



DESENVOLVIMENTO DE UMA INTERFACE GRÁFICA PARA VISUALIZAÇÃO DOS RESULTADOS DE ANÁLISE ESTRUTURAL DE SISTEMAS RETICULADOS ESPACIAIS

Amilton R. da Silva

amilton@em.ufop.br

Luís E. S. Dias

luis_civil12@yahoo.com.br

Lucas B. Silva

Programa de Pós Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Ouro Preto
Campus Universitário s/n, Morro do Cruzeiro, 35400-000, Ouro Preto, MG, Brasil

Resumo: Estruturas de treliças de cobertura, torres, pórticos em geral, entre outras estruturas, são simuladas em análise estrutural por elementos unidimensionais de barra. Essa aproximação é tão mais precisa quanto maior a relação entre o comprimento do elemento e as dimensões da sua seção transversal. Ela torna a formulação mais simples e reduz consideravelmente o custo computacional da análise estrutural, principalmente para problemas de grande porte. O principal objetivo desse trabalho é desenvolver um software para análise gráfica dos esforços e deslocamentos de estruturas planas ou espaciais formadas por elementos de barras. Em uma etapa anterior desse projeto foi desenvolvido o pré-processador gráfico, que consiste em desenvolver uma interação entre o usuário e o programa de forma a otimizar a entrada de dados. Nessa etapa do projeto os autores focaram no desenvolvimento do pós-processador gráfico, ou seja, visualização dos diagramas de esforços e da deformada da estrutura, bem como a definição das equações analíticas desses esforços e deformada ao longo do eixo da barra, fornecendo os seus extremos relativos nos intervalos em que são definidas. A verificação do programa implementado é baseada na análise dos resultados de vários exemplos de estruturas espaciais formadas por elementos de barra, alguns desses são apresentados nesse trabalho.

Palavras-chave: Método dos deslocamentos, Sistemas reticulados, Análise gráfica.

1 INTRODUÇÃO

Estruturas formadas por elementos de barras são frequentes na prática da construção civil, por exemplo: treliças de cobertura, plana ou espacial; análise conjunta de pilares e vigas em edificações; torres; pórticos em geral, entre outras. A Fig. 1 abaixo ilustra algumas dessas estruturas. Os elementos dessas estruturas têm as dimensões da sua seção transversal bem menor que o seu comprimento, por isso, são geralmente simulados numericamente por elementos unidimensionais de barras. Tal aproximação torna a formulação mais simples e reduz consideravelmente o custo computacional da análise estrutural, principalmente para problemas de grande porte.



Figura 1. Estruturas formadas por elementos de barra

A determinação dos esforços e deslocamentos gerados pelas ações atuantes na estrutura é chamada de análise estrutural. Na análise estrutural deve ser considerado o efeito de todas as ações que tem chance não desprezível de atuarem ao mesmo tempo na estrutura, por exemplo, ações de vento, peso próprio, variação de temperatura, entre outros. Essas ações devem ser combinadas de forma a produzir a situação mais desfavorável para a estrutura como um todo, ou um elemento específico dela. Métodos não computacionais de análise estrutural demandam em geral um tempo excessivo de análise, tornando-os inviáveis para a maioria dos problemas práticos. Esses fatores motivam o emprego de softwares para análise de estruturas tornando essa linha de pesquisa um problema atual e relevante.

Na atualidade o engenheiro está em contato permanente com o uso e desenvolvimento de ferramentas computacionais para solução de seus problemas diversos, nesse caso específico, a análise estrutural. No caso de estruturas formadas por elementos de barras, também conhecida por estruturas reticuladas, métodos de análise estrutural como o método das forças, método da rigidez ou deslocamentos (para maiores detalhes sobre esses métodos consultar: Gere e Weaver, 1987; Gere e Goodno, 2010; Martha, 2000; Moreira, 1977; Soriano e Lima, 2006 e Süsskind, 1981), são bastante utilizados na implementação de programas de computadores para análise de estruturas de barras.

O principal objetivo desse trabalho é desenvolver um software para análise de esforços e deslocamentos de estruturas planas ou espaciais formadas por elementos de barras com pré e

pós-processamento gráfico. A parte de pré-processamento gráfico, que consiste em desenvolver uma interação entre o usuário e o programa de forma a otimizar a entrada de dados e permite a alteração ou ampliação de uma estrutura previamente analisada com maior agilidade e controle, já foi desenvolvida em uma etapa anterior (Silva e Drumond, 2012). Nessa etapa do projeto os autores focaram no desenvolvimento do pós-processamento gráfico, ou seja, visualização dos diagramas de esforços e da deformada da estrutura, e na implementação de algumas funcionalidades a mais do programa, como: permissão da liberação de graus de liberdade da barra e imposição de deslocamentos prescritos a um nó qualquer da estrutura.

O software desenvolvido nesse trabalho permite, além da visualização gráfica dos esforços solicitantes e da deformada, a visualização das equações das variações dos esforços e deformada ao longo do eixo da barra, fornecendo os extremos relativos dessas equações nos intervalos em que são definidas.

2 METODOLOGIA

A metodologia de trabalho empregada na implementação computacional do programa desenvolvido nesse trabalho envolve a definição de uma estrutura básica de POO (Programação Orientada para Objetos), consistindo em uma hierarquia de classes responsáveis por cada faceta do sistema a ser desenvolvido (Silva Filho, 2010). A partir dessa definição pode-se determinar os métodos de cada classe e desenvolver o código utilizando a linguagem de programação C++, que tem um nível de padronização que permite utilização em diversas plataformas e compiladores (MS-Windows, Linux, vários sistemas operacionais do tipo UNIX), assegurando sua portabilidade. No desenvolvimento do código computacional e na geração da parte gráfica foi utilizado o software Visual Studio Express 2010 (disponível em <http://www.microsoft.com/visualstudio/en-us/products/2010-editions/express>).

Obtidos os esforços e deslocamentos nas extremidades das barras (análise estrutural, etapa anterior desse projeto, ver Silva e Drumond, 2012) podem ser definidas as expressões analíticas das variações dos esforços e deslocamentos ao longo da barra. Nos itens seguintes dessa seção é apresentada a forma em que essas expressões são obtidas.

2.1 Definição das expressões analítica dos esforços solicitantes nas barras

Obtidos os esforços nas extremidades da barra e dados os carregamentos atuantes ao longo do seu eixo, pode-se determinar as equações dos diagramas de esforços solicitantes na barra. Para um sistema reticulado espacial os esforços solicitantes são: flexão no plano xy , flexão no plano xz , cortante no plano xy , cortante no plano xz , força normal e torção. O eixo x é sempre tomado como o eixo coincidente com o eixo da barra, e os eixos y e z são os eixos principais de inércia da seção transversal da barra, portanto, perpendiculares entre si e em relação ao eixo x . Ao entrar com os dados da estrutura deve-se ficar atento à definição dos eixos locais de cada barra, o exemplo 1 na seção 3 ilustra o erro que se pode cometer se os eixos locais não forem corretamente definidos.

A seguir são definidas as expressões analíticas dos esforços para os diferentes tipos de carregamentos que o *software* desenvolvido nesse trabalho permite ser imposto ao longo do eixo da barra. Na maioria dos carregamentos abaixo esses podem ser aplicados nos planos xy e xz . As expressões são definidas para o carregamento atuando no plano xy , de forma análoga podem ser obtidas essas expressões para o plano xz .

Os esforços solicitantes gerados pelos carregamentos nos nós serão considerados separados dos esforços atuantes ao longo do eixo da barra. Dessa forma, para os diferentes carregamentos analisados abaixo, no intervalo $0 \leq x \leq a$ todos os esforços são nulos.

Carregamento linearmente distribuído

A Fig. 2 ilustra o caso geral desse carregamento. Nessa figura, $0 \leq a < L$ e $0 < b \leq L$, onde L é o comprimento da barra, q_1 e q_2 devem ter os mesmos sinais.

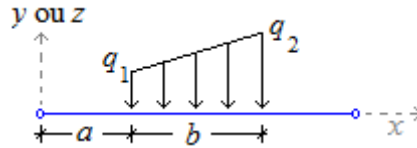


Figura 2. Carregamento linearmente distribuído

Para o intervalo $a \leq x \leq a+b$, tem-se:

$$M(x) = -\frac{q_1(x-a)^2}{2} - \frac{(q_2 - q_1)(x-a)^3}{6b}, \quad Q(x) = -q_1(x-a) - \frac{(q_2 - q_1)(x-a)^2}{2b}$$

e

$$T(x) = N(x) = 0.$$

Para o intervalo $a+b \leq x \leq L$, tem-se:

$$M(x) = -\frac{(q_1 + q_2)b}{2}(x-a) + \frac{(q_1 + 2q_2)b^2}{6}, \quad Q(x) = -\frac{(q_2 + q_1)b}{2}$$

e $T(x) = N(x) = 0$.

Carregamento uniformemente distribuído

A Fig. 3 a seguir ilustra o caso geral desse carregamento. Nessa figura, $0 \leq a < L$ e $0 < b \leq L$, onde L é o comprimento da barra.

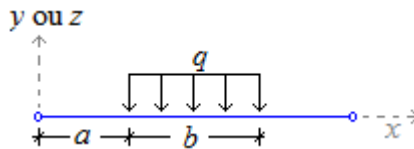


Figura 3. Carregamento uniformemente distribuído

Para o intervalo $a \leq x \leq a+b$, tem-se: $M(x) = -\frac{q}{2}(x-a)^2$, $Q(x) = -q(x-a)$ e $T(x) = N(x) = 0$.

Para o intervalo $a+b \leq x \leq L$, tem-se: $M(x) = -qb(x-a-\frac{b}{2})$, $Q(x) = -qb$ e $T(x) = N(x) = 0$.

Carregamento concentrado cortante

A Fig. 4 a seguir ilustra o caso geral desse carregamento. Nessa figura, $0 < a < L$, onde L é o comprimento da barra.

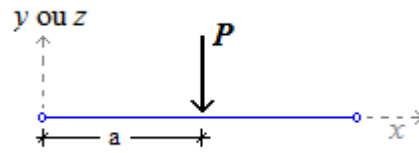


Figura 4. Carregamento concentrado cortante

Para o intervalo $a \leq x \leq L$, tem-se: $M(x) = -P(x - a)$, $Q(x) = -P$ e $T(x) = N(x) = 0$.

Carregamento concentrado de flexão

A Fig. 5 a seguir ilustra o caso geral desse carregamento. Nessa figura, $0 < a < L$, onde L é o comprimento da barra.

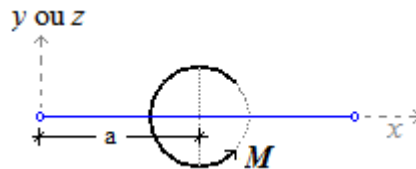


Figura 5. Carregamento concentrado de flexão

Para o intervalo $a \leq x \leq L$, tem-se: $M(x) = -M$ e $Q(x) = T(x) = N(x) = 0$.

Carregamento concentrado axial

A Fig. 6 a seguir ilustra o caso geral desse carregamento. Nessa figura, $0 < a < L$, onde L é o comprimento da barra.

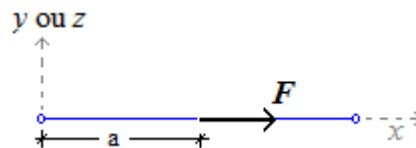


Figura 6. Carregamento concentrado axial

Para o intervalo $a \leq x \leq L$, tem-se: $M(x) = Q(x) = T(x) = 0$ e $N(x) = F$.

Carregamento concentrado de torção

A Fig. 7 a seguir ilustra o caso geral desse carregamento. Nessa figura, $0 < a < L$, onde L é o comprimento da barra.

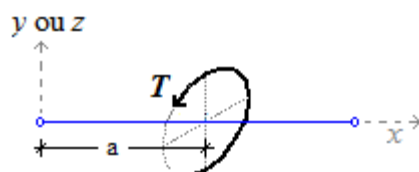


Figura 7. Carregamento concentrado de torção

Para o intervalo $a \leq x \leq L$, tem-se: $M(x) = Q(x) = N(x) = 0$ e $T(x) = T$.

Carregamento uniformemente distribuído de torção

A Fig. 8 a seguir ilustra o caso geral desse carregamento. Nessa figura, $0 \leq a < L$ e $0 < b \leq L$, onde L é o comprimento da barra.

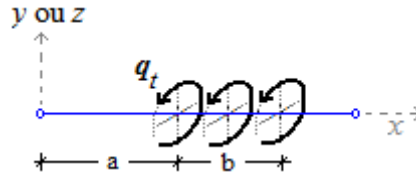


Figura 8. Carregamento uniformemente distribuído de torção

Para o intervalo $a \leq x \leq a+b$, tem-se: $M(x) = Q(x) = N(x) = 0$ e $T(x) = q_t(x-a)$.

Para o intervalo $a+b \leq x \leq L$, tem-se: $M(x) = Q(x) = N(x) = 0$ e $T(x) = q_t b$.

Carregamento uniformemente distribuído axial

A Fig. 9 a seguir ilustra o caso geral desse carregamento. Nessa figura, $0 \leq a < L$ e $0 < b \leq L$, onde L é o comprimento da barra.

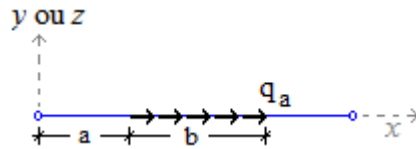


Figura 9. Carregamento uniformemente distribuído axial

Para o intervalo $a \leq x \leq a+b$, tem-se: $M(x) = Q(x) = T(x) = 0$ e $N(x) = q_a(x-a)$.

Para o intervalo $a+b \leq x \leq L$, tem-se: $M(x) = Q(x) = T(x) = 0$ e $N(x) = q_a b$.

2.2 Definição da deformada elástica da estrutura

Nessa seção é apresentado o método utilizado para obter a equação da linha elástica em um elemento qualquer da estrutura. O *software* desenvolvido se aplica a estruturas reticuladas espaciais considerando carregamentos atuantes nos planos formados pelos eixos principais da seção transversal da barra e seu eixo axial. Sendo assim, a barra pode flexionar no plano xy e no plano xz , sofrer deslocamentos relativos de torção e axial ao longo do eixo x . Os eixos x , y e z são, respectivamente, o eixo coincidente com o eixo da barra e os eixos principais de inércia da seção transversal da barra, portanto, perpendiculares entre si.

Deslocamento relativo axial ao longo da barra

Na entrada de dados do programa desenvolvido nesse trabalho permite-se a entrada de um número qualquer de carregamentos atuando ao longo do eixo da barra. Dos diferentes tipos de carregamentos permitidos apenas dois geram deslocamentos relativos axiais ao longo do eixo da barra. A Fig. 10 abaixo ilustra esses dois tipos de carregamentos.

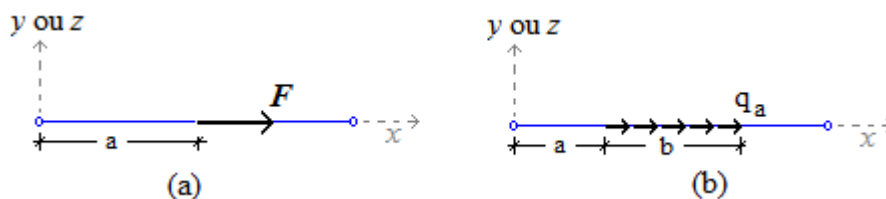


Figura 10. (a) carregamento axial concentrado (b) carregamento axial distribuído

De acordo com os carregamentos mostrados na Fig. 10 acima, o diagrama de esforço normal será constante ou linear em um trecho qualquer da barra. Como se admite uma entrada qualquer desses tipos de carregamento ao longo do elemento, então o diagrama de esforço normal na barra será dado de uma forma geral pela expressão a seguir:

$$\begin{aligned} N_1(x) &= a_1x + b_1 \text{ para } 0 \leq x \leq x_1 \\ N_2(x) &= a_2x + b_2 \text{ para } x_1 \leq x \leq x_2 \\ &\dots \\ N_n(x) &= a_nx + b_n \text{ para } x_{n-1} \leq x \leq L \end{aligned} \quad (1)$$

Considerando rigidez axial EA constante ao longo do elemento, o deslocamento em um ponto da barra em relação à extremidade esquerda dessa, é dado por:

$$u(x) = \frac{1}{EA} \left[\int_0^{x_1} N_1(x) dx + \int_{x_1}^{x_2} N_2(x) dx + \dots + \int_{x_{m-1}}^x N_m(x) dx \right] \quad (2)$$

Substituindo a expressão de $N_i(x)$ na equação acima, chega-se a Eq. (3) dada abaixo para se determinar o deslocamento relativo em um determinado ponto do elemento.

$$u(x) = \frac{1}{EA} \left[\sum_{i=1}^{m-1} \left[\frac{1}{2} a_i (x_i^2 - x_{i-1}^2) + b_i (x_i - x_{i-1}) \right] + \frac{1}{2} a_m (x^2 - x_{m-1}^2) + b_m (x - x_{m-1}) \right] \quad (3)$$

Na Eq. (3) acima $x_0 = 0$ os parâmetros a_i e b_i são definidos a partir da análise dos esforços solicitantes no elemento, como visto no item anterior dessa seção. Já os parâmetros x_i são definidos a partir dos carregamentos atribuídos a cada elemento. Para determinar o deslocamento axial absoluto do ponto deve-se somar à função 3 o deslocamento axial do nó da extremidade da barra.

Deslocamento relativo de torção ao longo da barra

Dos diferentes tipos de carregamentos permitidos pelo *software* desenvolvido nesse trabalho apenas dois geram deslocamentos relativos de torção ao longo da barra. A Fig. 11 abaixo ilustra esses dois tipos de carregamentos.

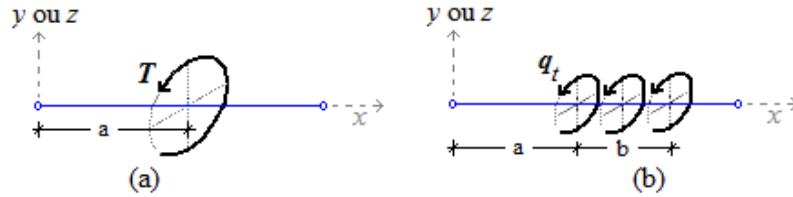


Figura 11. (a) carregamento de torção concentrado (b) carregamento de torção distribuído

De acordo com os carregamentos mostrados na Fig. 11 acima o diagrama de esforço de torção será constante ou linear em um trecho qualquer da barra. Sendo assim, de forma análoga ao item anterior, o deslocamento relativo de torção em um ponto da barra em relação à extremidade esquerda dessa, é dado por:

$$\theta_x(x) = \frac{1}{GJ} \left[\sum_{i=1}^{m-1} \left[\frac{1}{2} a_i (x_i^2 - x_{i-1}^2) + b_i (x_i - x_{i-1}) \right] + \frac{1}{2} a_m (x^2 - x_{m-1}^2) + b_m (x - x_{m-1}) \right] \quad (4)$$

Na Eq. (4) acima foi considerado rigidez de torção GJ constante ao longo do elemento e desprezado o efeito de empenamento da seção. Para determinar o deslocamento axial absoluto do ponto deve-se somar à função 4 a torção do nó da extremidade da barra.

Flexão da barra

A flexão da barra ocorre de forma independente nos planos formados pelos eixos principais de inércia e o eixo axial da barra. A seguir será definida a expressão da deformada da linha elástica considerando os esforços atuantes no plano xy , sendo análogo o raciocínio para o plano xz . Dos diferentes tipos de carregamentos permitidos na entrada de dados do programa desenvolvido nesse trabalho quatro deles geram flexão ao longo da barra. A Fig. 12 abaixo ilustra esses carregamentos.

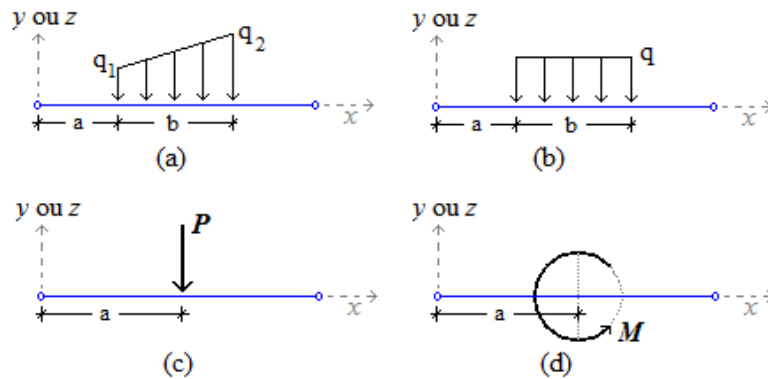


Figura 12. Carregamento (a) distribuído linearmente, (b) distribuído uniformemente, (c) concentrado cortante e (d) concentrado de flexão

De acordo com os carregamentos mostrados na Fig. 12 acima o diagrama de esforço de flexão será no máximo um polinômio de grau três em um trecho qualquer da barra. Como permite-se uma entrada qualquer desses tipos de carregamento ao longo do elemento, então o diagrama de flexão será dado de uma forma geral pela expressão a seguir:

$$M_{xy1}(x) = a_1 x^3 + b_1 x^2 + c_1 x + d_1 \quad \text{para } 0 \leq x \leq x_1$$

$$\begin{aligned}
 M_{xy2}(x) &= a_2x^3 + b_2x^2 + c_2x + d_2 \text{ para } x_1 \leq x \leq x_2 \\
 &\dots \\
 M_{xyn}(x) &= a_nx^3 + b_nx^2 + c_nx + d_n \text{ para } x_{n-1} \leq x \leq L
 \end{aligned} \tag{5}$$

Sendo $v(x)$ a função que descreve o deslocamento da barra no plano xy , e considerando pequenas mudanças de configurações ($v'(x)$ muito menor que a unidade) e desprezando a contribuição do cortante na deformada de flexão, tem-se a Eq. (6) abaixo para a deformada no plano xy devido à flexão na barra.

$$EI_z v'' = -M_{xy}(x) \tag{6}$$

Como visto na Eq. (5), o momento M_{xy} que aparece na Eq. (6) é definido por trechos ao longo do comprimento da barra. Assim deve-se resolver a equação diferencial trecho a trecho, começando pela extremidade da barra onde são conhecidos os deslocamentos nodais. Definindo v_1 e θ_{z1} como sendo, respectivamente, o deslocamento de translação em y e rotação em z da extremidade da barra e considerando a rigidez à flexão EI_z constante ao longo da barra, têm-se as equações abaixo para a deformada no plano xy .

$$v(x) = -\frac{1}{EI_z} \left[\frac{a_i x^5}{20} + \frac{b_i x^4}{12} + \frac{c_i x^3}{6} + \frac{d_i x^2}{2} \right] - C_1^i x - C_2^i \text{ com } x_{i-1} \leq x \leq x_i \tag{7}$$

Na Eq. (7), i varia de 1 até n (número de trechos na barra) com $x_0 = 0$ e $x_n = L$. As constantes C_1^1 e C_2^1 do primeiro trecho são, respectivamente, θ_{z1} e v_1 . Já as constantes C_1^i e C_2^i do segundo trecho em diante dependem das constantes dos trechos anteriores e são dadas pelas Eq. (8) e Eq. (9) abaixo. Nessas expressões i varia de 2 até o número de trechos na barra.

$$\begin{aligned}
 C_1^i &= \frac{1}{EI_z} \left[\frac{(a_{i-1} - a_i)x_{i-1}^4}{4} + \frac{(b_{i-1} - b_i)x_{i-1}^3}{3} + \frac{(c_{i-1} - c_i)x_{i-1}^2}{2} + (d_{i-1} - d_i)x_{i-1} \right] + \\
 &\hspace{15em} + C_1^{i-1}
 \end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned}
 C_2^i &= \frac{1}{EI_z} \left[\frac{(a_{i-1} - a_i)x_{i-1}^5}{20} + \frac{(b_{i-1} - b_i)x_{i-1}^4}{12} + \frac{(c_{i-1} - c_i)x_{i-1}^3}{6} + \frac{(d_{i-1} - d_i)x_{i-1}^2}{2} \right] + \\
 &\hspace{10em} + (C_1^{i-1} - C_1^i)x_{i-1} + C_2^{i-1}
 \end{aligned} \tag{9}$$

Nas Eqs. (7) a (9), os parâmetros a_i , b_i , c_i e d_i são definidos a partir da análise dos esforços de momentos no plano xy do elemento, como no item anterior dessa seção. Já os parâmetros x_i são definidos a partir dos carregamentos atribuídos a cada elemento. O deslocamento obtido pela Eq. (7) já é o deslocamento absoluto, uma vez que a equação já leva em conta os deslocamentos θ_{z1} e v_1 da extremidade da barra.

Para a flexão no plano xz o problema é análogo diferenciando apenas na situação de que nesse plano momento positivo gera curvatura positiva, ou seja, sendo $w(x)$ a função que descreve o deslocamento da barra no plano xz , considerando pequenas mudanças de configurações ($w'(x)$ muito menor que a unidade) e desprezando a contribuição do cortante na deformada de flexão, tem-se a Eq. (10) abaixo para a deformada no plano xz devido à flexão na barra.

$$EI_y w'' = M_{xz}(x) \quad (10)$$

3 EXEMPLOS E RESULTADOS

Nessa seção serão apresentados alguns resultados de diagramas de esforços solicitantes e deformadas de estruturas reticuladas espaciais obtidos pelo software desenvolvido nesse trabalho. Na entrada de dados para cada problema a interface gráfica do software mostrou-se eficiente tornando o processo seguro e ágil. Os exemplos têm a finalidade de mostrar características importantes do software em relação à apresentação e visualização dos esforços, como, por exemplo, apresentação das equações que definem a variação de esforços e deformadas ao longo do eixo da barra, bem como de seus valores máximos.

3.1 Exemplo 1

A definição do sistema local de referência no programa desenvolvido nesse trabalho é feita na entrada de dados de cada barra definindo a componente na direção global z (ou x) do vetor unitário na direção y' do sistema de referência local. A Fig. 13 abaixo mostra a caixa dialogo para entrada dessa componente, e também a entrada das coordenadas dos nós da barra, índice do material e da seção transversal.

Observa-se na Fig. 13 os dados de entrada de uma barra com um nó na origem do sistema de referência global e o outro nó no ponto de coordenada (4, 4, 4); O eixo x' do sistema local de referência é definido coincidindo com o eixo da barra. Já o eixo y' é determinado usando a condição de ortogonalidade com o eixo x' e tamanho unitário. Essas condições não são suficientes para definir apenas um vetor para y' , dessa forma o usuário deve entrar com o valor da componente de y' na direção do eixo global z . No caso particular de barras na direção do eixo global z , a componente de entrada deve ser na direção do eixo global x , já que para essas a componente em z é nula. Para maiores detalhes de como é obtido o sistema de eixos de referência local ver Silva e Drumond (2012).

Figura 13. Caixa de diálogo de entrada de barras

A Fig. 14 abaixo mostra uma estrutura formada por duas barras de 4m de comprimento e seção transversal dada por cantoneira de abas iguais de 6cm e 0,54cm de espessura, submetida a uma força concentrada perpendicular ao plano formado pelas duas barras. Como podem ser observados na figura, os eixos principais de inércia da seção transversal são inclinados em relação aos eixos do sistema global de referência. Dada à importância da definição correta do sistema de referência local de cada barra, a seguir será descrito as etapas de entrada de coordenadas de barra e definição dos eixos locais de referência das duas barras da estrutura mostrada na Fig. 14.

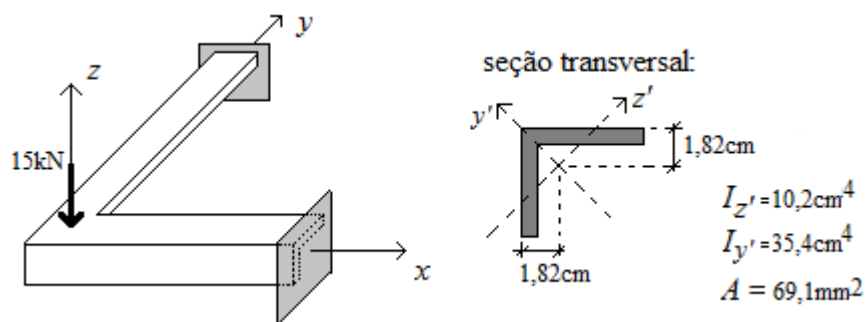


Figura 14. Definição do sistema local de referência

A barra 1 da estrutura da Fig. 14 terá os nós definidos pelos pontos de coordenadas (0,0,0) e (4,0,0). Logo, seu eixo local x' tem a direção da barra e o sentido do nó 1 (0,0,0) ao nó 2 (4,0,0). Para a definição do eixo local y' deve ser fornecida a componente de y' na direção do eixo z global. Como o ângulo formado por y' e z é de 45° , como pode ser observado na Fig. 14, e a projeção de y' em z é positiva, então o valor a ser fornecido é dado pelo cosseno de 45° , ou seja, $b_z = 0,707$.

A barra 2 da estrutura da Fig. 14 terá os nós definidos pelos pontos de coordenadas (0,0,0) e (0,4,0). Logo, seu eixo local x' tem a direção da barra e o sentido do nó 1 (0,0,0) ao nó 3 (0,4,0). De forma análoga à barra 1, o eixo local y' é definido fornecendo o valor de cosseno de 45° para a componente de y' sobre z , ou seja, $b_z = 0,707$. A Fig. 15 abaixo mostra a

estrutura gerada pelo *software* após a entrada de dados identificando a numeração dos nós e barra.

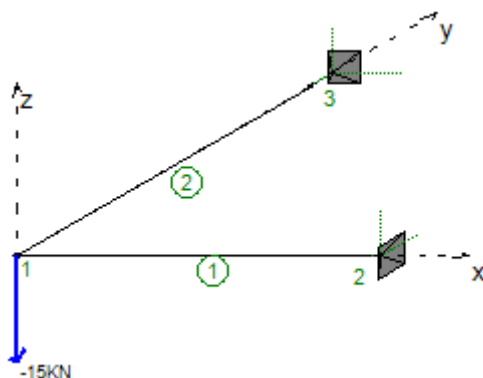


Figura 15. Imagem da estrutura de barras gerada pelo *software*

De acordo com a estrutura da Fig. 14, se os eixos principais de inércia coincidissem com os eixos globais (por exemplo, a seção transversal fosse circular), a barra 1 estaria submetida apenas momento e cortante no plano xz e a barra 2 momento e cortante no plano yz . Como pode ser observado na Fig. 16, as barras da estrutura da Fig. 14 estão sujeitas a momentos nos dois planos principais de inércia. A Fig. 16 mostra em destaque a barra 1 identificando os seus eixos de referência local.

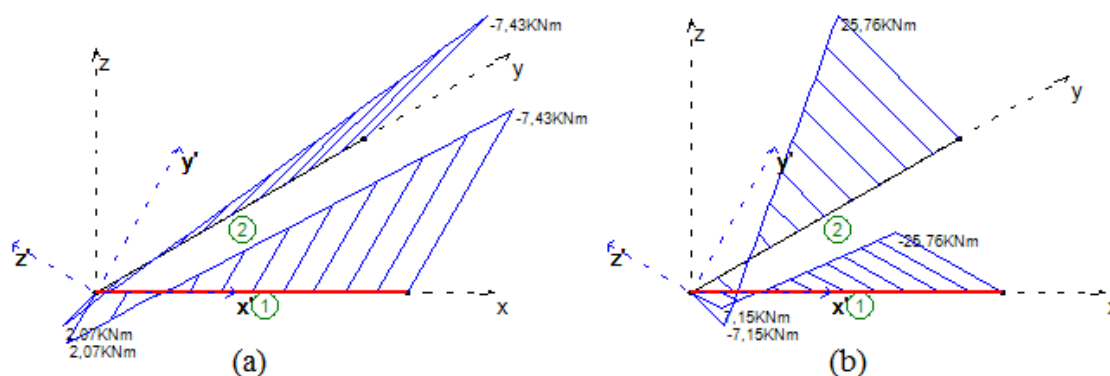


Figura 16. Diagrama de momentos nos planos dos eixos principais (a) $x'y'$ e (b) $x'z'$

O *software* desenvolvido nesse trabalho permite selecionar uma barra da estrutura e obter os seus diagramas de esforços e as expressões analíticas desses. A Fig. 17 abaixo mostra os diagramas de momento em xy e xz local para a barra 1 da estrutura da Fig. 14.

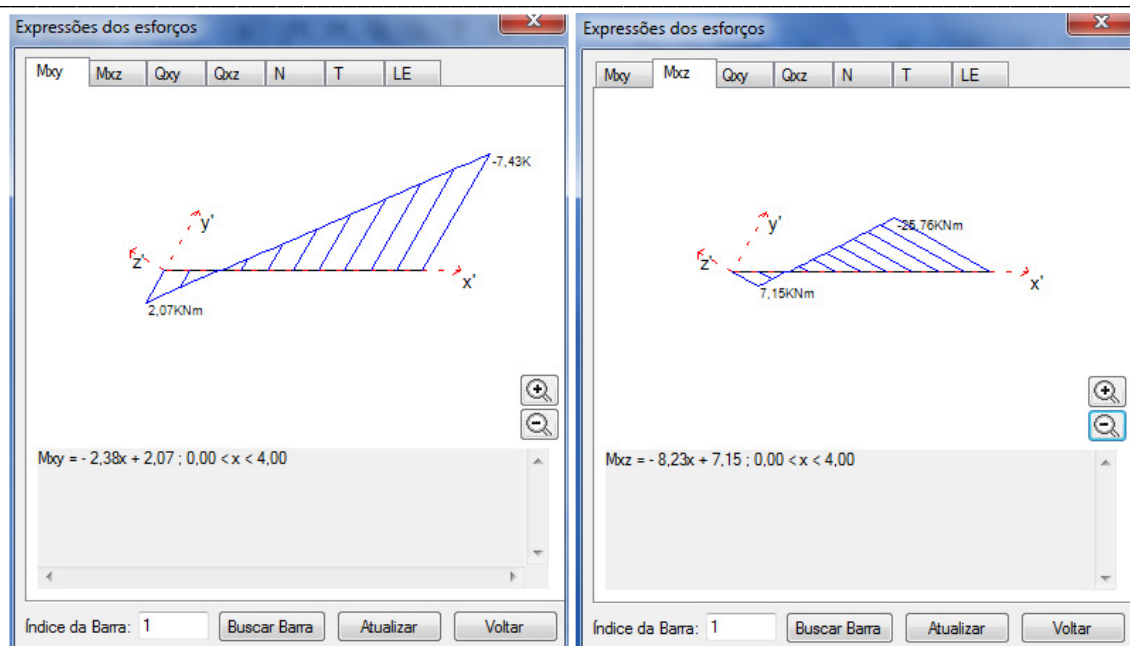


Figura 17. Diagrama de esforços para uma barra específica

A Fig. 18 mostra o diagrama de momentos nos planos $x'y'$ e $x'z'$ para o mesmo problema da Fig. 14 considerando agora que os eixos principais de inércia são coincidentes com os eixos globais. Para esse problema as barras têm as mesmas coordenadas, mesmas propriedades geométricas e carregamento, alterando apenas a projeção de y' sobre z , nesse caso $b_z = 0$ para as duas barras. A Fig. 18 mostra o erro que seria cometido na análise da estrutura da Fig. 14 caso os eixos locais não fossem definidos de forma correta.

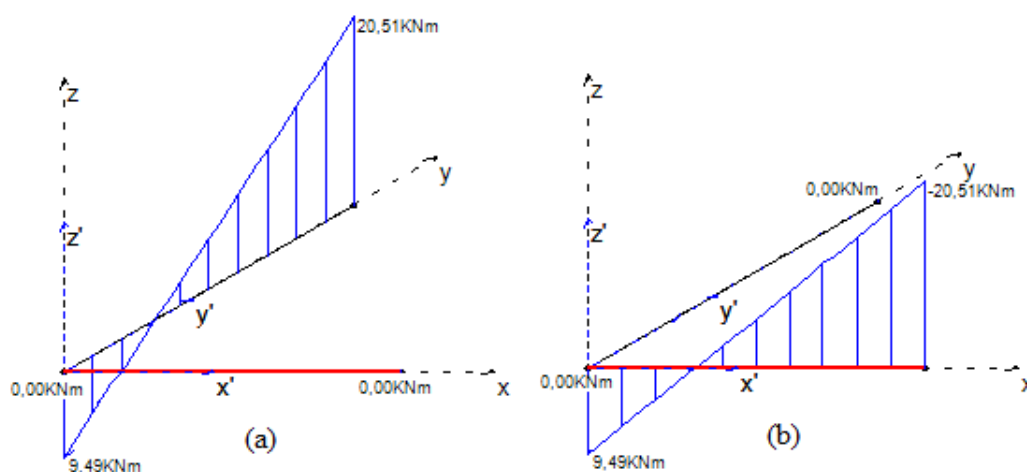


Figura 18. Diagrama de momentos nos planos (a) $x'y'$ e (b) $x'z'$

3.2 Exemplo 2

A estrutura reticulada espacial da Fig. 19 foi analisada por Silva e Drumond (2012), onde os autores apresentam os esforços que surgem na estrutura obtidos pelo método dos deslocamentos sem utilizar esforço computacional, e pelo mesmo *software* usado nesse trabalho. Naquele momento o *software* não analisava de forma gráfica os resultados obtidos, fornecendo apenas os valores dos esforços e deslocamentos nas extremidades de cada

elemento. A Fig. 20 mostra os diagramas de esforços de momento, cortante, normal e torção da estrutura da Fig. 19 como resultado da segunda parte de desenvolvimento do *software* implementado nesse trabalho.

Os vetores mostrados nos apoios da estrutura da Fig. 19 indicam os seus graus de liberdade desimpedidos. Dessa forma, tem-se: um engaste perfeito no apoio do nó 1; o apoio do nó 3 permite apenas rotação em torno do eixo z do sistema global de referência, e o apoio do nó 4 permite apenas rotação em torno do eixo x do sistema global de referência. O carregamento atuante na estrutura é dado por uma força concentrada no meio da barra 2 e na direção negativa do eixo y .

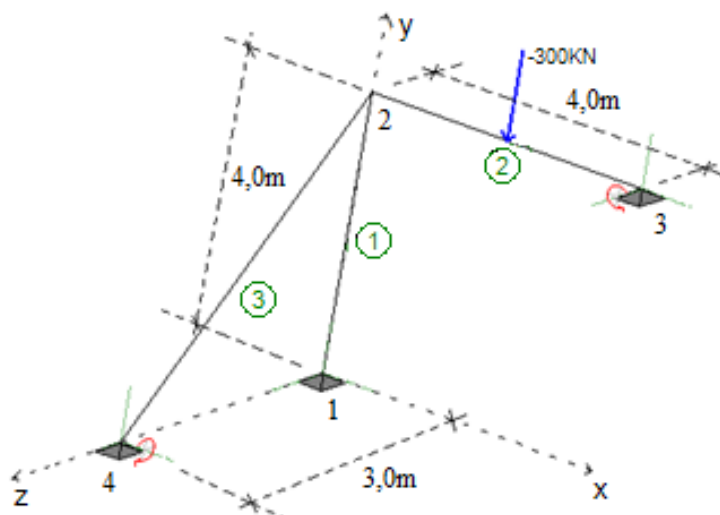


Figura 19. Estrutura reticula espacial

É considerado que as três barras são constituídas do mesmo material de módulo de elasticidade transversal dado por $G = 10.4 GPa$ e longitudinal dado por $E = 25 GPa$. A Tabela 1 apresenta o comprimento das barras e as propriedades geométricas de suas seções transversais. Nessa tabela I_y e I_z são os momentos de inércia em relação aos eixos principais de inércia que devem coincidir com o sistema de referência local de cada barra. A definição desses eixos influencia na solução do problema analisado. Portanto, são adotados os seguintes sistemas de referência local: para barra 1 o eixo y local é coincidente com o eixo x global, e o eixo z local é coincidente com o z global; para a barra 2 o sistema local é coincidente com o global; para a barra 3 o eixo y local é coincidente com o eixo x global, e o eixo z local fica no plano yz global perpendicular ao eixo da barra. O eixo x local sempre coincide com o eixo da barra, e os sentidos dos eixos não interferem na análise.

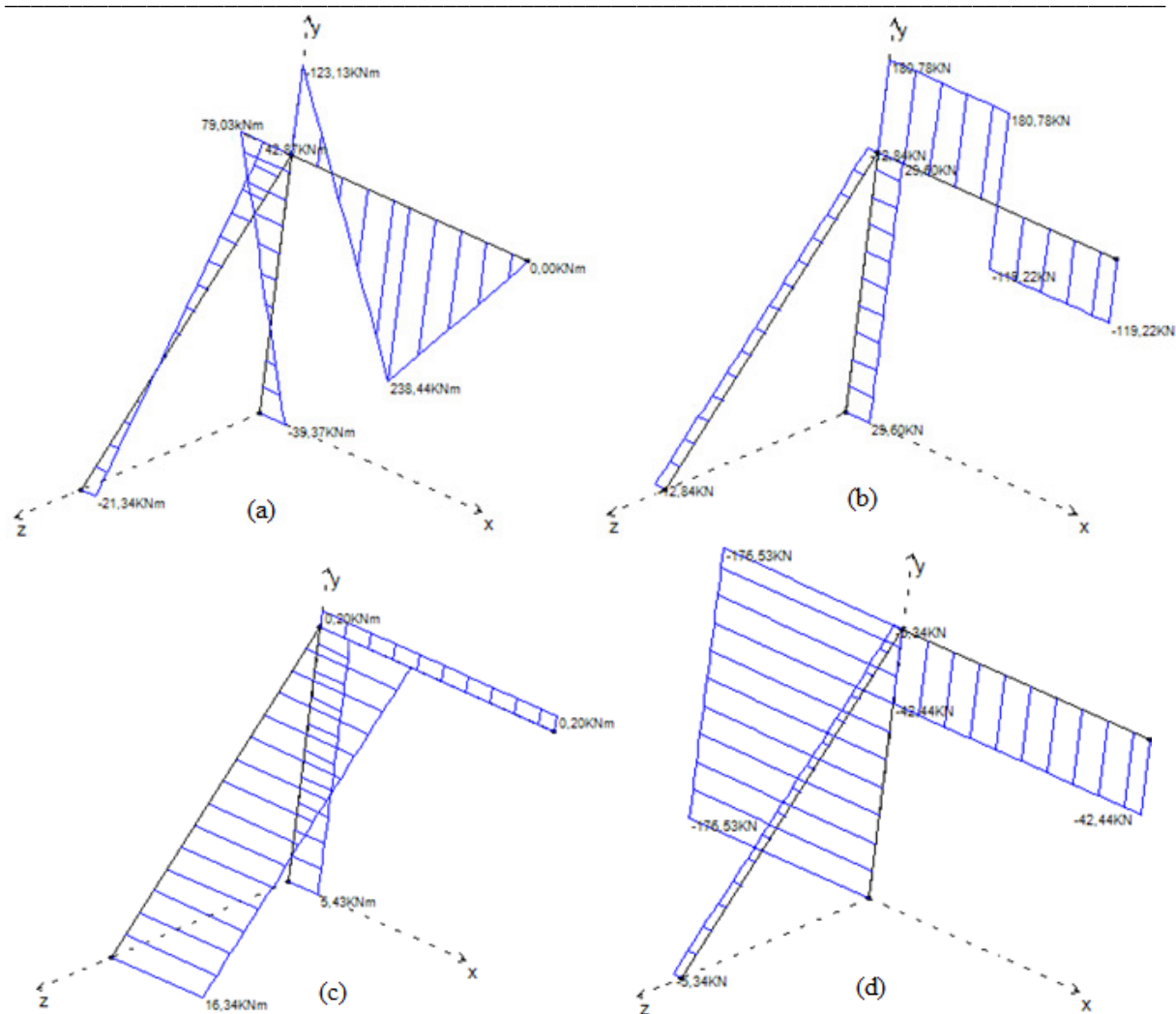


Figura 20. Diagrama de momento (a) e cortante (b) no plano xy local, torção (c) e normal (d)

Na Fig. 20-a é apresentado o diagrama de momento no plano xy local de cada barra. No parágrafo anterior foram definidas as direções dos eixos locais x e y de cada barra. Na Fig. 20-b é apresentado o diagrama de cortante no plano xy local de cada barra. Na Fig. 20-c e 20-d são apresentados os diagramas de torção e normal, respectivamente, nas barras da estrutura da Fig. 19. Por motivos de excesso de figuras não foram apresentados os diagramas de momento e cortante no plano xz local de cada barra.

Tabela 1. Comprimento e propriedades geométricas das seções transversais das barras

Barra	L (m)	I_y (10^{-4}m^4)	I_z (10^{-4}m^4)	J (10^{-4}m^4)	Área (m^2)
1	4	4.5	2	6.5	0.06
2	4	0.84	3.4	4.2	0.045
3	5	4.5	2	6.5	0.06

3.3 Exemplo 3

Nesse exemplo são apresentados os resultados gráficos e expressões analíticas para o pórtico espacial mostrado na Fig. 21 abaixo. O pórtico é composto por 8 barras e 8 nós, sendo todas as barras de 4 m de comprimento. De acordo com a Fig. 21, e de forma análoga ao exemplo anterior, conclui-se que: a estrutura tem um engaste perfeito no apoio do nó 5; o apoio do nó 7 permite rotação em torno dos três eixos, ou seja, não transmite momento de flexão e nem torção; o apoio do nó 1 permite rotação em torno dos eixos y e z dessa forma não transmite momento de flexão; o apoio do nó 3 permite rotação apenas em torno do eixo z , sendo assim não transmite flexão em um dos planos. Os carregamentos atuantes na estrutura são dados por duas forças concentradas no meio das barras 7 e 8, e duas cargas distribuídas uniformemente ao longo das barras 5 e 6.

É considerado que as oito barras são constituídas do mesmo material de módulo de elasticidade longitudinal e transversal dado por: $E = 30GPa$ e $G = 12GPa$. As barras verticais tem seção transversal retangular de 20 por 30cm com eixo de maior inércia paralelo ao eixo z global. As barras horizontais tem seção transversal retangular de 10 por 40cm com eixo de maior inércia paralelo ao eixo x ou z global. Na entrada das coordenadas das barras deve ser definido o sistema de referência local de cada barra, como discutido no exemplo anterior, isso influencia na definição dos momentos de inércia da seção. Foi considerado o eixo y' na direção do eixo y global, para as barras horizontais, e na direção do eixo x global, para as barras verticais.

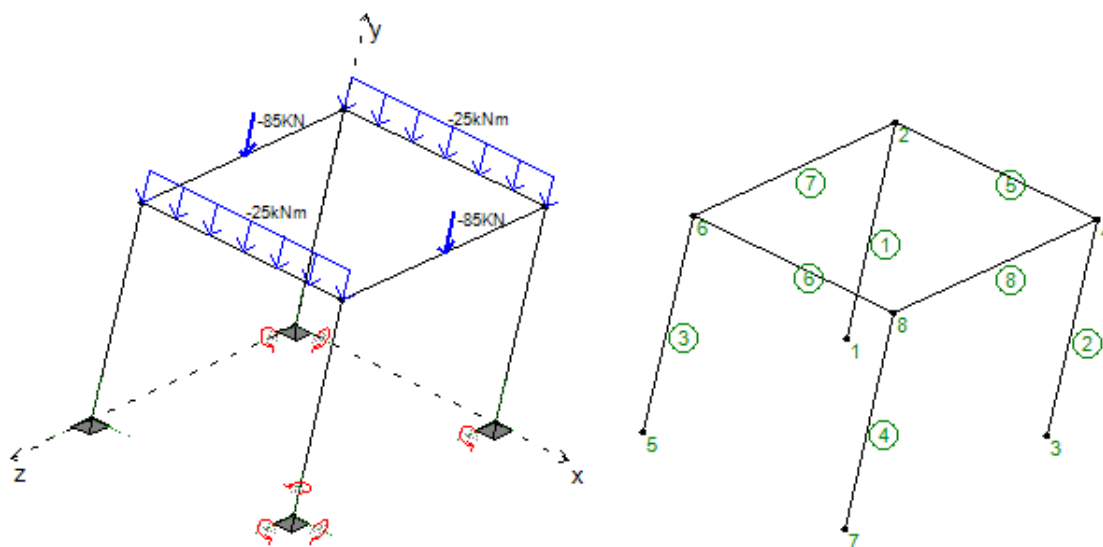


Figura 21. Pórtico espacial

O efeito de torção é analisado de forma aproximada desconsiderando a possibilidade de empenamento da seção, que só não ocorre em seções circulares cheias ou vazadas, e seções fechadas de paredes finas. No caso de seções retangulares Beer e Jhonston (1994) apresentam a expressão $J = \beta hb^3$ para o momento de torção da seção que permite, de forma aproximada, a análise de barras de seções retangulares como barras de seções circulares. Nessa expressão β é uma constante adimensional que depende da relação entre as dimensões h e b da seção retangular. Para a seção retangular $h = 30cm$ e $b = 20cm$, tem-se $\beta = 0.1958$. Para a seção

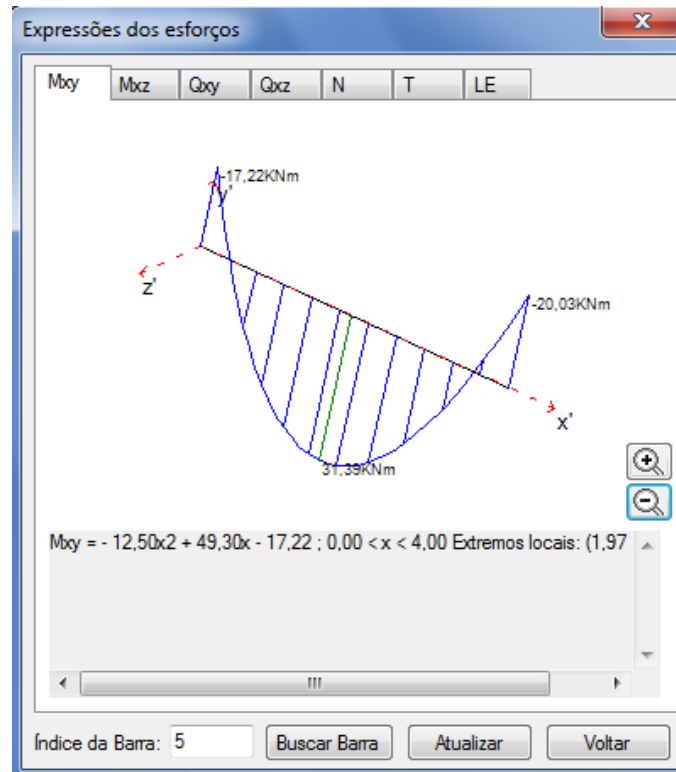


Figura 23. caixa de diálogo de visualização de esforços e suas equações

$$Q_{xz} = -0.54; \quad 0 \leq x \leq 4;$$

$$N = -4.61; \quad 0 \leq x \leq 4;$$

$$T = -0.02; \quad 0 \leq x \leq 4;$$

$$v(x) = (-6.511x^4 + 51.35x^3 - 53.81x^2 - 189.8x - 20.48) \times 10^{-5}; \quad 0 \leq x \leq 4; \text{ Extremos locais: } (1.97; -3.086e-03)$$

$$w(x) = (-8.952x^3 + 53.16x^2 + 30.39x - 198.8) \times 10^{-5}; \quad 0 \leq x \leq 4;$$

$$u(x) = (-0.3841x + 79.86) \times 10^{-5}; \quad 0 \leq x \leq 4;$$

$$t(x) = (+1.526x + 326.1) \times 10^{-5}; \quad 0 \leq x \leq 4;$$

Como pode ser observado nas quatro últimas equações acima, a deformada é definida por quatro equações de deslocamentos, sendo elas: deslocamento por flexão no plano xy local, deslocamento por flexão no plano xz local, deslocamento axial ao longo do eixo da barra, e torção no eixo da barra. A Fig. 24 abaixo mostra a deformada da estrutura. Como se verifica das equações acima, o deslocamento máximo de translação na barra 5 é de aproximadamente 3mm para baixo. Devido a esses pequenos deslocamentos da estrutura deve-se amplificá-los com um fator de escala para poder ter uma visão geral da deformada da estrutura. Esse fator de amplificação foi usado na Fig. 24 abaixo.

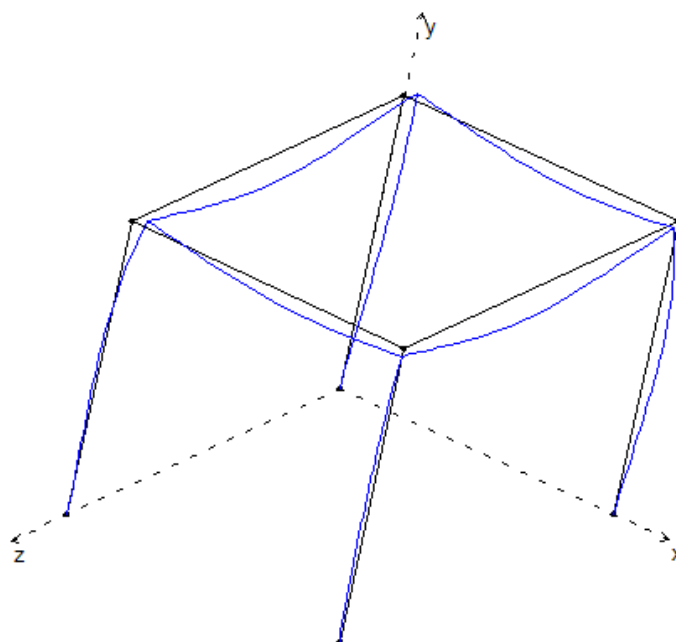


Figura 24. Deformada da estrutura

Os extremos locais das equações dos esforços solicitantes e da deformada são obtidas a partir dos pontos críticos dessas equações no trecho considerado. Os pontos críticos são pontos onde a derivada se anula ou onde ela não existe. Como a linha elástica representa a deformada de uma estrutura, então sua equação apresenta sempre uma curva suave, ou seja, a função é sempre derivável em todo intervalo em que é definida. A obtenção dos pontos de derivada nula das equações dos esforços solicitantes consiste no máximo na determinação de zeros de uma equação do segundo grau. Já que o carregamento distribuído mais complexo permitido pelo *software* é um carregamento linearmente distribuído, que gera um momento representado por uma equação polinomial de terceira ordem. No caso da deformada esse carregamento irá gerar um polinômio de quinto grau para sua representação, nesse caso tem-se de encontrar os zeros de um polinômio de quarta ordem para ter os pontos críticos da deformada no intervalo analisado.

Para obter os zeros de um polinômio de grau maior ou igual a 3, foi utilizado o método de Bairstow (1920) em associação com o método de Newton-Rapson (para maiores detalhes do método ver Burden e Faires (2012)). O método de Bairstow é um método numérico que propõe um algoritmo para encontrar raízes reais ou complexas de funções polinomiais de grau maior ou igual a 3. O método consiste em ajustar os coeficientes u e v na função quadrática $x^2 + ux + v$ até que suas raízes também sejam as raízes do polinômio que se está resolvendo, ou seja, o resto da divisão do polinômio analisado pelo polinômio de grau dois seja nulo. Para esse refinamento de u e v é usado o método de Newton.

4 CONCLUSÃO

Esse trabalho consiste na continuidade do desenvolvimento de um programa para análise de sistemas estruturais reticulados espaciais baseado no método dos deslocamentos que teve início em um projeto anterior (Silva e Drumond, 2012). Nessa parte do projeto foram implementadas novas funcionalidades ao programa, tendo como foco principal a implementação de um pós-processador gráfico para visualização gráfica dos resultados obtidos na análise estrutural.

A verificação do programa implementado é baseada na análise dos resultados de vários exemplos de estruturas espaciais formadas por elementos de barra. Como a parte dos resultados numéricos já foi verificada na primeira etapa desse projeto, nesse trabalho focou-se apenas na avaliação das novas funcionalidades e principalmente na visualização dos diagramas dos esforços solicitantes e deformada da estrutura. Devido à limitação do tamanho do texto final desse trabalho foram apresentados os resultados de dois exemplos analisados. No primeiro exemplo, uma estrutura reticulada espacial formada por três barras foi analisada pelo software sendo apresentados na seção 3 os diagramas de esforços e a deformada da estrutura. No segundo exemplo, uma estrutura reticulada espacial com oito barras é analisada pelo software desenvolvido nesse trabalho sendo fornecidos na seção 3 os diagramas de esforços da estrutura como um todo e de barras individuais da estrutura, nesse caso são fornecidos também as equações que descrevem a variação desses esforços ao longo do eixo da barra. O mesmo foi feito para a deformada da estrutura. Na seção 2 um pórtico espacial de cinco barras foi analisado pelo programa desenvolvido nesse trabalho. Uma das barras teve em sua extremidade dois graus de liberdade liberados de tal forma que parte do seu comportamento estrutural independesse do resto da estrutura. Essa resposta esperada foi verificada na análise dos diagramas de esforços apresentados na seção 2.

O ambiente gráfico produz uma montagem da estrutura analisada mais rápida e com menor chance de erros na entrada de dados, já que o usuário pode visualizar a estrutura que está sendo montada. O ambiente gráfico permite também alteração ou ampliação de uma estrutura previamente analisada com maior agilidade e controle.

AGRADECIMENTOS

Os autores gostariam de agradecer a Universidade Federal de Ouro Preto/PROPEC, o CNPq, e a FAPEMIG, pelo apoio financeiro.

REFERÊNCIAS

- Burden, R. L. e Faires J. D., 2012 *Análise Numérica*. Editora CENGAGE Learning, oitava edição.
- Bairstow, L., 1920. *Aplied Aerodynamics*. Longmans, Green and Company. Universidade de Winsconsin, Madison, 565pp.
- Beer, F. P.; Johnston Jr, E. R., 1994. *Mecânica vetorial para engenheiros*. 5ª edição. São Paulo: Editora Makron Books, v2.
- Gere, J. M.; Goodno, B. J., 2010. *Mecânica dos Materiais*. São Paulo: Editora Cengage Learning.
- Gere, J. M.; Weaver Jr., W., 1987. *Análise de Estruturas Reticuladas*. Rio de Janeiro: Editora Guanabara.
- Martha, L. F., 2000. *Métodos Básicos da Análise de Estruturas*. Rio de Janeiro: Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Disponível em: <http://www.tecgraf.puc-rio.br/~lfm/>.
- Moreira, D. F., 1977. *Análise Matricial das Estruturas*. Rio de Janeiro: Editora LTC/EDUSP.

Silva Filho, A. M., 2010. *Introdução à programação orientada a objeto com C++*. 1ª edição. São Paulo: Editora Campus/Elsevier, 312p.

Soriano, H. L.; Lima, S. S., 2006. *Análise de Estruturas: Método das Forças e Método dos Deslocamentos*. 2ª edição. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda.

Süssekind, J. C., 1981. *Curso de Análise Estrutural*. Rio de Janeiro: Editora GLOBO, V1: Estruturas Isostáticas.

Süssekind, J. C., 1981. *Curso de Análise Estrutural*. Rio de Janeiro: Editora GLOBO, V2: Deformações em estruturas, Método das Forças.

Silva, A. R. e Drumond, F. P., 2012. Desenvolvimento de um software para análise estrutural de sistemas reticulados espaciais usando o método dos deslocamentos. *Exacta (Online)*, v. 10, p. 309-324.