



ANÁLISE NUMÉRICA USANDO ELEMENTOS DE CASCAS E DE INTERFACE

Amilton R. Da Silva.

amilton@em.ufop.br

Luís E. S. Dias.

luis_civil12@yahoo.com.br

Programa de Pós Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Ouro Preto
Campus Universitário s/n, Morro do Cruzeiro, 35400-000, Ouro Preto, MG, Brasil

Resumo: *Nesse artigo foram desenvolvidos três elementos finitos de interface capaz de associar elementos planos de casca em três diferentes combinações: elementos paralelos sobrepostos; elementos ortogonais entre si; e elementos paralelos pertencentes ao mesmo plano. Esses elementos de interface podem ser utilizados para evitar a sobreposição de áreas, ou alteração das dimensões da seção transversal, quando se utiliza um modelo de discretização em elementos de casca para uma análise estrutural qualquer. Com uma maior aplicabilidade prática, esses elementos também podem ser utilizados na simulação numérica do comportamento mecânico de uma conexão deformável entre diferentes corpos que pudessem ser simulados numericamente por elementos de casca. Os elementos de interface não são suficientes para simular um determinado problema, eles devem trabalhar sempre combinados com elementos de casca, por isso eles deverão ter graus de liberdade compatíveis com os graus de liberdade dos elementos de cascas aos quais serão conectados. Nesse artigo foi implementado o elemento de casca com nove nós e cinco graus de liberdade por nó (a nível local). Para a validação dos elementos implementados foram utilizadas soluções analíticas e resultados numéricos obtidos de softwares comerciais de análise e dimensionamento de estruturas.*

Palavra-chave: Elemento de casca/placa, Conexão deformável, Elemento de interface

1 INTRODUÇÃO

Desde a década de 50 o uso da mecânica computacional para a solução dos fenômenos existentes na engenharia vem sendo cada vez mais utilizado. Um dos motivos é o grande avanço tecnológico dos computadores permitindo que as ferramentas de análise fiquem cada vez mais eficazes. A principal ferramenta usada para a solução dos problemas físicos é uso de análises numéricas, que são baseadas em algoritmos. A ideia do uso de métodos numéricos consiste em obter a solução de um modelo matemático que descreve um problema físico. Esse modelo matemático pode ser descrito, por exemplo, por equações diferenciais.

Um dos métodos mais indicados para resolver os problemas físicos cujo modelo matemático é representado por equações diferenciais parciais é o método das diferenças finitas. Outro método muito usado em diversas pesquisas nas áreas da engenharia é o Método dos Elementos Finitos (MEF). Esse método teve sua origem na análise estrutural transformando a solução do problema de equações diferenciais em um problema matricial. Com o surgimento dos primeiros computadores digitais no início da década de 50 os métodos matriciais para análise estrutural tiveram um grande desenvolvimento. As primeiras aplicações envolviam apenas estruturas reticuladas, mas a crescente demanda por estruturas mais leves, tais como as encontradas na indústria aeronáutica, conduziu ao desenvolvimento de métodos numéricos que pudessem ser utilizados nas análises de problemas mais complexos.

A principal função do elemento de interface implementado na seção 3 desse artigo, é simular uma conexão deformável, ou uma fina camada de um determinado material, entre elementos estruturais que possam ser simulados numericamente por elementos de casca. Na prática da construção civil elementos estruturais como piso misto, viga mista e pilares mistos possuem uma interface de conexão entre os diferentes materiais, sendo que na maioria das situações é permitida uma deformação nessa conexão.

Dentre os elementos estruturais com conexão deformável, citados no parágrafo anterior, o piso misto formado por uma laje de concreto ligada por conectores mecânicos a vigas de aço é o mais comum na prática da construção civil. Geralmente esse elemento tem sua análise estrutural e dimensionamento baseados em modelos simplificados que podem gerar erros significativos. Uma forma de representar melhor o comportamento mecânico desse elemento estrutural é modelar a laje de concreto e as vigas de aço por elementos de casca/placa e a conexão deformável por elementos de interface. Silva (2010) cita que mesmo em vigas mistas isoladas o uso do elemento de casca/placa para simular a laje de concreto evita o efeito *shear lag* gerando assim resultados mais confiáveis. O efeito *shear lag* consiste em uma variação da tensão normal ao longo da largura da laje de concreto da viga mista. Esse efeito é mais relevante quanto maior for a largura da laje, e não pode ser representado quando a análise é feita através de elementos unidimensionais de viga.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1 Elementos de Casca/Placa

Existe um número grande de publicações que descrevem as características de elementos estruturais formados por cascas. Pereira (2005) define um elemento de casca como um corpo onde uma dimensão é muito menor comparado às outras duas. Esse fato permite reduzir um problema tridimensional em um problema bidimensional, e dessa forma, o deslocamento de

qualquer ponto no interior da casca pode ser expresso em termos das componentes do deslocamento da superfície neutra.

Segundo Hughes (1987) a teoria de Reissner/Mindlin, que inclui a deformação transversal por cisalhamento, abriu o caminho para vários esquemas de interpolação dos deslocamentos nodais, já que nesse caso translações e rotações são interpolados independentemente. Devido a isso, recentemente, os elementos de deslocamento têm sido obtidos com base na teoria de Reissner/Mindlin, que se mostraram superiores aos elementos planos da teoria clássica de Kirchhoff.

Muitos autores tratam o elemento de casca como sendo uma generalização do elemento de placa. Crisfield (2000) apresenta uma formulação de um elemento de placa com cinco graus de liberdade por nó. Os dois graus de liberdade de translação a mais, quando comparada ao elemento de placa tradicional, são necessários para fazer uma análise não linear geométrica. Segundo Batoz et al. (2000) os elementos de casca podem ser classificados em três categorias, sendo elas os elementos curvos, elementos curvos isoparamétricos (elementos degenerados) e elementos planos de casca/placa. Os elementos curvos são baseados em teorias consistentes de cascas podendo dar uma melhor aproximação para a verdadeira forma da casca e fornecer o acoplamento da membrana de flexão do elemento. No entanto, existem algumas dificuldades há serem superadas para a correta representação do movimento de corpo rígido e evitar problemas de membrana e travamento por cisalhamento.

Diversos artigos que tratam de elementos de casca são encontrados na literatura, Batoz et al. (2000) cita uma série de elementos planos triangulares de casca que já foram estudados como o T12, DKT3, DKT18, DKT27, HCT18, HSM18 e TRUNCAR. Cada elemento apresenta as suas particularidades, como por exemplo, os elementos da família DKT (triângulo discreto de Kirchhoff) que usa a teoria de placa de Kirchhoff na sua formulação.

2.2 Elementos de Interface

O elemento de interface foi inicialmente desenvolvido para trabalhar em conjunto com elementos bi e tridimensionais com o objetivo de representar uma fina camada de material ou o contato entre dois materiais distintos, como o caso da interação solo-estrutura. O primeiro trabalho encontrado na literatura sobre elementos de interface foi proposto por Goodman et al. (1968), comumente chamado de GTB (Goodman, Taylor e Brekke), uma homenagem a seus autores. Nesse trabalho o elemento de interface GTB é capaz de simular o deslizamento e a separação entre dois corpos em contato.

Com o objetivo de representar dois materiais distintos, Kaliakin e Li (1995) utilizaram elementos bidimensionais de interface para modelar o problema de contato existente entre o solo e uma sapata de fundação. Já Carol et al. (2001) utilizaram o elemento de interface para analisar o processo de fissuração em elementos de concreto.

Para solução do problema de viga mista com conexão deformável Silva (2006) e Souza e Silva (2007) desenvolveram um elemento de interface capaz de simular o deslizamento e separação vertical na interface de contato entre os materiais da seção mista considerando a não linearidade física desses materiais e a possibilidade de seções transversais genéricas. Nesse trabalho, o elemento de interface trabalha em conjunto com elementos unidimensionais de viga.

Pela grande abrangência existente nos parâmetros que envolvem a conexão entre os elementos, e com o intuito de avaliar as diferentes situações que podem ocorrer na conexão, Souza e Silva (2009) apresentaram uma família de elementos de interface de espessura nula desenvolvidos para simulação de vigas mistas com conexão deformável longitudinal, ou deslizamento entre camadas. A proposta desses elementos incluem formulações a serem

empregadas com a teoria de viga de Euler-Bernoulli, teoria de viga de Timoshenko, quantidades diferentes de nós nos elementos, e diferentes processos de integração dos deslocamentos ao longo do elemento.

Souza e Silva (2010) apresentaram uma solução analítica para vigas mistas com múltiplas camadas. Essa solução é usada para verificar a capacidade do elemento de interface em simular problemas de vigas mistas com mais de um plano de cisalhamento.

Silva (2010) implementou um elemento de interface capaz de simular a conexão deformável entre materiais distintos e associar um elemento de placa/casca a um elemento unidimensional de viga com graus de liberdade compatível com o elemento de placa/casca. Para a análise não linear física e geométrica da placa de concreto o autor usa uma formulação semelhante à de Huang et al. (1999). Diferentes dos casos de vigas mistas, nesse problema o elemento de interface apresenta deslocamentos relativos longitudinal, transversal e vertical.

3 FORMULAÇÃO

Como discutido anteriormente uma das principais aplicações dos elementos implementados nessa seção é a simulação de uma conexão deformável entre dois elementos estruturais que possam ser analisados usando a teoria de casca. A Fig. 1 abaixo mostra a discretização de um piso misto formado por uma laje de concreto ligada a duas vigas de aço de perfil I. Nessa discretização foi usado o elemento de casca para a laje de concreto e as vigas de aço, e o elemento de interface para fazer a ligação entre os elementos de casca e simular uma possível conexão deformável no contato entre a laje de concreto e as vigas de aço. Para facilitar a modelação de exemplos práticos como o mostrado na Fig. 1, um gerador de malha estruturada foi desenvolvido pelos autores.

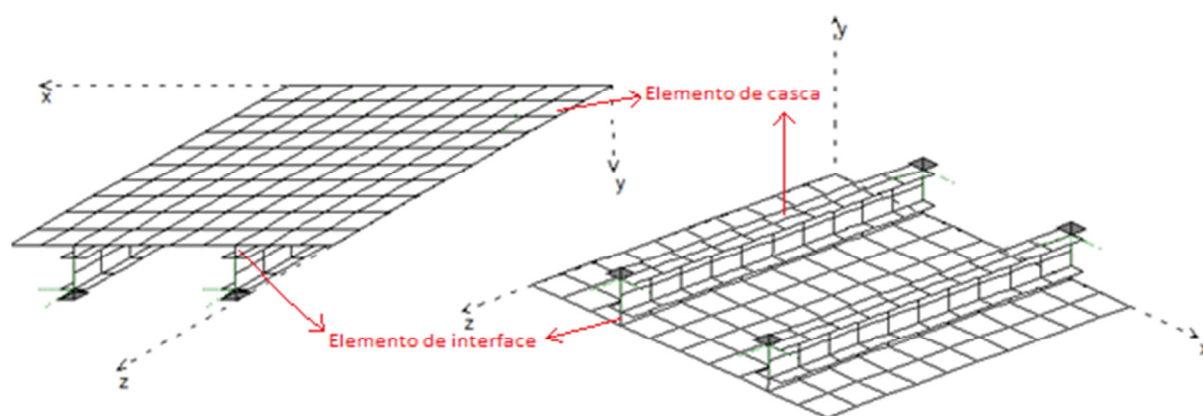


Figura 1. Piso Misto discretizado por elementos de casca e de interface

3.1 Elemento de Casca/Placa

O elemento de casca/placa implementado nesse trabalho é o elemento retangular de nove nós com cinco graus de liberdade por nó. Além dos graus de liberdade típicos do elemento de placa, deslocamento de translação na direção de z e rotações em torno dos eixos x e y , esse elemento de casca/placa apresenta translações nas direções dos eixos x e y como mostra a Fig. 2.

Considerando as hipóteses cinemáticas da teoria de placa de Rissner-Mindlin que diz que seções inicialmente planas e ortogonais a configuração indeformada permanecem planas após

deformações, porém não mais ortogonais, as equações dos deslocamentos para o elemento são:

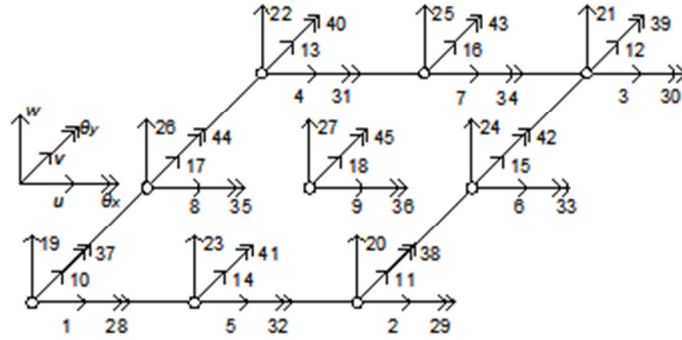


Figura 2. Elemento de casca de nove nós

$$u(x, y, z) = u^0(x, y) + z\theta_y(x, y) \quad (1)$$

$$v(x, y, z) = v^0(x, y) - z\theta_x(x, y) \quad (2)$$

$$w(x, y, z) = w^0(x, y) \quad (3)$$

Nas Eqs. (1) a (3), u^0 , v^0 e w^0 representam os deslocamentos de translação da superfície média (ou uma superfície de referência qualquer) do elemento de casca nas direções x , y e z . θ_x e θ_y representam as rotações das seções em relação aos eixos x e y . z é a posição da fibra em relação à superfície média ao longo da espessura do elemento de casca/placa onde se deseja avaliar os deslocamentos. Para facilitar a notação, o subscrito zero será omitido nas equações seguintes.

Aplicando a relação deformação-deslocamento de Green-Lagrange nas Eqs. (1) a (3) dos deslocamentos, e considerando a hipótese de Von Karman que implica que as derivadas de u e v em relação à x , y e z são pequenas e desprezando a variação de w com z , obtêm-se as equações das deformações dadas pelas Eqs. (4) a (8).

$$\varepsilon_x = u_{,x} + z\theta_{y,x} \quad (4)$$

$$\varepsilon_y = v_{,y} - z\theta_{x,y} \quad (5)$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}(u_{,y} + z\theta_{y,y} + v_{,x} - z\theta_{x,x}) \quad (6)$$

$$\varepsilon_{xz} = \frac{1}{2}(\theta_y + w_{,x}) \quad (7)$$

$$\varepsilon_{yz} = \frac{1}{2}(-\theta_x + w_{,y}) \quad (8)$$

Aplicando um campo de deformação virtual compatível ao elemento de casca deformável tem-se, pelo princípio dos trabalhos virtuais: $\delta W_{\text{int}} = \iiint_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV$, onde δ é o operador

variacional e σ_{ij} são as tensões ao longo da espessura do elemento de casca. Aplicando o operador variacional nas equações das deformações e desprezando as tensões normais na direção z , chega-se à expressão abaixo para o trabalho virtual interno.

$$\delta W_{\text{int}} = \iiint_V [(\delta u_{,x} + z\delta\theta_{y,x})\sigma_x + (\delta v_{,y} - z\delta\theta_{x,y})\sigma_y + (\delta u_{,y} + z\delta\theta_{y,y} + \delta v_{,x} - z\delta\theta_{x,x})\tau_{xy} + (\delta\theta_y + \delta w_{,x})\tau_{xz} + (-\delta\theta_x + \delta w_{,y})\tau_{yz}]dV \quad (9)$$

Na Eq. (9) a integral é escrita ao longo do volume indeformado do elemento de casca. Como os variacionais dos deslocamentos são constantes em relação à espessura do elemento de casca (eixo z) e definindo os esforços N_x , N_y , N_{xy} , Q_{xz} , Q_{yz} , M_y , M_x e M_{xy} , como mostrado nas Eqs. (10) a (12) abaixo, chega-se a Eq. (13) para o trabalho virtual interno do elemento de casca.

$$N_x = \int_h \sigma_x dz, \quad N_y = \int_h \sigma_y dz, \quad N_{xy} = \int_h \tau_{xy} dz \quad (10)$$

$$Q_{xz} = k \int_h \tau_{xz} dz, \quad Q_{yz} = k \int_h \tau_{yz} dz \quad (11)$$

$$M_y = \int_h z\sigma_x dz, \quad M_x = \int_h z\sigma_y dz, \quad M_{xy} = \int_h z\tau_{xy} dz \quad (12)$$

$$\delta W_{\text{int}} = \iint_A (\delta u_{,x} N_x + \delta\theta_{y,x} M_y + \delta v_{,y} N_y - \delta\theta_{x,y} M_x + \delta u_{,y} N_{xy} + \delta\theta_{y,y} M_{xy} + \delta v_{,x} N_{xy} - \delta\theta_{x,x} M_{xy} + \delta\theta_y Q_{xz} + \delta w_{,x} Q_{xz} - \delta\theta_x Q_{yz} + \delta w_{,y} Q_{yz}) dA \quad (13)$$

Na Eq. (11), o fator k corresponde a uma correção no cálculo do esforço cortante devido à aproximação de que seções planas permanecem planas após deformações, ou seja, a tensão cisalhante é constante ao longo da espessura do elemento de casca. O valor de k comumente usado é de $5/6$, mas depende da forma da seção transversal.

Na aproximação por elementos finitos, baseado em deslocamentos, as equações dos deslocamentos são aproximadas por funções de forma associadas aos deslocamentos nodais ($\mathbf{q}$). Para o elemento em questão foram adotadas funções de forma dadas por polinômios bi quadráticos descritos nas Eqs. (14) a (19), sendo que ξ e η representam as coordenadas paramétricas do elemento finito retangular usado.

$$N_{1..4} = \frac{1}{4} \xi \eta (\xi - \xi_i) (\eta - \eta_i) \quad (14)$$

$$N_5 = \frac{1}{2} \eta (\eta + 1) (1 - \xi^2) \quad (15)$$

$$N_6 = \frac{1}{2} \xi (\xi - 1) (1 - \eta^2) \quad (16)$$

$$N_7 = \frac{1}{2} \eta (\eta - 1) (1 - \xi^2) \quad (17)$$

$$N_8 = \frac{1}{2} \xi (\xi + 1) (1 - \eta^2) \quad (18)$$

$$N_9 = (1 - \xi^2) (1 - \eta^2) \quad (19)$$

As funções de interpolação dadas pelas Eqs. (14) a (19), serão representadas pelo vetor coluna Φ de nove termos dado pela Eq. (20) abaixo.

$$\Phi^T = (N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4 \quad N_5 \quad N_6 \quad N_7 \quad N_8 \quad N_9) \quad (20)$$

Sendo os deslocamentos u , v , w , θ_x e θ_y funções dos deslocamentos nodais, os seus variacionais podem ser escritos a partir da seguinte expressão: $\delta a = \delta \mathbf{q}^T \left(\frac{\partial a}{\partial \mathbf{q}} \right)$, sendo $\mathbf{q}$ o vetor dos deslocamentos nodais, ∂ o operador diferencial e a substituído por u , v , w , θ_x e θ_y .

Substituindo os variacionais na Eq. (13) do trabalho virtual das forças internas chega-se ao trabalho virtual de um elemento de casca/placa dado pela Eq. (21) abaixo.

$$\begin{aligned} \delta W_{\text{int}} = \iint_A & \left[\delta \mathbf{q}^T \left(\frac{\partial u_{,x}}{\partial \mathbf{q}} \right) N_x + \delta \mathbf{q}^T \left(\frac{\partial \theta_{y,x}}{\partial \mathbf{q}} \right) M_y + \delta \mathbf{q}^T \left(\frac{\partial v_{,y}}{\partial \mathbf{q}} \right) N_y - \delta \mathbf{q}^T \left(\frac{\partial \theta_{x,y}}{\partial \mathbf{q}} \right) M_x + \right. \\ & \delta \mathbf{q}^T \left(\frac{\partial u_{,y}}{\partial \mathbf{q}} \right) N_{xy} + \delta \mathbf{q}^T \left(\frac{\partial \theta_{y,y}}{\partial \mathbf{q}} \right) M_{xy} + \delta \mathbf{q}^T \left(\frac{\partial v_{,x}}{\partial \mathbf{q}} \right) N_{xy} - \delta \mathbf{q}^T \left(\frac{\partial \theta_{x,x}}{\partial \mathbf{q}} \right) M_{xy} + \\ & \left. \delta \mathbf{q}^T \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial \mathbf{q}} \right) Q_{xz} + \delta \mathbf{q}^T \left(\frac{\partial w_{,x}}{\partial \mathbf{q}} \right) Q_{xz} + \delta \mathbf{q}^T \left(\frac{\partial w_{,y}}{\partial \mathbf{q}} \right) Q_{yz} - \delta \mathbf{q}^T \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial \mathbf{q}} \right) Q_{yz} \right] dA \quad (21) \end{aligned}$$

Sendo $\mathbf{f}_{\text{ext}}$ o vetor de forças externas nas direções dos graus de liberdade do elemento de casca/placa, o trabalho virtual externo é dado por $\delta W_{\text{ext}} = \delta \mathbf{q}^T \mathbf{f}_{\text{ext}}$. O vetor de forças externas no elemento é dado pelas forças externas aplicadas diretamente na direção dos graus de liberdade do elemento, e as forças nodais equivalentes obtidas a partir do carregamento externo atuando ao longo do elemento. Da condição $\delta W_{\text{ext}} = \delta W_{\text{int}}$, e sabendo que a expressão deve ser válida para qualquer campo de deformação virtual compatível, tem-se: $\mathbf{f}_{\text{int}} - \mathbf{f}_{\text{ext}} = 0$, onde $\mathbf{f}_{\text{int}}$ é o vetor de forças internas dado pela Eq. (22) abaixo.

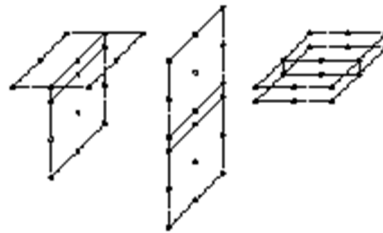
$$\mathbf{f}_{\text{int}} = \iint_A \begin{bmatrix} N_x \Phi_{,x} + N_{xy} \Phi_{,y} \\ N_{xy} \Phi_{,x} + N_y \Phi_{,y} \\ Q_{xz} \Phi_{,x} + Q_{yz} \Phi_{,y} \\ -M_{xy} \Phi_{,x} - M_x \Phi_{,y} - Q_{yz} \Phi \\ M_y \Phi_{,x} + M_{xy} \Phi_{,y} + Q_{xz} \Phi \end{bmatrix} \quad (22)$$

Utilizando o método de Newton-Rapshon na solução do problema $\mathbf{f}_{\text{int}} - \mathbf{f}_{\text{ext}} = 0$ é necessária a determinação da derivada dessa expressão em relação aos deslocamentos nodais, obtendo assim a matriz de rigidez tangente. Sendo $\mathbf{f}_{\text{ext}}$ constante em relação aos deslocamentos nodais, a matriz de rigidez tangente é dada por, $\mathbf{K} = \frac{\partial \mathbf{f}_{\text{int}}}{\partial \mathbf{q}}$.

$$\mathbf{K} = \iint_A \begin{bmatrix} \Phi_{,x} \left(\frac{\partial N_x}{\partial \mathbf{q}} \right)^T + \Phi_{,y} \left(\frac{\partial N_{xy}}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \\ \Phi_{,x} \left(\frac{\partial N_{xy}}{\partial \mathbf{q}} \right)^T + \Phi_{,y} \left(\frac{\partial N_y}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \\ \Phi_{,x} \left(\frac{\partial Q_{xz}}{\partial \mathbf{q}} \right)^T + \Phi_{,y} \left(\frac{\partial Q_{yz}}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \\ -\Phi_{,x} \left(\frac{\partial M_{xy}}{\partial \mathbf{q}} \right)^T - \Phi_{,y} \left(\frac{\partial M_x}{\partial \mathbf{q}} \right)^T - \Phi \left(\frac{\partial Q_{yz}}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \\ \Phi_{,x} \left(\frac{\partial M_y}{\partial \mathbf{q}} \right)^T + \Phi_{,y} \left(\frac{\partial M_{xy}}{\partial \mathbf{q}} \right)^T + \Phi \left(\frac{\partial Q_{xz}}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \end{bmatrix} dA \quad (23)$$

3.2 Formulação do Elemento de Interface

Nessa seção será apresentada a formulação do elemento de interface de 6 nós responsável por simular a conexão deformável e fazer a ligação entre elementos de cascas de 9 nós. A associação dos elementos de casca pode ser feita de três maneiras diferentes, podendo ser dois planos paralelos ou um plano perpendicular ao outro conforme ilustrado na Fig. 3 abaixo.



a) Tipo I. b) Tipo II. c) Tipo III.

Figura 3. Tipos de Associação dos elementos de casca

A Fig. 4 ilustra o elemento de interface de seis nós com 5 graus de liberdade por nó. É mostrada na figura a sequência dos graus de liberdade para a formação do vetor dos deslocamentos nodais. Assim como o elemento de casca, o elemento de interface implementado apresenta a nível local 5 graus de liberdade por nó. No entanto, a possibilidade de simulação de estruturas formadas por planos não colineares exige que o sexto grau de liberdade seja inserido para montagem da matriz de rigidez global do problema, tanto para o elemento de interface quanto para o elemento de casca.

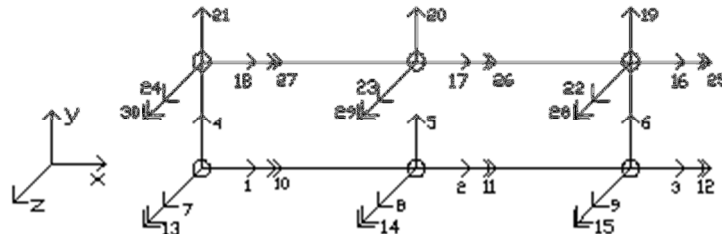


Figura 4. Graus de Liberdade do elemento de interface

Considerando os graus de liberdade mostrado na Fig. 4 acima, definem-se as Eqs. (24) a (26) para os deslocamentos relativos longitudinal, transversal e vertical, respectivamente.

$$s_l(x) = u_2^0(x) - u_1^0(x) + \frac{h_2}{2} \theta_{z2}(x) + \frac{h_1}{2} \theta_{z1}(x) \quad (24)$$

$$s_t(x) = w_1^0(x) - w_2^0(x) + \frac{h_2}{2} \theta_{x2}(x) + \frac{h_1}{2} \theta_{x1}(x) \quad (25)$$

$$s_v(x) = v_2^0(x) - v_1^0(x) + z[\theta_{x1}(x) - \theta_{x2}(x)] \quad (26)$$

Os valores de h_1 e h_2 nas Eqs. (24) a (26) acima dependem do tipo de elemento de interface. Para o tipo 1, com elemento de casca perpendicular estando acima do elemento de interface, h_2 é a distância do plano de referência do elemento de casca perpendicular até a interface de contato, e h_1 é zero. Para o tipo 2, tem-se h_1 e h_2 nulos. Para o tipo 3, h_2 é a distância do plano de referência do elemento de casca superior até a interface de contato, e h_1 é a distância do plano de referência do elemento de casca inferior até a interface de contato.

Os deslocamentos relativos apresentados nas Eqs. (24) a (26) estão relacionados a uma deformação da conexão na interface de contato, ou seja, a uma força por unidade de comprimento que surge nessa interface. Considerando uma relação linear entre as forças por unidade de comprimento na direção de u (S_b), v (V_b) e w (N_b), em relação a seus respectivos deslocamentos relativos e, sendo E_{S_b} , E_{V_b} e E_{N_b} , respectivamente, as rigidezes de deformação do elemento de interface na direção dos deslocamentos u , v e w , então:

$$S_b = E_{S_b} s_l, V_b = E_{V_b} s_t \text{ e } N_b = E_{N_b} s_v. \quad (27)$$

Aplicando um campo de deformação virtual compatível a um elemento de interface da Fig. 4 deformável tem-se, pelo princípio dos trabalhos virtuais:

$$\delta W_{\text{int}} = \int_{\Omega} (S_b \delta s_l + N_b \delta s_t + V_b \delta s_v) d\Omega \quad (28)$$

Na Eq. (28), s_l e s_t variam somente ao longo do eixo do elemento de interface (eixo x), já s_v varia também ao longo do eixo z . Na formulação a seguir será considerado que o eixo z varia de $-b_1$ a b_2 , sendo esses valores dados pelas espessuras dos elementos paralelos ao elemento de interface ou pelas larguras dos elementos perpendiculares ao elemento de interface, sempre adotando o menor valor. Esses valores são importantes quando se permite uma separação vertical na interface de contato, nesses casos eles evitam que haja a interpenetração entre os elementos acima e abaixo da interface de contato. Com essas considerações pode-se reescrever a equação do trabalho virtual chegando-se então a Eq. (29).

$$\delta W_{\text{int}} = \int_L (S_b \delta s_l + V_b \delta s_t) dx + \int_L \left(\int_{-b_1}^{b_2} N_b \delta s_v dz \right) dx \quad (29)$$

Substituindo a variação dos deslocamentos relativos na Eq. (29) do trabalho virtual e omitindo o índice 0 que indica deslocamento no plano de referencia adotado, tem-se:

$$\delta W_{\text{int}} = \int_L [(S_b(\delta u_2 - \delta u_1) + V_b(\delta w_1 - \delta w_2) + N_b^1(\delta v_2 - \delta v_1) + \frac{h_1}{2} V_b \delta \theta_{x1} + N_b^2 \delta \theta_{x1} + \frac{h_1}{2} S_b \delta \theta_{z1} + [\frac{h_2}{2} V_b - N_b^2] \delta \theta_{x2} + \frac{h_2}{2} S_b \delta \theta_{z2}] dx \quad (30)$$

Na Eq. (30) $N_b^1 = \int_b N_b dz$ e $N_b^2 = \int_b N_b z dz$ representam as forças ao longo da largura (eixo z) na interface de contato entre os materiais.

Na aproximação por elementos finitos, baseado em deslocamentos, as equações dos deslocamentos são aproximadas por funções de forma associadas aos deslocamentos nodais ($\mathbf{q}$). Para o elemento em questão foram adotadas funções de forma dadas por polinômios quadráticos representado de maneira compacta pelo vetor coluna Φ de três termos.

Seguindo a mesma linha de raciocínio utilizada na determinação do vetor de força interna e da matriz de rigidez do elemento de casca/placa no item anterior, chega-se a Eq. (31) para o vetor de forças internas e a matriz de rigidez tangente para o elemento de interface.

$$\mathbf{f}_{\text{int}} = \begin{Bmatrix} -S_b \Phi \\ -N_b^1 \Phi \\ V_b \Phi \\ (\frac{h_1}{2} V_b + N_b^2) \Phi \\ \frac{h_1}{2} S_b \Phi \\ S_b \Phi \\ N_b^1 \Phi \\ -V_b \Phi \\ (\frac{h_2}{2} V_b - N_b^2) \Phi \\ \frac{h_2}{2} S_b \Phi \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{Bmatrix} -\Phi \left(\frac{\partial S_b}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \\ -\Phi \left(\frac{\partial N_b^1}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \\ \Phi \left(\frac{\partial V_b}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \\ \Phi \left[\frac{h_1}{2} \left(\frac{\partial V_b}{\partial \mathbf{q}} \right)^T + \frac{\partial N_b^2}{\partial \mathbf{q}} \right] \\ \frac{h_1}{2} \Phi \left(\frac{\partial S_b}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \\ \Phi \left(\frac{\partial S_b}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \\ \Phi \left(\frac{\partial N_b^1}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \\ -\Phi \left(\frac{\partial V_b}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \\ \Phi \left[\frac{h_2}{2} \left(\frac{\partial V_b}{\partial \mathbf{q}} \right)^T - \frac{\partial N_b^2}{\partial \mathbf{q}} \right] \\ \frac{h_2}{2} \Phi \left(\frac{\partial S_b}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \end{Bmatrix} \quad (31)$$

4 EXEMPLOS

4.1 Exemplo 1

Nesse exemplo será avaliado o uso do elemento de casca de nove nós para representar uma viga de aço com 5 metros de comprimento, biapoiada, submetida a uma carga de 100 kN no meio do vão, conforme ilustra a Fig. 5. A viga de aço possui seção transversal retangular com espessura de 3 cm e altura de 30 cm. O módulo de elasticidade longitudinal do aço é de 200 GPa e a solução foi comparada com a solução analítica usando a teoria de viga de Euler-Bernoulli.

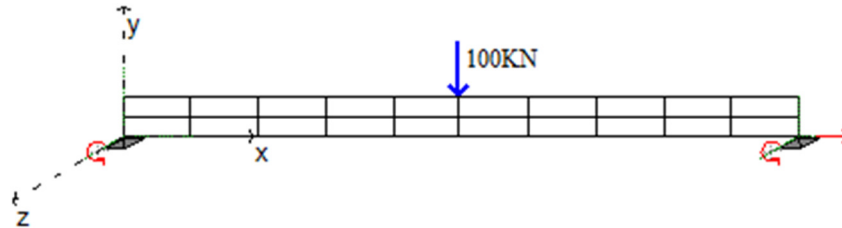


Figura 5. Viga de aço discretizada com elementos de casca de nove nós

Na Tabela 1 é apresentada a flecha no meio do vão considerando três discretizações diferentes da viga, 4, 10 e 20 elementos de casca de nove nós. Nessa tabela é apresentada uma comparação dessas flechas com a flecha obtida considerando o problema representado por um elemento unidimensional de viga.

Tabela 1. Deslocamento vertical com diferentes discretizações

Item	Elementos	Discretização em x	Discretização em y	Desloc. (cm)	Item Avaliado	Erro
1	4	2	2	-1.54590	1—4	19.86%
2	10	5	2	-1.91542	2—4	0.70%
3	20	10	2	-1.94502	3—4	0.83%
4	Solução Analítica		$\delta = PL^3/48EI$	-1.92901		

Da Tabela 1 observa-se que o aumento da discretização de 4 para 10 elementos gera um aumento considerável na flecha. No entanto, o aumento de 10 para 20 elementos já se tem uma diferença pequena na resposta, indicando a convergência da análise usando elementos de casca de nove nós para um valor muito próximo ao obtido pela discretização de 20 elementos. Observa-se também na Tabela 1, que existe uma diferença pequena (0,83%) entre a solução considerando elemento de casca e a solução analítica considerando elemento unidimensional de viga, isso pode ser explicado pela diferença entre as teorias usadas.

Para verificar a capacidade do elemento de interface do tipo 2 implementado nesse trabalho a viga da Fig. 6 será dividida longitudinalmente em duas partes iguais. Essas partes serão ligadas pelo elemento de interface que associa as duas partes e simula a conexão deformável na interface de contato. Em uma primeira análise foram considerados valores elevados para as rigidezes longitudinal, transversal e vertical da conexão ($E_{Sb} = E_{Nb} = E_{Vb} = 10^{10} \text{ KPa}$), simulando assim a interação total entre as duas partes, o que levaria a uma resposta igual aquela obtida sem a utilização do elemento de interface. Esses

resultados estão ilustrados na tabela 2 e confirmam o que se era esperado, ou seja, uma diferença muito pequena quando usamos ou não o elemento de interface.

Tabela 2. Deslocamento vertical usando elementos de casca e de interface

Item	Elementos casca	Elementos Interface	Discretização em x	Discretização em y	Desloc. (cm)	Item Avaliado	Erro
1	20	10	10	2	-1.946	1--2	0.059%
2	20	0	10	2	-1.945		

Para simular a interação parcial as rigidezes serão alteradas de modo que haja o deslocamento relativo nas direções longitudinal, vertical e transversal, para assim conseguirmos simular os problemas reais de estruturas com conexão deformável avaliando o problema de contato existente. Para o primeiro caso foi considerado a interação total na direção vertical e transversal, $E_{Vb} = E_{Nb} = 10^{10} \text{ KPa}$, e interação livre na direção longitudinal, $E_{Sb} = 10^{-3} \text{ KPa}$, ou seja, deslizamento longitudinal permitido.

A Tabela 3 apresenta o deslocamento vertical no meio do vão para os elementos acima e abaixo da interface de contato e o deslizamento longitudinal nos apoios. A Fig. 6 mostra a deformada da viga onde pode observar facilmente o deslizamento longitudinal entre os elementos acima e abaixo da interface de contato.

Tabela 3. Deslocamento vertical e deslizamento longitudinal com interação livre na direção x

E_{Vb} (KPa)	E_{Nb} (KPa)	E_{Sb} (KPa)	Flecha Inferior (cm)	Flecha Superior (cm)	Deslizamento na Extremidade (mm)
10^{10}	10^{10}	10^{-3}	-7.70	-7.70	6.95
Solução Analítica			$\delta = -7,71$		

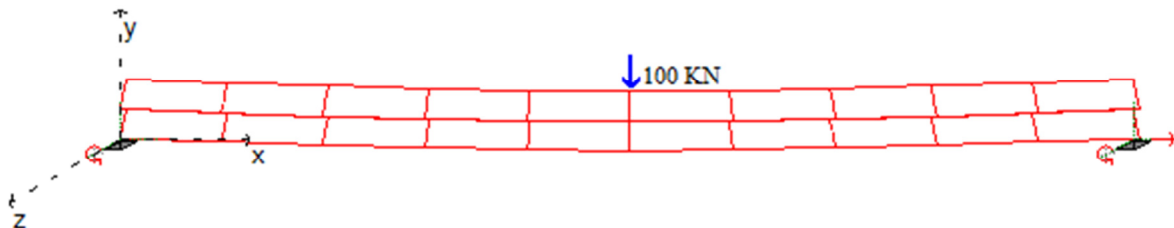


Figura 6. Deformada considerando interação livre na direção x

Nota-se que os resultados utilizando os elementos de casca e de interface implementados e o resultado obtido pela teoria de viga de Euler-Bernoulli ficaram bem próximos mostrando a confiabilidade dos elementos implementados. Na determinação da solução analítica foi utilizada a condição de que as flechas são iguais para os elementos acima e abaixo da interface de contato e considerada a aproximação de que a parte do carregamento concentrado transmitido do elemento superior para o inferior é dado por uma força P (a ser determinada) concentrada no meio do vão.

Para o segundo caso foi considerado a interação livre na direção longitudinal, interação total na direção transversal, e a interação parcial na direção vertical. A interação parcial na

direção vertical é obtida através de uma relação força por unidade de comprimento versus deslocamento relativo vertical bilinear com módulos de rigidez diferentes para a parte negativa e positiva da curva. Assim, para que não haja a interpenetração entre os elementos (deslocamento vertical relativo negativo) usa-se então um módulo de rigidez elevado ($E_{Vb} = 10^{10} \text{ KPa}$) para a parte negativa da equação bilinear. Já para a parte positiva é usada uma rigidez menor ($E_{Vb} = 8 \times 10^5 \text{ KPa}$) permitindo parcialmente a separação vertical (deslocamento vertical relativo positivo) entre os elementos.

A Tabela 4 mostra a flecha no meio do vão para os elementos acima e abaixo da interface de contato. Nesse exemplo o carregamento nodal se encontra na face inferior da viga e é feita uma análise não linear. A Fig. 7 mostra a deformada da viga. Nessa figura os deslocamentos foram amplificados para que pudesse observar a separação vertical entre os elementos e, consequentemente, as suas distintas curvaturas.

Tabela 4. Separação vertical considerando interação parcial na direção y

E_{Vb} (KPa)	E_{Nb} (KPa)	E_{Sb} (KPa)	Flecha Inferior (cm)	Flecha Superior (cm)	Separação Vertical (cm)
$10^{10}, 8 \times 10^5$	10^{10}	10^{-3}	-8.207	-7.214	0.993

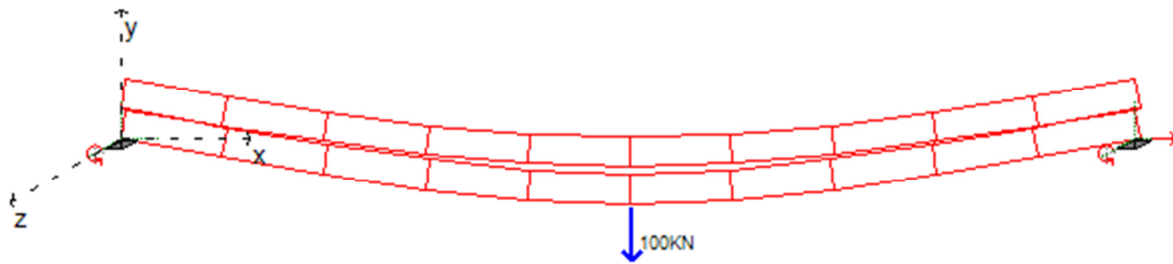


Figura 7. Deformada considerando interação parcial na direção y

Devido à interação parcial vertical e ao carregamento aplicado no meio do vão na parte inferior da viga, há uma maior tendência de separação vertical próximo ao ponto de aplicação da carga concentrada e uma tentativa de interpenetração entre as partes da viga próximo aos apoios.

Para a última análise foi considerado que a viga tenha interação livre no sentido longitudinal e vertical e interação total no sentido transversal. A interação livre no sentido vertical adotada aqui permite a separação vertical para os deslocamentos positivos $E_{Vb} = 10^{-3} \text{ KPa}$ e não permite a interpenetração entre as duas vigas $E_{Vb} = 10^{10} \text{ KPa}$ para os deslocamentos negativos. Com o carregamento também aplicado na parte inferior da viga e a interação livre para o deslocamento positivo espera-se que apenas a viga de baixo contribua para resistir ao esforço aplicado.

A Tabela 5 apresenta os valores das flechas no meio do vão para o elemento acima e abaixo da interface usando uma análise não linear e os elementos de casca e interface implementados. A tabela apresenta também a flecha usando a teoria de viga de Euler Bernoulli para uma viga de 15 cm de altura, observa-se a proximidade entre as flechas para as diferentes teorias. A Fig. 8 ilustra a deformada da viga. Nela observa-se que apenas a viga inferior trabalha.

Tabela 5. Separação vertical considerando interação livre na direção y

EVb (KPa)	ENb (KPa)	ESb (KPa)	Flecha Inferior (cm)	Flecha Superior (cm)
10^{-3}	10^{10}	10^{-3}	-15.388	0
Solução Analítica			$\delta = -15.432$	



Figura 8. Deformada considerando interação livre na direção y

4.2 Exemplo 2

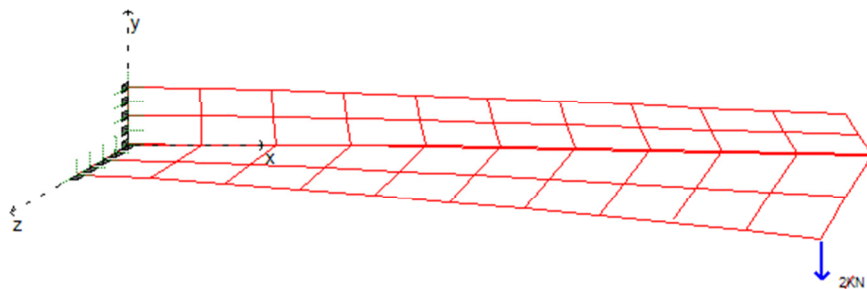
Nesse exemplo será avaliado o uso do elemento de casca de nove nós e o elemento de interface do tipo 1 que faz a ligação entre os dois elementos de casca perpendiculares entre si. Serão feitas duas análises considerando uma viga com seção transversal do tipo cantoneira. Na primeira, a viga encontra-se biapoiada com os apoios nos 5 nós de cada extremidade da aba inferior e sendo aplicado um carregamento de 2 kN no meio do vão no nó mais externo da sua aba inferior, provocando então um esforço de flexo-torção na viga. Na segunda análise a viga é considerada engastada em todos os nós de uma extremidade, e livre nos nós da outra extremidade, com a carga de 2 kN aplicada na sua extremidade livre na aba inferior e no nó mais externo, novamente provocando um esforço de flexo-torção na viga. A viga é de aço, com 5 metros de comprimento, módulo de elasticidade de 200 GPa, e possui seção transversal com abas iguais de 40 cm de largura e 2 cm de espessura.

A Tabela 6 ilustra os resultados obtidos para ambos os casos citados acima considerando apenas elementos de casca e elementos de casca e de interface, além dos resultados obtidos através do software comercial SAP 2000 usando na análise o elemento *Shell Thick* que leva em consideração a deformação por cisalhamento. Os deslocamentos ilustrados na Tabela 6 foram avaliados no ponto de aplicação da carga. Os elementos de casca e interface implementados nesse trabalho foram inseridos no programa de elementos finitos FEMOOP (Guimarães, 1992).

Tabela 6. Flecha máxima na cantoneira bi-apoiada e engastada-livre

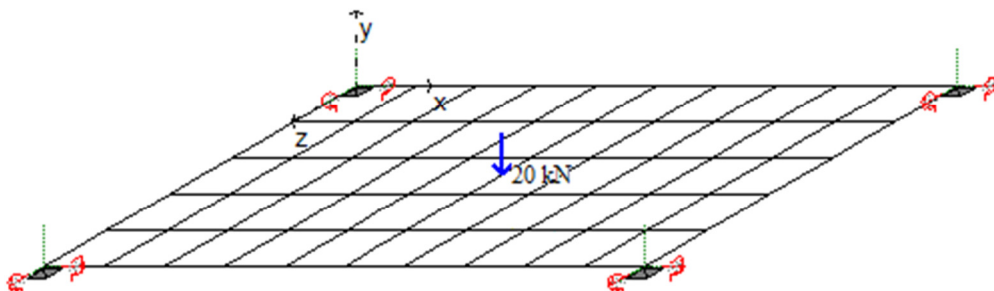
Software	Elementos de casca	Elementos de Interface	Discretização em x	Discretização em y	Flecha máxima (cm)
SAP	40	0	10	2	-0.26121
FEMOOP	40	0	10	2	-0.26516
FEMOOP	40	10	10	2	-0.26993
Cantoneira engastada e livre					
SAP	40	0	10	2	-1.21238
FEMOOP	40	0	10	2	-1.22248
FEMOOP	40	10	10	2	-1.26758

Nota-se que os resultados são próximos indicando que os elementos de casca e de interface implementados apresentam resultados satisfatórios para ambos os casos. Na análise com elementos de casca e interface foi considerada interação total longitudinal, transversal e vertical. Observa-se também que quando a análise é feita usando apenas elementos de casca ocorre um deslocamento menor e isso pode ser explicado pela sobreposição de massas na ligação entre as duas abas da cantoneira que irá aumentar a inércia da seção transversal reduzindo o deslocamento vertical. A Fig. 9 ilustra a deformada da viga engastada-livre.

**Figura 9. Deformada na cantoneira engastada e livre**

4.3 Exemplo 3

Nesse exemplo será analisado o elemento de casca de nove nós associado ao elemento de interface do tipo 3. O exemplo trata-se de uma laje de concreto, com módulo de elasticidade de 35.4 GPa, de 5 m de comprimento por 3 m de largura e espessura de 10 cm. A laje encontra-se apoiada nos seus vértices e submetida a uma carga concentrada de 20 kN no centro, conforme ilustra a Fig. 10.

**Figura 10. Laje modelada com elementos de casca de nove nós**

A representação da laje de concreto foi feita de quatro formas diferentes sendo que na primeira foi usado apenas o elemento de casca de nove nós como mostra a Fig. 8. Em seguida a laje de concreto de 10 cm foi dividida em duas lajes iguais de 5 cm cada sendo a ligação entre elas feita pelo elemento de interface do tipo 3. A ligação através dos elementos de interface foi feita de três formas diferentes, na primeira foi usada duas linhas de elementos de interface, sendo 5 elementos de interface na direção z e 10 em x , interceptando no centro da laje. Na segunda, foi acrescentada a essas duas linhas mais quatro linhas de elementos de interface no contorno da laje, totalizando 45 elementos de interface. E na terceira, além dos 45 elementos, foram adicionadas mais quatro linhas de elementos próximas ao contorno, a uma distância de 1 m na direção x e 0.6 m na direção y . Também foi feita uma análise com o software comercial SAP 2000 usando o elemento *Shell Thick*. A Tabela 7 ilustra os resultados das análises descritas e o erro associado.

Tabela 7. Flecha máxima na laje

Item	Software	Elementos de casca	Elementos de interface	Desloc. (cm)	Item Avaliado	Erro
1	SAP	100	0	-0.10674	3--4	0.63%
2	SAP	200	0	-0.63422	3--5	90.98%
3	SAP	400	0	-0.6357	3--6	7.76%
4	FEMOOP	50	0	-0.6317	4--6	7.79%
5	FEMOOP	100	15	-1.2141	3--7	1.33%
6	FEMOOP	100	45	-0.6850	4--7	1.97%
7	FEMOOP	100	75	-0.6441		

Nota-se pelos resultados obtidos que quando melhoramos a discretização no SAP 2000, 100, 200 e 400 elementos, o deslocamento tende a convergir para próximo de 0.63 cm, ficando bem próximo do elemento de casca (item 4) e próximo do elemento de casca mais o de interface (item 6). O item 5 apresenta um erro muito alto porque os elementos de interface estão apenas no meio do vão não conseguindo impedir o deslizamento entre as duas lajes no contorno delas, onde o deslizamento é máximo. Quando se insere elementos de interface nesse contorno o resultado melhora (item 6) e quando acrescentamos mais quatro linhas de elementos de interface, próximas ao contorno, o resultado converge e o erro diminui consideravelmente. A Fig. 11 abaixo ilustra a deformada das duas lajes conectadas com 45 elementos de interface. Nas análises com elementos de interface foram consideradas interação total longitudinal, transversal e vertical.

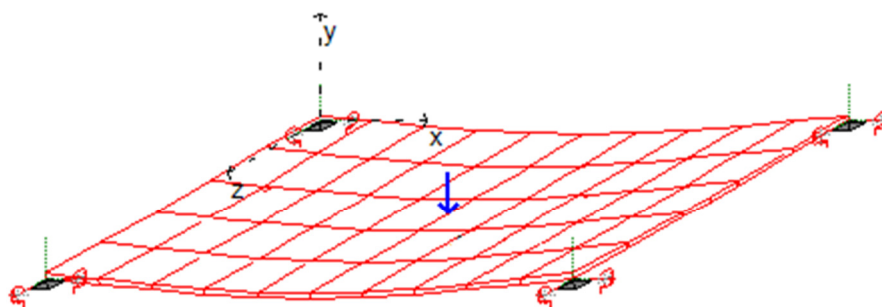


Figura 11. Deformada da laje usando elementos de casca e de interface

4.4 Exemplo 4

Nesse exemplo será usado o elemento de casca de nove nós e o elemento de interface do tipo 1 para representar um perfil I de aço, com módulo de elasticidade de 200 GPa, de 8 metros de comprimento e biapoiado nos nós da extremidade da mesa inferior sob uma carga de 200 kN no meio do vão, como mostra Fig. 12 e com a seção transversal ilustrada pela Fig. 13.

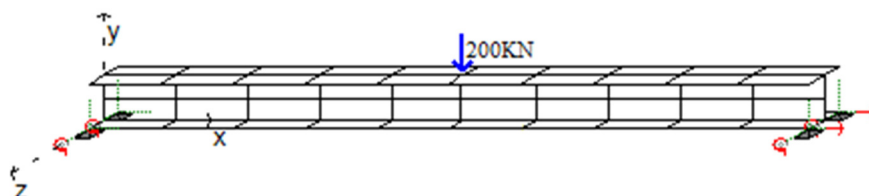


Figura 12. Perfil de aço discretizado com elementos de casca e de interface

Nesse exemplo será avaliada a diferença de flecha máxima usando apenas os elementos de casca e usando os elementos de casca em conjunto com os de interface. O elemento de interface faz a ligação da alma com a mesa evitando a sobreposição de áreas que acontece quando se usa apenas o elemento de casca. A Fig. 13 abaixo ilustra essa sobreposição de áreas através do aumento da altura da alma (Δx)

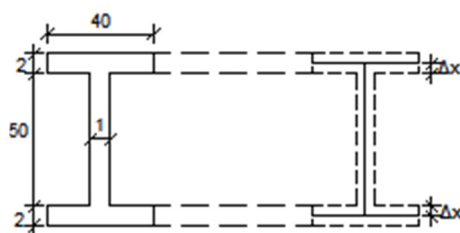


Figura 13. Seção transversal com aumento da altura do perfil I

Para verificar qual análise gera um resultado mais próximo do real a viga da Fig. 13 foi analisada usando o elemento sólido do software comercial SAP 2000 para diversas discretizações. A avaliação da flecha máxima foi feita no local de aplicação da carga, ou seja, na mesa superior do perfil. Os diversos valores encontrados são mostrados na Tabela 8 abaixo e a Fig. 14 mostra a deformada do perfil I obtida a partir do gerador de malha.

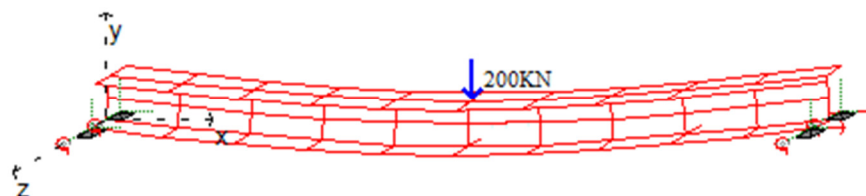


Figura 14. Deformada do perfil I

Tabela 8. Deslocamento vertical considerando diferentes discretizações

Software	Elementos Sólidos	Elementos de casca	Elementos de Interface	Desloc. (cm)	Discretização em x	Discretização em y
SAP	60	0	0	-1.03056	10	2
SAP	400	0	0	-1.20134	20	8
SAP	800	0	0	-1.31298	40	8
SAP	1600	0	0	-1.3970	80	8
SAP	0	60	0	-1.01403	10	2
FEMOOP	0	15	0	-0.98921	5	1
FEMOOP	0	60	0	-1.04345	10	2
FEMOOP	0	400	0	-1.29227	20	8
FEMOOP	0	15	5	-1.15055	5	1
FEMOOP	0	60	10	-1.20712	10	2
FEMOOP	0	400	40	-1.45831	20	8

Nota-se para este exemplo que é necessário melhorar a discretização de todos os modelos analisados para encontramos o valor de convergência do deslocamento. Quando aumentamos a discretização dos elementos de casca mais os elementos de interface, 15, 60, 400, o valor tende a convergir para 1.45 que é próximo do deslocamento obtido a partir do elemento sólido do software comercial SAP 2000, para a discretização usando 1600 elementos sólidos. No SAP 2000 os elementos sólidos apresentam apenas 3 graus de liberdade por nó (apenas as translações) o que exige um refinamento grande da malha para se ter uma boa resposta. Além disso, como era esperado, a representação usando apenas elementos de casca apresenta um deslocamento menor (-1.29 cm) do que quando usamos os elementos de casca associado aos elementos de interface (-1.45 cm) e isso pode ser explicado pela sobreposição de massas na ligação entre a alma e mesa do perfil, levando ao aumento da inércia da seção transversal e consequente aumento de rigidez do perfil.

5 CONCLUSÕES

Esse trabalho apresenta uma formulação de um elemento finito de interface capaz de ser associado a elementos planos de casca em três diferentes combinações. O objetivo da implementação desse elemento é simular conexões deformáveis entre diferentes elementos que possam ser analisados pela teoria de casca de Reissner-Mindlin. O elemento proposto também mostra ser eficaz quando se deseja evitar a sobreposição de áreas, ou alteração das dimensões da seção transversal, quando se utiliza um modelo de discretização em elementos de casca para uma análise estrutural qualquer.

Diversos exemplos foram analisados para verificar a potencialidade do elemento implementado nesse trabalho. Em cada exemplo as análises foram comparadas usando apenas os elementos de casca, elementos de casca associados aos elementos de interface, soluções analíticas considerando análise unidimensional, e um software comercial de análise estrutural. Os resultados mostram que o elemento implementado é uma ferramenta útil para análise estrutural de algumas situações práticas.

AGRADECIMENTOS

Os autores gostariam de agradecer a Universidade Federal de Ouro Preto/PROPEC, o CNPq, e a FAPEMIG, pelo apoio financeiro.

REFERÊNCIAS

- Batoz J.L., Hammadi F., Zheng C., Zhong W. (2000) On the linear analysis of plates and shells using a new-16 degrees of freedom flat shell elemento. *Computers and Structures* v.78, p. 11 - 20.
- Carol I., López C. M., Roa O. (2001). *Micromechanical analysis of quasi-brittle materials using fracture-based interface elements*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, v. 52, p. 193 – 215.
- Crisfield M. A. (2000) *Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures*, John Wiley & Sons Ltd. Bafins Lane, Chichester.
- Goodman R. E., Taylor R. L., Brekke T. L. (1968). *A model for the mechanics of jointed rock*. J. Soil Mech. Fdns. Div., ASCE, v. 99, p. 637 - 659.
- Guimarães, L. G. S. (1992). Disciplina Orientada a Objetos para Análise e Visualização Bidimensional de Modelos de Elementos Finitos. Dissertação de Mestrado, PUC-Rio, Departamento de Engenharia Civil.
- Huang Z., Burgess I. W., Plank R. J. (1999) *Nonlinear Analysis of Reinforced Concrete Slabs Subjected to Fire*. ACI Structural Journal, 96(1), 127-135.
- Kaliakin V. N., Li J. (1995). *Insight into deficiencies associated with commonly used zero thickness interface elements*. Computers and Geotechnics, v. 17, p. 225 - 252.
- Hughes Thomas J. R. (1987) *The Finite Element Method*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J.
- Pereira, J. C (2005) *Curso de Estabilidade Estrutural*, Florianópolis.
- Silva A. R. (2006) *Análise Numérica de Vigas Mistas com Interação Parcial*, Dissertação de Mestrado, PROPEC, DECIV, Escola de Minas, UFOP.
- Silva A. R. (2010) *Análise Numérica de Elementos Estruturais com Interação Parcial*, Tese de Doutorado, PROPEC, DECIV, Escola de Minas, UFOP.
- Sousa Jr. J. B. M., Silva, A. R. (2007) Nonlinear analysis of partially connected composite beams using interface elements. *Finite Elements in Analysis and Design.* , v.43, p.954 - 964.
- Sousa Jr., João Batista M., Silva, A. R. (2009) A family of interface elements for the analysis of composite beams with interlayer slip. *Finite Elements in Analysis and Design.*, v.45, p.305 - 314.
- Sousa Jr, João Batista M., SILVA, A. R. (2010) Analytical and numerical analysis of multilayered beams with interlayer slip. *Engineering Structures.* , v.32, p.1671 - 1680.
- Sousa Jr., João Batista M., Oliveira, Claudio E.M., SILVA, A. R. (2010) Displacement-based nonlinear finite element analysis of composite beam columns with partial interaction. *Journal of Constructional Steel Research.* , v.66, p.772 - 779.