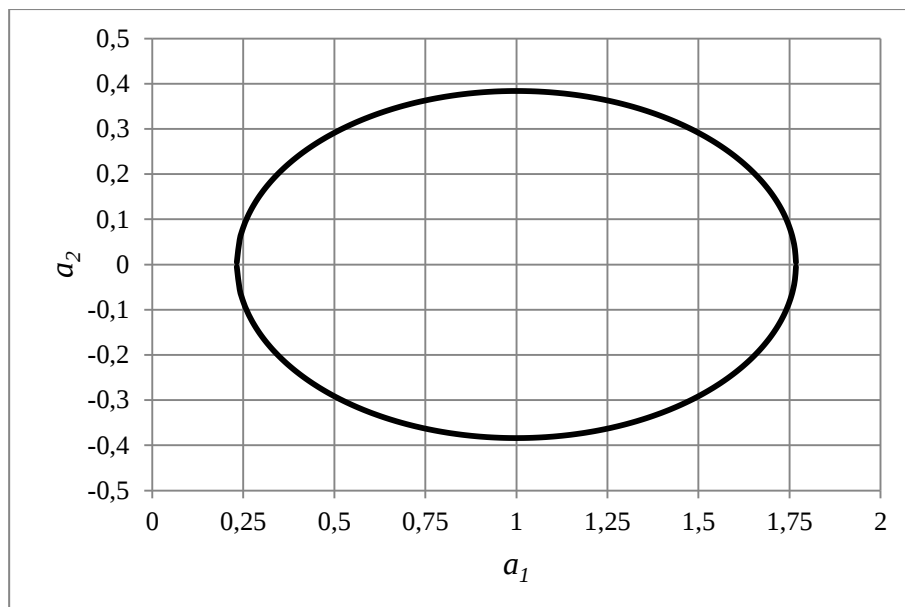


Gráfico 5: Trajetória de equilíbrio da bifurcação para arco abatido com $i/l = 0,091$ e $i/h = 0,16$.

Com o exposto pode-se caracterizar totalmente o comportamento de arcos abatidos. Evidentemente ele estará relacionado à sua esbeltez, caracterizada pelos valores de rigidez

axial e a flexão vão e altura inicial, no entanto considerando que se trata de arcos abatidos, imagina-se que o arco deva perder a estabilidade por bifurcação simétrica instável. Assim à medida que o carregamento atua o arco deforma de maneira simétrica até que, na carga de bifurcação, o arco passa para configuração oposta, i.e., muda sua concavidade.

Um alerta deve ser feito pelo fato da instabilidade sempre envolver mudança de concavidade poder-se-ia intuir que a adoção de apenas uma coordenada generalizada seria suficiente para determinar seu comportamento, o que nos levaria a resultados equivocados.

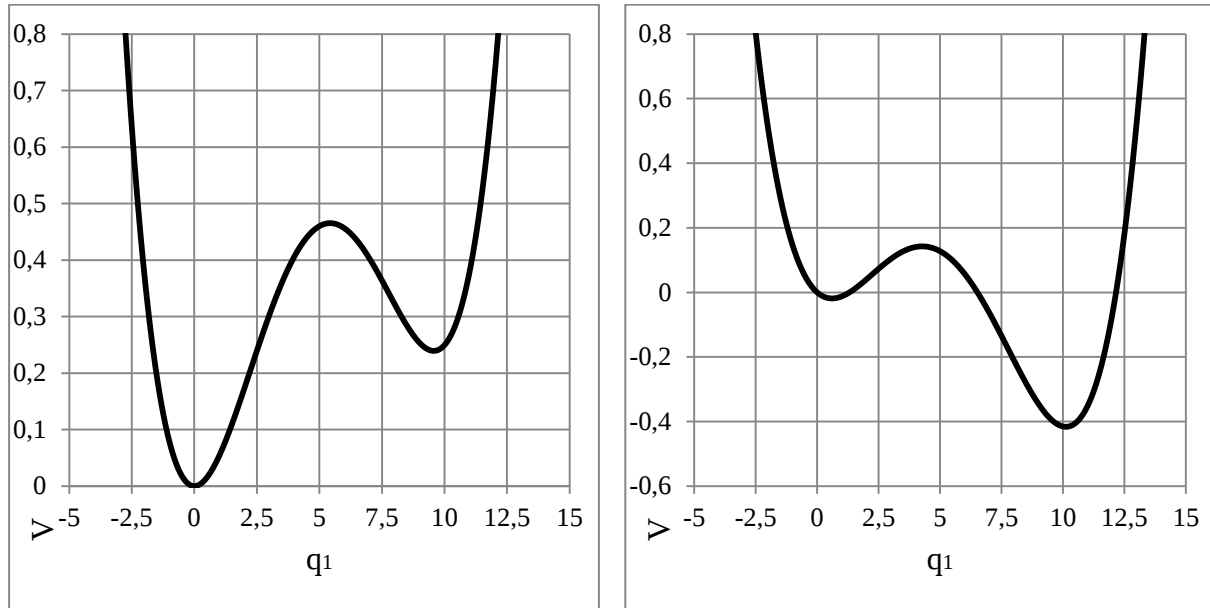


Gráfico 6: Energia potencial para carga estática igual a zero e igual à metade da carga crítica.

3 EQUAÇÃO DE MOVIMENTO

A equação de movimento pode ser deduzida utilizando o teorema de Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) + \frac{\partial V}{\partial q} = N \quad (44)$$

A energia cinética, considerando que a massa é constante ao longo do arco, é dada por:

$$T = \frac{1}{4} ml (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) \quad (45)$$

As equações do movimento, sem excitação exterior, ficam dadas por:

$$\frac{ml}{2} \ddot{q}_1 + c\dot{q}_1 + \left[\frac{f}{2} + (q_1^2 - 3hq_1 + 2h^2) \frac{e}{8} \right] q_1 + \left[(q_1q_2 - hq_2) \frac{e}{2} \right] q_2 + p_0 \frac{l}{2} = 0 \quad (46)$$

$$\frac{ml}{2} \ddot{q}_2 + c\dot{q}_2 + \left[(q_1q_2 - hq_2) \frac{e}{2} \right] q_1 + \left(8f + 2eq_2^2 - hq_1 \frac{e}{2} \right) q_2 = 0 \quad (47)$$

Onde:

$$e = \frac{\pi^4 EA}{l^3} \quad f = \frac{\pi^4 EI}{l^3} \quad (48)$$

4 VIBRAÇÃO LIVRE SIMÉTRICA AMORTECIDA

Considerando apenas o modo simétrico a equação de movimento para vibração livre amortecida passa a ser:

$$\ddot{q}_1 + 4\xi\omega_0\dot{q}_1 + \omega_0^2 q_1 + \alpha q_1^2 + \beta q_1^3 + p_0 \frac{1}{2m} = 0 \quad (49)$$

Onde:

$$\xi = \frac{c}{2ml\omega_0} \quad \omega_0^2 = \frac{2f+h^2e}{2ml} \quad \alpha = \frac{-3he}{4ml} \quad \beta = \frac{e}{4ml} \quad (50)$$

Tomando-se como exemplo o arco senoidal dado pelos valores abaixo pode-se obter numericamente, por integração da equação de movimento, a resposta do sistema.

Tabela 1: Dados arco senoidal.

	Valores kN,m
Área da Seção Transversal	0,1244
Inércia da Seção Transversal	0,0610
Módulo de Elasticidade	210000000
Vão	50
Flecha Inicial Central	5

Com estes dados a carga crítica tem valor de aproximadamente 3478 kN/m, com modo de instabilidade por bifurcação do equilíbrio. Como era esperado, o plano de fase apresenta dois centros e um ponto de sela.

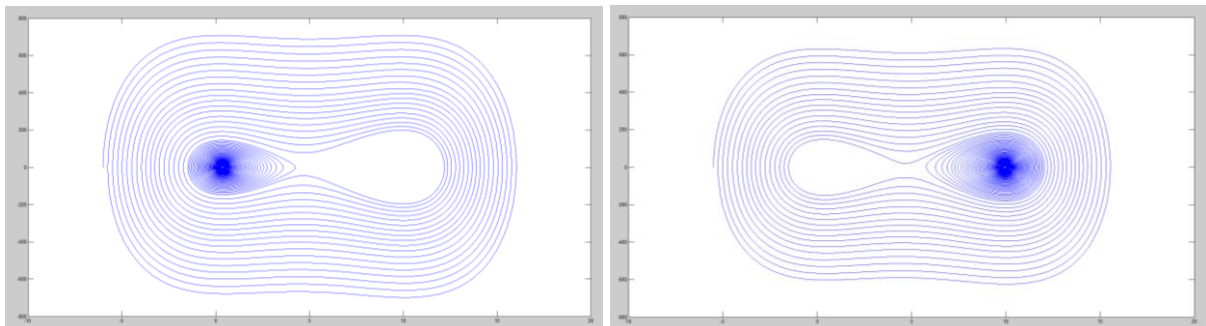


Figura 3: Plano de fase indicando a presença de dois centros e um ponto de sela.

O carregamento estático tem grande influência no comportamento do sistema. Na figura 4 pode-se observar como o carregamento maior, neste caso próximo da carga crítica, diminui a bacia de atração de um centro, indicando redução de rigidez do arco.

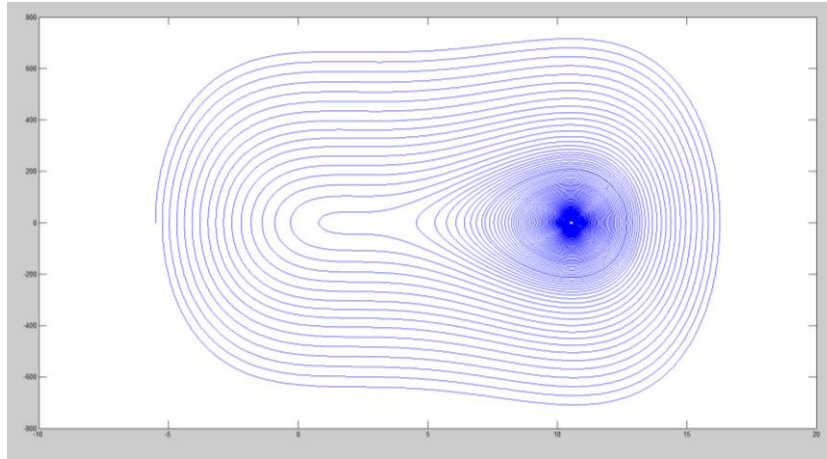


Figura 4: Plano de fase para carregamento estático próximo do crítico.

REFERENCES

- E. Mettler, Dynamic buckling, in Handbook of Engineering Mechanics (Edited by W. Fliigge). McGraw-Hill, New York (1962).*
- M. H. Lock, The snapping of a shallow sinusoidal arch under a step pressure load. Report No. TRD-469(5240-lo)-16, Air Force Systems Command, Los Angeles, California (1965).*
- J. S. Humphrey, On dynamic snap buckling of shallow arches. AIAA J. 4, 878-886 (1966).*
- C. S. Hsu, Stability of shallow arches against snap-through under time wise step loads. AIAA J. 35, 31-39(1969).*
- Malhotra, N., and Sri Namachchivaya, N. (1997). "Chaotic dynamics of shallow arch structures under 1:1 internal resonance." J. Engrg. Mech., ASCE, 123(6), 612-619.*
- Breslavsky I., Avramov K.V., Mikhlin Yu., Kochurov R. (2008) Nonlinear modes of snap-through motions of a shallow arch. J. of Sound and Vibr. 311 297-313.*