



SOLUÇÃO ANALÍTICA DE UMA CAVIDADE ACÚSTICA RÍGIDA ACOPLADA A UMA PLACA FLEXÍVEL EM VIBRAÇÕES LIVRES

Jaime Rolando Rojas Huacanca jrojash.mat@gmail.com

Universidade de Brasília, Integridade de Materiais da Engenharia
Campus do Gama - UED, 1º Andar, sl. 35, 72.444-240, Gama-DF

Marcus Vinicius Girão de Moraes mvmoraes@unb.br

Álvaro Campos Ferreira alvaro.campos.ferreira@gmail.com

Universidade de Brasília, Departamento de Engenharia Mecânica
Campus Universitário Darcy Ribeiro, 70910-900, Brasília- DF, Brasil

Resumo. *O habitáculo de um veículo automotivo pode ser considerada à grosso modo como a cavidade acústica acoplada a sua estrutura flexível. A vibração transmitida pela estrutura, devido ao motor ou a trepidação da pista de rolagem, gera perturbações acústicas no interior desta cavidade responsáveis pelo desconforto sonoro dos passageiros. O problema de vibroacústica, relativamente complexo, pode ser simplificado em geometrias mais simples, a fim de aplicar mais facilmente técnicas de análise analítica, numérica e experimental. Este trabalho apresenta a solução analítica do sistema vibroacústico. A análise modal analítica deste sistema é desenvolvido utilizando os métodos separação de variáveis e resíduos ponderados (Ritz-Galerkin), gerando um problema de valores próprios não-lineares. Este problema é determinado utilizando a técnica matriz de iteração. Surgem limitações para a técnica matriz de iteração, já que é adaptada apenas para fluidos leves (ar). As comparações com o projeto CarAcous2 e outros da literatura são a validação de solução analítica do presente trabalho, verificando-se uma boa aproximação com os resultados.*

Palavras chaves: *Análise modal, Cavidade acústica, Placas esbeltas, Vibroacústica e Método de Galerkin.*

1 INTRODUÇÃO

Em nosso cotidiano estamos continuamente sujeitos a presença de ruídos em diferentes locais, como exemplo temos regiões confinadas, aqui definidas como cavidades. Estas cavidades podem ser: cabines de automóveis, trens, aviões, casas de máquinas, salas de concertos, teatros e outros.

O estudo do comportamento acústico nessas cavidades é fundamental para oferecer um nível de conforto ao usuário e, a análise desse comportamento está intimamente ligada ao comprimento de ondas acústicas e às dimensões principais da cavidade, que apresenta frequências naturais e modos acústicos. Além disso, o campo acústico em cavidades apresenta comportamento ressonante, devido às sucessivas reflexões nos contornos das cavidades.

Na presença de um contorno flexível, faz-se o acoplamento entre a vibração da estrutura e as partículas fluidas na interface sólido-fluido. Desta forma, tanto a pressão acústica interna afeta o movimento da estrutura, quanto o movimento da estrutura altera o campo de pressão acústica. O fluido pouco denso e compressível agindo na interação fluido-estrutura, é conhecido como o acoplamento vibroacústico.

Dowell and Voss (1963) iniciaram o estudo analítico da resposta do sistema placa-cavidade. Neste estudo, foram considerados pequenas amplitudes de movimento, de forma que as equações linearizadas de fluxo pudessem ser utilizadas. O objetivo do estudo era determinar os efeitos aerodinâmicos de instabilidade em aeronaves. Lyon (1963) investigou uma pequena caixa retangular (cavidade) com uma parede flexível (painel) e discutiu os efeitos da vibração estrutural na redução do ruído externo em seu interior acústico. O sistema foi submetido a uma pressão sonora externa e avaliado o nível de ruído no interior da cavidade. Calculou-se, através de métodos analíticos, as frequências naturais desacoplada da cavidade e do painel. A redução do ruído externo no interior da cavidade foi calculada através de métodos energéticos, considerando o comportamento físico do sistema em cada faixa de frequência de interesse, relacionado às frequências naturais desacopladas do painel e da cavidade. Lyon (1963) mostrou que em frequências onde o painel é ressonante, pode ocorrer amplificação da pressão sonora externa no interior da cavidade. Esta técnica, discutida posteriormente, tornou-se uma das mais conhecidas para o estudo e análise de problemas de vibroacústica.

Pretlove (1965) apresentou o conceito de modo dominante (relativo à placa ou à cavidade) numa cavidade paralelepípedica sujeita a uma excitação da estrutura flexível. Esta característica depende da contribuição energética de cada meio envolvido. A interação fluido-estrutura foi discutida em termos da rigidez da placa ou do meio acústico.

Para o caso de cavidades acústicas submetidas a situações em que as frequências máximas de excitação possuem comprimentos de ondas na mesma ordem de grandeza das principais dimensões da cavidade, a predição da resposta acústica pôde ser obtida utilizando o modelo modal. Esta abordagem foi proposta por Pretlove (1965). A formulação do modelo numérico é baseada na velocidade potencial acústica e na soma finita das contribuições dos modos de vibração do painel e dos modos acústicos da cavidade desacoplados. Ele estudou ainda as cavidades acústicas fechadas, verificando os efeitos do acoplamento nas frequências e modos de vibração do painel. As soluções analíticas foram obtidas com a utilização de modos acústicos aproximados no vácuo. Dessa forma, Pretlove concluiu que existem duas categorias distintas de sistemas painel-cavidade. No primeiro tipo da cavidade, o comportamento dinâmico do painel é desprezível e no segundo modificações consideráveis são encontradas nos modos e frequências

de vibração do sistema. Mais tarde, Pretlove (1966) estudou o caso de vibrações forçadas do mesmo tipo de sistema analisando a redução do ruído externo em caixas vibroacústicas.

Guy and Bhattacharya (1973) relatam sobre a influência de uma placa finita apoiado a uma cavidade finita na transmissão de som através da placa e sobre a vibração da placa. Tais fenômenos como a perda de transmissão negativa, placa acoplada e ressonância de cavidade são facilmente identificados a partir das expressões finais. Uma técnica gráfica, utilizada pela primeira vez em um estudo unidimensional deste caso, mostra-se aplicável no caso tridimensional para prever as frequências de interesse. Guy and Bhattacharya (1973) fizeram uma síntese dos trabalhos Lyon (1963) e Pretlove (1965), onde desenvolveram um modelo teórico e experimental da perda de transmissão sonora em uma placa apoiada em uma cavidade utilizando a velocidade potencial acústica e os modos do painel e da cavidade. Neste trabalho são discutidos diversos efeitos do acoplamento vibroacústico tais como: aumento da transmissão sonora em cavidades, ressonância do painel, ressonância da cavidade, impedância acústica e coincidência da velocidade de vibração com a velocidade do som.

Qaisi (1988) apresentou um método para calcular as frequências naturais e modos de vibração de uma placa retangular apoiado por uma cavidade retangular fechada. O movimento da placa é representado por um número de funções admissíveis constituídos por modos normais in vácuo para placas simplesmente apoiadas, e funções de viga para placas totalmente engastada. O movimento acústico é descrito analiticamente em termos de tais funções. Isto permite que a vibração de todo o sistema a ser tratada de forma adequada, em termos de um pequeno número de modos de placa. A solução de vibração livre para o sistema acoplado é obtido quer diretamente, através da resolução da equação placa de movimento ou por formulação das massas e rigidez matrizes de cada subsistema numericamente.

Cardoso (2010) estudou a interação dinâmica de dois meios, uma placa retangular engastada e uma cavidade acústica rígida e fechada, constituindo assim o sistema acoplado. Desta forma, realizou o estudo das características dinâmicas do sistema acoplado através da determinação das suas frequências e formas naturais. Como tal, pretende-se, numa primeira fase, desenvolver um modelo analítico do sistema acoplado que permita uma abordagem analítica aproximada do problema. Numa segunda fase do seu trabalho, pretende-se efetuar uma análise por elementos finitos. Numa última fase de seu trabalho, desenvolvido um estudo experimental do sistema placa-cavidade que apoie todo o estudo efetuado e permita uma melhor compreensão física da interação entre a vibração de sistemas mecânicos e o meio, neste caso, um espaço fechado onde o fluido é o ar, assim como a validação dos modelos anteriormente referidos.

Wang and Le (2014) estudaram a análise vibroacústica de um caixa retangular delimitado por uma placa flexível com condição de contorno engastada. As frequências de ressonância e os tempos de decadência do sistema acoplado são obtidos utilizando a teoria de acoplamento modal clássica. Eles mostraram que, quando a espessura da placa é alterada, a força de acoplamento é determinado pela diferença entre as frequências de ressonância do painel e os modos da cavidade.

O presente trabalho apresenta o estudo analítico do problema vibroacústico de uma cavidade acústica rígida acoplada a uma placa flexível. Este trabalho foi resultado da dissertação de mestrado de Huacanca (2015). Busca-se entender o comportamento do sistema acoplado a fim de possibilitar comparações numérico-experimentais, tornando possível o estudo de problemas mais complexos.

2 PROBLEMA VIBROACÚSTICO

O sistema acoplado (Placa+Cavityde) é um problema de interação fluido-estrutura vibroacústico, que depende das propriedades acústica e estrutural desacopladas. A vibração estrutural origina radiação para o meio acústico, excitando o fluido em contacto com a superfície estrutural. Desta interação, surgem efeitos de radiação sonora, por vezes indesejada, cuja resolução passa pela investigação do nível de controle da energia acústica envolvida no processo de interação entre os meios.

2.1 Cavityde Acoplada a uma Placa Flexível

A Figura 1 representa o sistema vibroacústico, placa flexível acoplado com cavityde acústica de dimensões $Lx \times Ly \times Lz$. A placa no lado da cavityde em $z = Lz$ é assumida como flexível e o resto das paredes laterais são assumidos como rígidas.

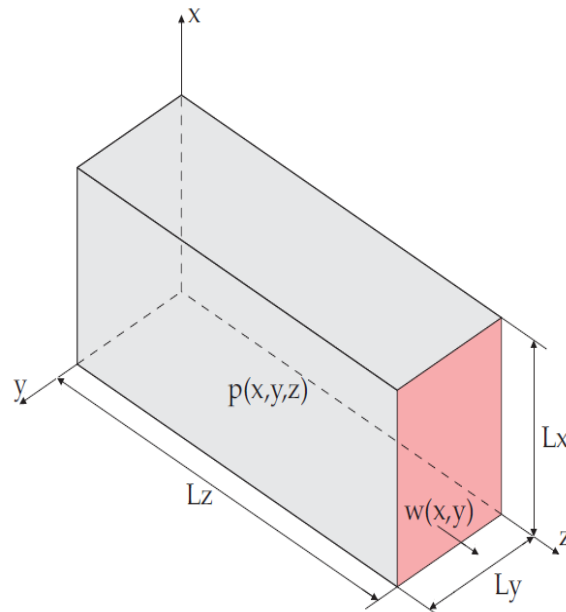


Figura 1: Sistema acoplado placa-cavityde fechado.

A seguinte *equação de onda acústica tridimensional*, descreve a pressão p no interior de sistema acoplado

$$\nabla^2 p(x, y, z, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p(x, y, z, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

onde c é a velocidade de som. As condições de fronteira (CF) que esta equação deve satisfazer são,

$$\text{em } x = 0, Lx : \frac{\partial p(x, y, z, t)}{\partial x} = 0 \quad (2a)$$

$$\text{em } y = 0, Ly : \frac{\partial p(x, y, z, t)}{\partial y} = 0 \quad (2b)$$

$$\text{em } z = 0 : \quad \frac{\partial p(x, y, z, t)}{\partial z} = 0 \quad (2c)$$

$$\text{em } z = Lz : \quad \frac{\partial p(x, y, z, t)}{\partial z} = -\rho_{ar} \frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial t^2} \quad (2d)$$

onde $w(x, y, t)$ é a vibração transversal da placa flexível e ρ_{ar} é a densidade ambiente de fluido (ar).

A análise modal do sistema vibroacústico será desenvolvida pelo Método de Separação de Variáveis (MSV)(Spiegel & Abellanas, 1988) e Resíduos Ponderados (RP: Ritz-Galerkin)(Gockenbach, 2010).

2.2 Pressão em Cavidade com uma Face Móvel

Supõe-se que a pressão p e o movimento da parede flexível w (deflexão da placa) podem ser expressos como uma função separável das variáveis espacial e temporal, assim

$$p(x, y, z, t) = P(x, y, z)e^{i\omega t} \quad (3)$$

$$w(x, y, t) = w_p(x, y)e^{i\omega t} \quad (4)$$

onde ω é a frequência de análise e $i = \sqrt{-1}$ é o unitário imaginário.

Substituindo (3) em (1) obtêm-se a *Equação de Helmholtz*

$$\nabla^2 P(x, y, z) + k^2 P(x, y, z) = 0 \quad (5)$$

onde $P(x, y, z)$ é o campo de pressão acústica e $k = \omega/c$ é o número de onda.

A solução de Eq. (5), considerando as cinco primeiras condições de fronteira (2) é:

$$P(x, y, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \cos \frac{n\pi x}{Lx} \cos \frac{m\pi y}{Ly} A_{nm} \cosh(\mu_{nm} z) \quad (6)$$

$$\text{onde } \mu_{nm}^2 = \left(\frac{n\pi}{Lx}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{Ly}\right)^2 - \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \quad (7)$$

Agora, aplicando a condição de contorno de acoplamento na direção $z = Lz$ (2d), tem-se

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \cos \frac{n\pi x}{Lx} \cos \frac{m\pi y}{Ly} A_{nm} \mu_{nm} \sinh(\mu_{nm} Lz) = \rho_{ar} \omega^2 w_p(x, y) \quad (8)$$

Assim, obtêm-se A_{nm} se a função $w_p(x, y)$ é conhecida. A série infinita representada pela equação (8) é capaz de lidar com qualquer deflexão contínua da placa.

Para uma das paredes flexível do sistema acoplado, considera-se o movimento desta parede como a vibração da *placa simplesmente apoiada* no vácuo, assim

$$w_p(x, y) = \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} W_{rs} \sin \frac{r\pi x}{Lx} \sin \frac{s\pi y}{Ly} \quad (9)$$

onde W_{rs} é a contribuição modal referente ao modo (r, s) .

Por conseguinte, substituindo (9) em (8) obtêm-se

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \cos \frac{n\pi x}{Lx} \cos \frac{m\pi y}{Ly} A_{nm} \mu_{nm} \sinh(\mu_{nm} Lz) = \rho_{ar} \omega^2 \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} W_{rs} \sin \frac{r\pi x}{Lx} \sin \frac{s\pi y}{Ly} \quad (10)$$

Observa-se que o lado esquerdo da equação (10) está composto pelos termos da série duplo-cossenos e o lado direito desta equação está composto pelos termos da série duplo-senos. Então para concatenar ambos lados desta equação e assim achar a constante de acoplamento A_{nm} utiliza-se a interpolação por *série de Fourier dupla*.

2.3 Interpolação por Séries de Fourier Dupla

Realiza-se a interpolação da função modal da placa (9), onde a função duplo-senos periódica nas duas variáveis, de período $2Lx$ na variável x e de período $2Ly$ na variável y , poderia ser expandida como uma série de cossenos duplos harmônicos, assim

$$\sin \frac{r\pi x}{Lx} \sin \frac{s\pi y}{Ly} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_{nm}^{rs} \cos \frac{n\pi x}{Lx} \cos \frac{m\pi y}{Ly} \quad (11)$$

onde os coeficientes de Fourier α_{nm}^{rs} são:

$$\alpha_{00}^{rs} = \frac{4}{\pi^2 r s}, \quad r: \text{ímpar e } s: \text{ímpar} \quad (12)$$

$$\alpha_{n0}^{rs} = \frac{-8r}{\pi^2 s(n^2 - r^2)}, \quad r: \text{ímpar e } s: \text{ímpar} \quad (13)$$

$$\alpha_{0m}^{rs} = \frac{-8s}{\pi^2 r(m^2 - s^2)}, \quad r: \text{ímpar e } s: \text{ímpar} \quad (14)$$

$$\alpha_{nm}^{rs} = \frac{16rs}{\pi^2(n^2 - r^2)(m^2 - s^2)}, \quad r: \text{ímpar e } s: \text{ímpar} \quad (15)$$

Então, o deslocamento da placa fica na função dos cossenos duplos harmônicos, assim

$$w_p(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} (W_{rs} \alpha_{nm}^{rs}) \cos \frac{n\pi x}{Lx} \cos \frac{m\pi y}{Ly} \quad (16)$$

Logo substituindo (16) em (8) obtêm-se o coeficiente de acoplamento

$$A_{nm} = \frac{\rho_{ar} \omega^2}{\mu_{nm} \sinh(\mu_{nm} Lz)} \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} W_{rs} \alpha_{nm}^{rs} \quad (17)$$

Portanto, substituindo A_{nm} em (6), o *campo de pressão acústica* dentro da cavidade, causado pelos (r, s) modos da placa é:

$$P = \rho_{ar} \omega^2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} (W_{rs} \alpha_{nm}^{rs}) \frac{\cosh(\mu_{nm} z)}{\mu_{nm} \sinh(\mu_{nm} Lz)} \cos \frac{n\pi x}{Lx} \cos \frac{m\pi y}{Ly} \quad (18)$$

2.4 Forças Acústicas na Placa Flexível

Examina-se a equação de movimento para a vibração forçada da placa (Szilard, 2004),

$$D \left[\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right] + \rho_s h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = f^{ext} + f^{int} \quad (19)$$

onde

$$D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)} \quad (20)$$

é a rigidez de deflexão da placa, sendo E o módulo de Young, h a espessura e ν o coeficiente de poisson, $w = w(x, y, t)$ é a deflexão ou deslocamento da placa e ρ_s é a densidade da placa. A força $f^{ext} = f^{ext}(x, y, t)$ é a soma de todas as forças externas aplicadas, e $f^{int} = f^{int}(x, y, t)$ é o carregamento de pressão acústica. Aqui vamos supor que a placa está vibrando livremente, isto é, $f^{ext} = 0$, $w(x, y, t) = w_p(x, y)e^{i\omega t}$ e $f^{int} = F^{int}(x, y)e^{i\omega t}$, então a equação do movimento reduz para

$$D \nabla^4 w_p(x, y) - \rho_s h \omega^2 w_p(x, y) = F^{int}(x, y) \quad (21)$$

O carregamento de pressão acústico f^{int} é a pressão acústica aplicada na face interior da placa, isto é $f^{int} = p(x, y, Lz, t)$. Então,

$$\begin{aligned} F^{int}(x, y) &= P(x, y, Lz) \\ &= \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} W_{rs} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_{nm}^{rs} \rho_{ar} \omega^2 \frac{\coth(\mu_{nm} Lz)}{\mu_{nm}} \cos \frac{n\pi x}{Lx} \cos \frac{m\pi y}{Ly} \end{aligned} \quad (22)$$

2.5 Placa Flexível Acoplada a Cavidade

Resolve-se a equação diferencial parcial (EDP) (21) utilizando o método de Galerkin. Então assumindo a função de forma $w_p = w_p(x, y)$ na forma de uma série finita, o qual pode-se escrever

$$\begin{aligned} w_p(x, y) &= \sum_{r=1}^{\bar{r}} \sum_{s=1}^{\bar{s}} W_{rs} \sin \frac{r\pi x}{Lx} \sin \frac{s\pi y}{Ly} \\ &= \sum_{j=1}^N C_j \varphi_j(x, y) \end{aligned} \quad (23)$$

onde, C_j são as coordenadas generalizadas, o qual

$$C_1 = W_{11}, C_2 = W_{12}, \dots, C_n = W_{\bar{r}\bar{s}} \quad (24)$$

e, φ_j são as funções de teste, o qual $\varphi_1 = \sin \frac{1\pi x}{Lx} \sin \frac{1\pi y}{Ly}$, $\varphi_2 = \sin \frac{1\pi x}{Lx} \sin \frac{2\pi y}{Ly}$, ..., $\varphi_N = \sin \frac{\bar{r}\pi x}{Lx} \sin \frac{\bar{s}\pi y}{Ly}$

Também assumindo a força acústica (22) na forma de uma série finita, podemos escrever

$$F^{int}(x, y) = \sum_{j=1}^N C_j \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_{nm}^j g_{nm}(x, y) \quad (25)$$

onde

$$g_{nm}(x, y) = \rho_{ar} \omega^2 \frac{\cosh(\mu_{nm} L z)}{\mu_{nm}} \cos \frac{n\pi x}{Lx} \cos \frac{m\pi y}{Ly} \quad (26)$$

Agora, aplicando o *princípio variacional* para a EDP (21), têm-se

$$\iint_{Ap} [D \nabla^4 w_p - F^{int} - \omega^2 \rho_s h w_p] (\delta w_p) dx dy = 0 \quad (27)$$

Logo, substituindo as séries (25) e (23) no princípio variacional, obtêm-se o sistema de equações na forma simplificada, como segue

$$\underbrace{\left[D \iint_{Ap} \varphi_i \nabla^4 \varphi_j dx dy \right]}_K - \underbrace{\iint_{Ap} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \varphi_i \alpha_{nm}^j g_{nm} dx dy}_Q - \underbrace{\omega^2 \rho_s h \iint_{Ap} \varphi_i \varphi_j dx dy}_M \{C_j\} = 0 \quad (28)$$

Em forma matricial esta equação torna-se

$$[\mathbf{K} - \mathbf{Q} - \omega^2 \mathbf{M}] \{\mathbf{C}\} = \{\mathbf{0}\} \quad (29)$$

onde M e K são as matrizes de massa e rigidez modal da placa respectivamente, Q é a matriz de rigidez acústico transversal e C é o vetor coluna das coordenadas generalizadas.

2.6 Cálculo das Matrizes

A partir da Eq.(29), os elementos da matriz de massa M são calculadas a partir da expressão abaixo:

Matriz de massa

$$M_{ij} = \rho_s h \iint_{Ap} \varphi_i \varphi_j dx dy \quad (30)$$

Substituindo as funções de teste na Eq. (30), logo integrando e aplicando a ortogonalidade, obtêm-se

$$M_{rs}^{r's'} = \begin{cases} \rho_s h (LxLy/4), & \text{se } r' = r \text{ e } s' = s \\ 0, & \text{se } r' = r \text{ e } s' \neq s \\ 0, & \text{se } r' \neq r \text{ e } s' = s \\ 0, & \text{se } r' \neq r \text{ e } s' \neq s \end{cases} \quad (31)$$

então,

$$M = \begin{bmatrix} M_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & M_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & M_{NN} \end{bmatrix}$$

Já os elementos da matriz de rigidez material K são obtidos por:

Matriz de rigidez

$$K_{ij} = D \iint_{Ap} \varphi_i \nabla^4 \varphi_j dx dy \quad (32)$$

substituindo as funções de teste na Eq. (32), depois derivando, integrando e aplicando la ortogonalidade, obtêm-se

$$K_{rs}^{r's'} = \begin{cases} D(LxLy/4) [(r\pi/Lx)^2 + (s\pi/Ly)^2]^2, & \text{se } r' = r \text{ e } s' = s \\ 0, & \text{se } r' = r \text{ e } s' \neq s \\ 0, & \text{se } r' \neq r \text{ e } s' = s \\ 0, & \text{se } r' \neq r \text{ e } s' \neq s \end{cases} \quad (33)$$

então,

$$K = \begin{bmatrix} K_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & K_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & K_{NN} \end{bmatrix}$$

Finalmente, os elementos da matriz de rigidez acústica Q são calculadas a partir da expressão:

Matriz de rigidez acústico

$$Q_{ij} = \iint_{Ap} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \varphi_i(x, y) \alpha_{nm}^j g_{nm}(x, y) dx dy \quad (34)$$

Substituindo g_{nm} e a função teste φ_i na Eq. (34), obtêm-se

$$Q_{rs}^{r's'} = \int_0^{Lx} \int_0^{Ly} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sin \frac{r'\pi x}{Lx} \sin \frac{s'\pi y}{Ly} \right) \alpha_{nm}^{rs} \rho_{ar} \omega^2 \frac{\coth(\mu_{nm}Lz)}{\mu_{nm}} \times \cos \frac{n\pi x}{Lx} \cos \frac{m\pi y}{Ly} dx dy \quad (35)$$

Ao substituir a expressão (11) na equação (35), tem-se

$$Q_{rs}^{r's'} = \rho_{ar} \omega^2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n'=0}^{\infty} \sum_{m'=0}^{\infty} \frac{\alpha_{n'm'}^{r's'} \alpha_{nm}^{rs}}{\mu_{nm}} \coth(\mu_{nm}Lz) \int_0^{Lx} \cos \frac{n'\pi x}{Lx} \cos \frac{n\pi x}{Lx} dx \times \int_0^{Ly} \cos \frac{m'\pi y}{Ly} \cos \frac{m\pi y}{Ly} dy \quad (36)$$

Aplicando a ortogonalidade em cada termo da somatória infinita (36), esta equação torna-se

$$Q_{rs}^{r's'} = \rho_{ar} \omega^2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\alpha_{nm}^{rs} \alpha_{nm}^{r's'}}{\mu_{nm}} \coth(\mu_{nm}Lz) \int_0^{Lx} \cos^2 \frac{n\pi x}{Lx} dx \int_0^{Ly} \cos^2 \frac{m\pi y}{Ly} dy \quad (37)$$

É interessante notar a partir da forma de equação (37), que o acoplamento é simétrico, isto é, $Q_{rs}^{r's'} = Q_{r's'}^{rs}$. O termo μ_{nm} é função da frequência angular ω , então afirma-se que os elementos da matriz de rigidez acústico transversal são também função desta frequência.

Na forma matricial, a matriz de rigidez acústica é:

$$Q(\omega) = \begin{bmatrix} Q_{11}(\omega) & Q_{12}(\omega) & \cdots & Q_{1N}(\omega) \\ Q_{21}(\omega) & Q_{22}(\omega) & \cdots & Q_{2N}(\omega) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_{N1}(\omega) & Q_{N2}(\omega) & \cdots & Q_{NN}(\omega) \end{bmatrix}$$

2.7 Problema de Valores Próprios Não-Lineares

A partir da Eq. (29) tem-se

$$[\mathbf{K} - \mathbf{Q}(\omega) - \omega^2 \mathbf{M}] \{\mathbf{C}\} = \{\mathbf{0}\} \quad (38)$$

onde a matriz de rigidez acústica Q é dependente da frequência angular ω e o vetor C incógnita é dado pelo

$$C = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_{11} \\ W_{12} \\ \vdots \\ W_{\overline{rs}} \end{bmatrix} \quad (39)$$

Multiplicando a Eq. (38) pela inversa da matriz M , obtêm-se

$$[\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{K} - \mathbf{Q}(\omega)) - \omega^2 \mathbf{I}] \{\mathbf{C}\} = \mathbf{0} \quad (40)$$

Esta equação é um problema de valores próprios não-lineares, pelo fato que a rigidez acústica transversal é uma função de frequência. A solução dessa equação envolve encontrar os valores próprios da matriz $M^{-1}(K - Q(\omega))$.

Para obter os autovalores (frequências) e autovetores (coordenada generalizada) da matriz $M^{-1}(K - Q(\omega))$ desde Eq. (40), utiliza-se a técnica *matriz de iteração*. O algoritmo desta técnica mostra-se a seguir.

Algoritmo:

Passo 1: Um valor inicial para qualquer frequência natural da placa é encontrado, deixando os termos da rigidez acústica para fora da matriz ($K - Q(\omega)$). Os autovalores ω_0^2 são, então, encontrados a partir da equação matricial

$$[\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{K} - \mathbf{Q}_0) - \omega_0^2 \mathbf{I}] \{\mathbf{C}\} = \mathbf{0} \quad (41)$$

onde, $Q_0 = Q(\omega = 0)$ é a matriz nula.

Passo 2: O valor de ω_0 correspondente ao modo do painel de interesse é então usado para calcular um novo valor da matriz de rigidez, $Q_1(\omega_0)$.

Passo 3: A melhor estimativa da frequência natural do painel, ω_1 , é então encontrada a partir

da equação

$$[\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{K} - \mathbf{Q}_1(\omega_0)) - \omega_1^2 \mathbf{I}]\{\mathbf{C}\} = \mathbf{0} \quad (42)$$

Passo 4: Este processo continua até que um valor suficientemente preciso da frequência natural é obtido.

3 ESTUDO DE CASOS

Neste seção mostra-se os resultados e análises analíticos comparados com as soluções analíticas aproximadas de Pretlove (1965). Também mostra-se a comparação da solução analítica com os resultados numéricos do ANSOL (Advanced Numerical Solutions - Soluções Numéricas Avançadas)(ANSOL, 1990). E ainda mais mostra-se a comparação com os resultados numérico e experimental apresentados por Ferreira (2012) e Melo (2013), respectivamente.

3.1 Cavidade de Pretlove

Estuda-se o sistema placa e cavidade acoplada de Pretlove (1965), tal qual mostra-se na Fig. 2, para fazer comparações com os resultados analíticos.

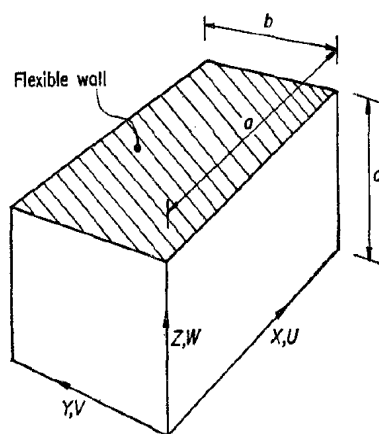


Figura 2: Sistema placa e cavidade acoplada (Pretlove, 1965).

Dados físicos e geométricos(Pretlove, 1965): As dimensões de sistema acoplado (Placa+Cavidade) de Pretlove são: $0.30 \times 0.15 \times 0.15$. A placa analisada é de material Alumínio, com espessura $h = 1 \times 10^{-3}m$, densidade $\rho_s = 2700Kg/m^3$, módulo de Young $E = 67GPa$ e coeficiente de Poisson $\nu = 0.33$. A temperatura é de $10^\circ C$, com uma velocidade de som $c = 337.33m/s$ e densidade do ar $\rho_{ar} = 1.25Kg/m^3$.

Validação dos Resultados

A Figura 3 mostra o gráfico das frequências naturais do sistema acoplado, comparados analítico com semi-analítico do Pretlove (1965). Neste gráfico observa-se que o erro é mínimo.

A Figura 4 apresenta as formas modais de vibração da placa com efeito da rigidez acústica, e também apresentado suas respectivas frequências naturais para cada modo (r, s) , o qual foram obtidos como uma combinação dos 4 primeiro modos da placa.

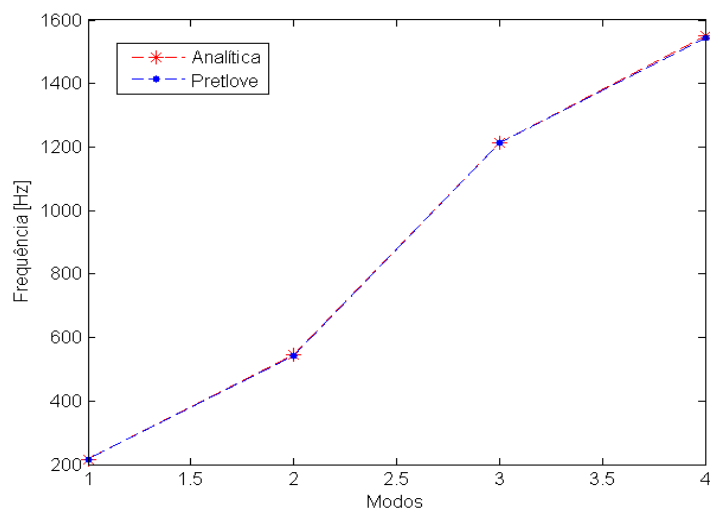


Figura 3: Gráfico das frequências naturais

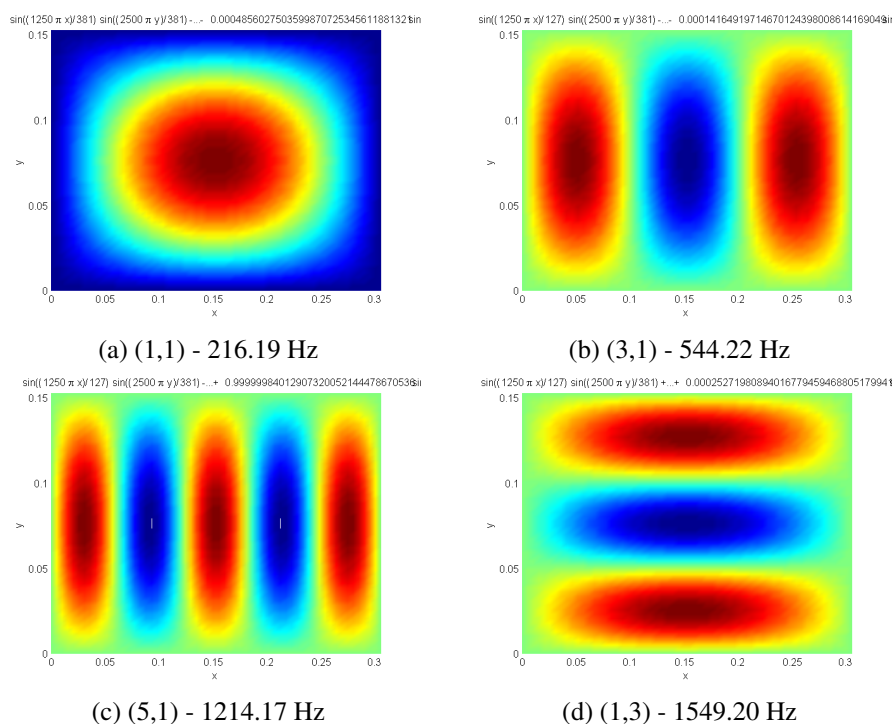


Figura 4: Formas modais e respectivas frequências naturais da placa acoplada.

3.2 Cavidade ANSOL

A Figura 5 mostra-se o sistema placa e cavidade acoplada de ANSOL (Advanced Numerical Solutions - Soluções Numéricas Avançadas)(ANSOL, 1990). Esta cavidade de ANSOL será estudada considerando dentro dele os fluidos água e ar. Logo para cada caso do fluido os resultados serão mostrados.

Dados físicos e geométricos(ANSOL, 1990): O sistema estudado por ANSOL é uma cavidade acústica quadrada de dimensões $1 \times 1 \times 1$. A placa analisada é de material Alumínio, com

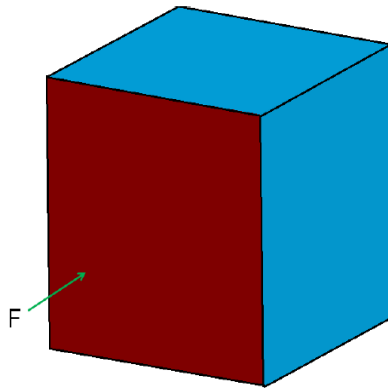


Figura 5: Sistema placa e cavidade acoplada de ANSOL

uma espessura $h = 0.01m$, de densidade $\rho_s = 7900Kg/m^3$, módulo de Young $E = 210GPa$ e coeficiente de Poisson $\nu = 0.30$. O estudo foi realizado a uma temperatura de $20^\circ C$ para o fluido denso (água), com velocidade de som $c = 1481m/s$ e densidade do água $\rho_w = 1000Kg/m^3$. E a temperatura de $20^\circ C$ para o fluido leve (ar), com uma velocidade de som $c = 343.26m/s$ e densidade do ar $\rho_{ar} = 1.20Kg/m^3$.

Cavidade com Fluido Denso (Água)

Neste caso, primeiramente tenta-se calcular as frequências da cavidade do ANSOL (1990) contendo água, de uma forma analítica baseado no método de matriz de iteração, o qual foi estudada neste trabalho.

A Figura 6 mostra-se as frequências da cavidade de Ansol contendo água, obtidas analiticamente utilizando o método matriz de iteração (Matlab) e numericamente (ANSYS), para logo ser comparados com os resultados do Ansol (software Coustyx). Os resultados numéricos do ANSYS aproximam-se bastante dos resultados do programa Coustyx (ANSOL, 1990). A solução analítica (utilizando a técnica matriz de iteração) distoam dos resultados numéricos obtidos por ANSYS e Coustyx (Ansol). Ou seja a solução analítica obtida pela técnica matriz de iteração não apresenta resultados válidos para cavidades contendo água.

A Figura 7 mostra-se as formas modais da cavidade de Ansol contendo água, obtidos com o software Ansys.

Cavidade com Fluido Leve (Ar)

Agora, faça-se o ensaio da cavidade de (ANSOL, 1990) contendo o fluido ar, utilizando a técnica *matriz de iteração* estudada neste artigo.

A Figura 8 mostra o gráfico das frequências naturais da placa e cavidade acoplada, obtidas de uma forma analítica (método matriz de iteração) e numérica (Ansys) contendo ar. Para a solução numérica foram considerando 17576 nós e 16250 elementos da malha. Neste gráfico observa-se que o erro é mínimo, já que os resultados coincidiram. Por conseguinte a técnica matriz de iteração é válida somente para cavidades contendo fluido leve (ar).

A Figura 9 apresenta as formas modais de vibração da placa com efeito da rigidez acústica contendo ar. A gráfica foi obtida utilizando o software Matlab, fazendo uma combinação dos modos da placa.

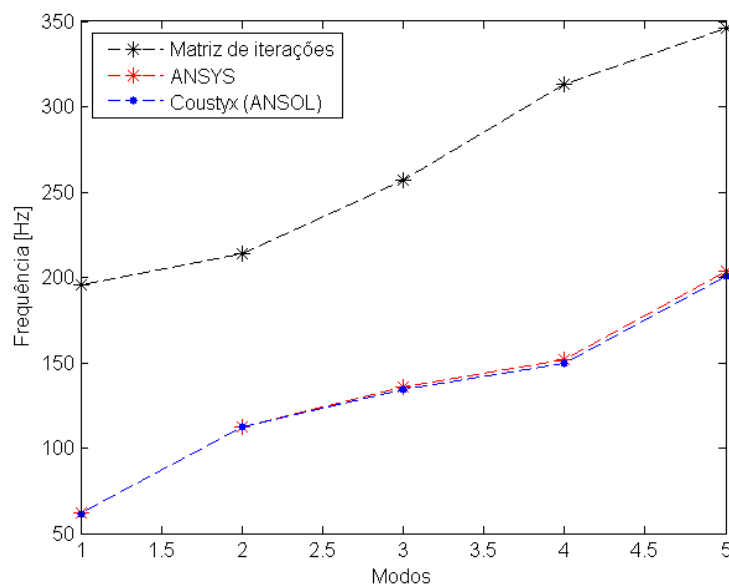


Figura 6: Frequências naturais de cavityde do ANSOL contendo água.

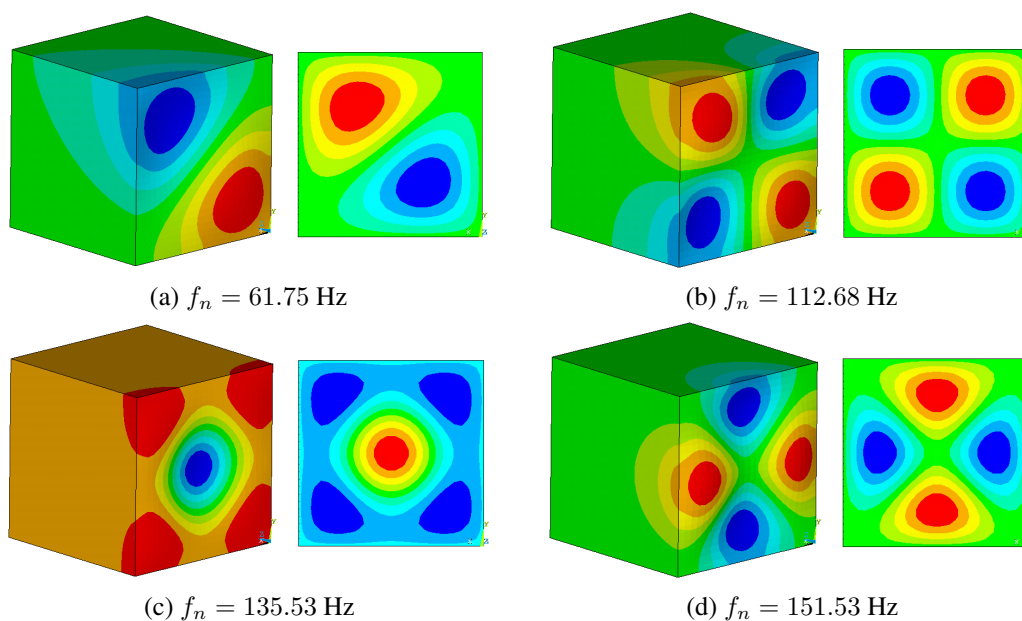


Figura 7: Formas modais de cavityde do ANSOL contendo água.

3.3 Cavityde de Auralização

A cavityde estudada é a cavityde vibroacústica experimental proposta por Melo (2013), tal como mostra-se na Fig. 10. Esta cavityde encontram-se no departamento de Engenharia Mecânica da Universidade de Brasília - Brasil, para estudo vibroacústico. Essa cavityde possui uma geometria bem definida, com cinco paredes completamente rígidas, do ponto de vista acústico, e uma parede flexível, do ponto de vista dinâmica estrutural (Tourinho, 2011).

Dados físicos e geométricos(Melo, 2013): As dimensões da cavityde de auralização do projeto CarAcous2 (Ferreira & Moraes, 2013) são: $0.50 \times 0.80 \times 0.326$. A placa analisada é de

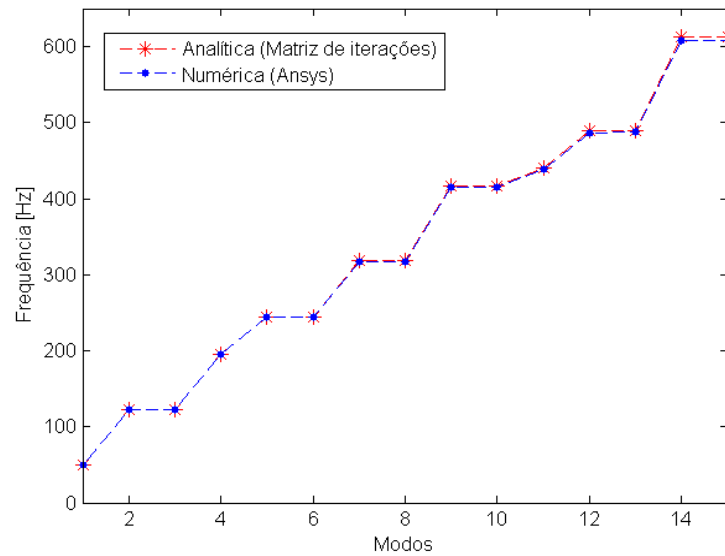


Figura 8: Frequências naturais de cavidade do ANSOL contendo ar.

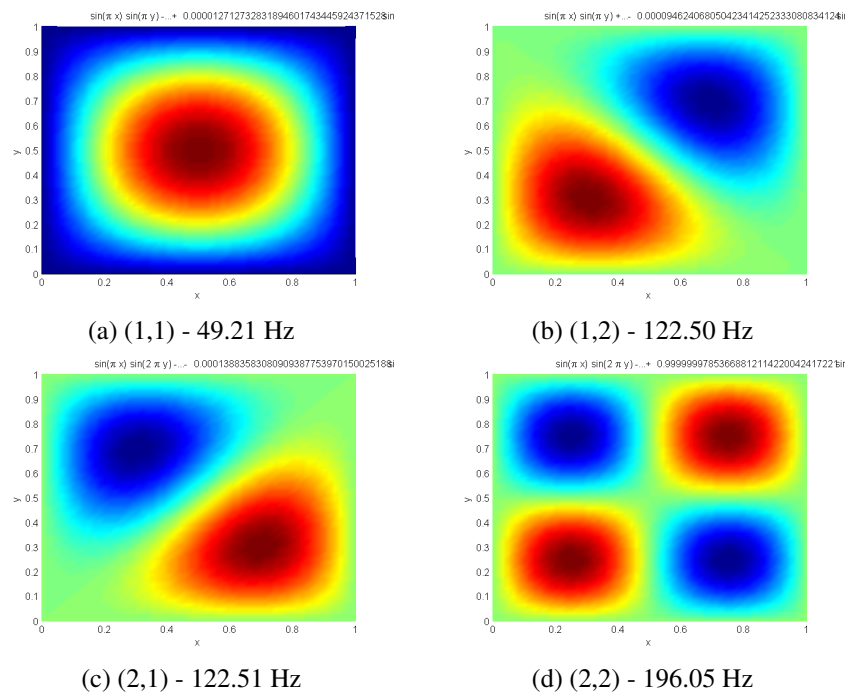


Figura 9: Formas modais da placa acoplada (com efeito de rigidez acústica) contendo ar.

material Alumínio, com uma espessura $h = 1 \times 10^{-3}m$, densidade $\rho_s = 2700Kg/m^3$, módulo de Young $E = 69GPa$ e coeficiente de Poisson $\nu = 0.33$. O estudo foi realizado na temperatura de $25^\circ C$, com uma velocidade de som $c = 346.18m/s$ e densidade do ar $\rho_{ar} = 1.18Kg/m^3$.

Solução Desacoplada: Placa e Cavidade

Cavidade Acústica Retangular Fechada de Paredes Rígidas



Figura 10: Cavidade experimental do projeto CarAcous2.

A Tabela (1) apresenta os resultados analíticos, numéricos (Ferreira, 2012) e experimentais (Melo, 2013), das frequências naturais f_{ijk}^A calculadas para os 8 primeiros modos naturais da cavidade acústica retangular limitada por paredes rígidas. Os resultados numéricos e experimentais foram comparados com os resultados analíticos. Nesta tabela, A/E simboliza o erro entre os resultados analítico e experimental e A/N é o erro entre os resultados analítico e numérico.

Placa Retangular Simplesmente Apoiada

A Tabela (2) apresenta as frequências naturais da placa simplesmente apoiada no vácuo, determinadas de forma analítica e com o método de Galerkin, calculadas para os seis primeiros modos naturais. Os resultados analíticos foram avaliados entre o resultado obtido pelo método de Galerkin e também comparados com o resultado numérico obtido por Ferreira and Morais (2013), utilizando o software ANSYS; e também foi calculado os erros entre eles. Nesta tabela, A/G e A/N simbolizam o erro relativo entre os resultados analítico com o método de Galerkin e com o resultado numérico respectivamente.

Solução Acoplada: Placa+Cavidade

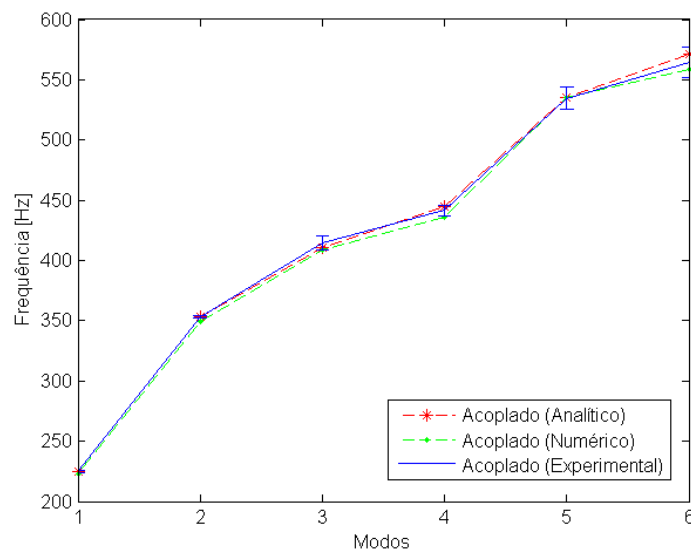
Na Tabela (3) mostra-se as frequências naturais da placa no vácuo e do sistema acoplada (placa+cavidade), utilizando os modos (r,s) da placa. Nesta Tabela as frequências do sistema acoplado foram calculados utilizando um, dois, três, quatro e cinco primeiros modos respectivamente.

A Figura 11 mostra o gráfico das frequências naturais do sistema acoplado (placa+cavidade), obtidas de uma forma analítica, numérica (Ferreira, 2012) e experimental (Melo, 2013). Neste gráfico observa-se que os resultados analítico e numérico encontram-se na faixa do erro experimental.

Logo, a Figura 12 mostra as formas modais do sistema acoplado (placa+cavidade) para cada frequência natural. A gráfica destes modos foram obtidos utilizando o software ANSYS, considerando 17576 nós e 16250 elementos.

Tabela 1: Frequências naturais da cavidade acústica fechada de paredes rígidas.

N°	Modo (i,j,k)	Cavidade fechada 0.50x0.80x0.326			Erro A/E (%)	Erro A/N (%)
		Analítico [Hz]	Numérico (Ferreira) [Hz]	Experimental (Melo) [Hz]		
1	(0,1,0)	215.63	215.85	214.08±1.65	0.72	0.10
2	(1,0,0)	345.00	345.35	347.20±1.20	0.64	0.10
3	(1,1,0)	406.84	407.26	408.61±1.72	0.44	0.10
4	(0,2,0)	431.25	433.03	431.73±4.36	0.11	0.41
5	(0,0,1)	529.14	529.69	524.64±1.60	0.85	0.10
6	(1,2,0)	552.27	553.88	557.54±5.55	0.95	0.29
7	(0,1,1)	571.39	571.98	567.89±5.42	0.61	0.10
8	(1,0,1)	631.68	632.33	630.79±4.48	0.14	0.10

**Figura 11: Frequências naturais da cavidade de auralização.**

4 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

O presente trabalho apresenta o estudo analítico do problema vibroacústico de uma cavidade acústica rígida acoplada a uma placa flexível. A solução fechada, proposta por Pretlove (1965), é obtida através do método de Ritz-Galerkin. A solução em vibrações livres resulta num problema de valores próprios não-lineares. Logo este problema de autovalores não-linear

Tabela 2: Frequências naturais de vibração da placa simplesmente apoiada.

Placa retangular no vácuo 0.50×0.80						
Nº	Modo (r,s)	Analítico [Hz]	Galerkin [Hz]	Numérico (Ferreira) [Hz]	Erro A/G (%)	Erro A/N (%)
01	(1,1)	13.51	13.51	13.49	0.00	0.09
02	(1,2)	24.89	24.89	24.84	0.00	0.20
03	(2,1)	42.65	42.65	42.56	0.00	0.20
04	(1,3)	43.86	43.86	43.76	0.00	0.24
05	(2,2)	54.03	54.03	53.84	0.00	0.36
06	(1,4)	70.42	70.42	70.25	0.00	0.24

Tabela 3: Frequências naturais da placa no vácuo e sistema acoplado (placa+cavidade).

Modo (r,s)	Placa no vácuo 0.50×0.80	Acoplada : Placa+Cavidade Fechada $0.50 \times 0.80 \times 0.326$				
	Frequência [Hz]	1 modo [Hz]	2 modos [Hz]	3 modos [Hz]	4 modos [Hz]	5 modos [Hz]
(1,1)	13.51	52.33	23.83	23.83	23.81	23.81
(1,2)	24.89	-	53.28	42.28	39.60	39.60
(2,1)	42.65	-	-	53.28	42.29	42.29
(1,3)	43.86	-	-	-	58.91	53.80
(2,2)	54.03	-	-	-	-	58.91

envolve a solução pela técnica de matriz de interações. Esta técnica apresentou bons resultados apenas para problemas vibroacústicos com fluidos leves (ar).

Compara-se a solução analítica com relação a resultados numéricos e experimentais. As comparações com numérico experimentais da Cavidade de Aurelização (Ferreira & Moraes, 2013) e outros exemplos na literatura (Pretlove, 1965; ANSOL, 1990) permitem a validação do desenvolvimento analítica. A comparação com os resultados experimentais (Melo, 2013) exigiram 49 modos da placa para obter um resultado próximo.

Método interação de matrizes é adaptado apenas para fluidos leves. No exemplo "cavidade

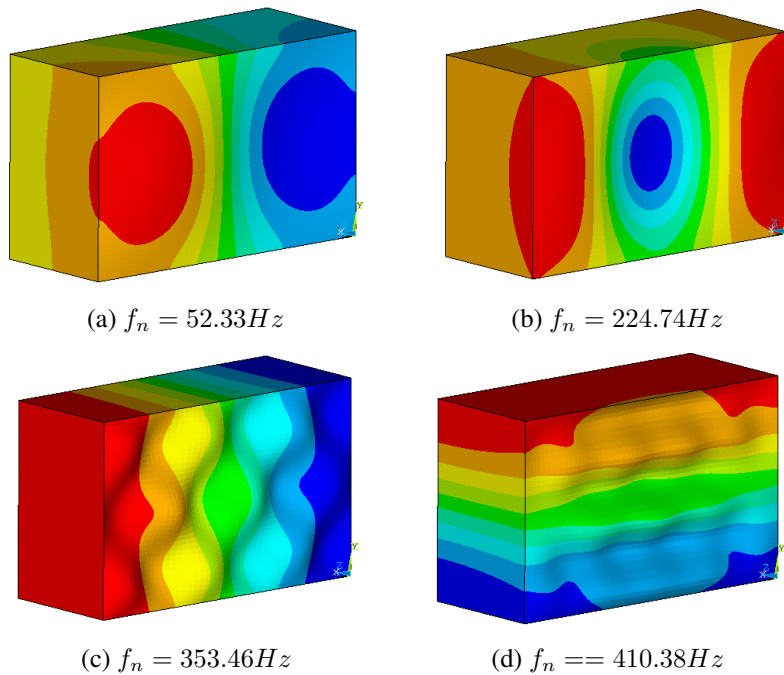


Figura 12: Formas modais do sistema acoplado (placa+cavidade), obtidas utilizando o software ANSYS.

ANSOL"para fluidos densos (água), o procedimento de iteração de matrizes não resulta em valores próximos aos resultados numéricos ANSYS e ANSOL (ANSOL, 1990). Já para fluidos leves (ar), temos concordância entre a solução analítico aproximada por iteração de matrizes e os resultados numéricos. Esta dificuldade de encontrar a solução pela matriz de iteração pode ser atribuída a escolha da inicial da forma modal. A presente solução analítico-aproximada resulta em um problema de valores cuja a matriz de rigidez acoplada é dependente da frequência. A solução deste problema de valores próprios não-linear depende da escolha de uma forma modal aproximada como no método Pseudo-Acoplado (Ribeiro & Pedroso, 2010). Desta forma, a dificuldade em determinar a forma modal para cavidades acústicas preenchidas com fluidos densos pode ser responsável pela dificuldade de solução do método de interação de matrizes.

A técnica modo a modo (sem acoplamento modal) alcançou boa concordância com os resultados experimentais em cavidades cujo fluido é ar. Esta técnica assemelha-se bastante à método Pseudo-Acoplado (Ribeiro & Pedroso, 2010).

Pretende-se ainda investigar os problemas forçados do acoplamento placa cavidade e aprofundar o estudo dimensional dos parâmetros principais do problema. Estudar a transmissibilidade vibroacústica a partir de fonte de excitação mecânica ou acústica. O estudo de técnicas de solução de autovalores próprios não-lineares adaptadas a solução de fluidos denso. Generalizar a solução acoplada para novas condições de contorno da placa (engaste) e da cavidade (dutos abertos).

5 AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem ao apoio a FAP-DF, sob a forma de recursos financeiros, dentro da cadre do projeto CarAcous2 (processo nº 2010/00351-0). E o primeiro e terceiro autor agradecem a CAPES/CNPq pelas bolsas de mestrado.

Referências

- ANSOL. (1990). Rectangular panel backed by a closed cavity. *Advanced Numerical Solutions LLC*, 7.
- Cardoso, L. (2010). *Interação vibroacústica do sistema placa-cavidade fechada: Modelação, experimentação e análise* (Dissertação de Mestrado Mestrado Integrado em Engenharia Mecânica). Faculdade de Engenharia da Universidade de Porto, Departamento de Engenharia Mecânica, Porto, Portugal.
- Dowell, E., & Voss, H. (1963). The effect of a cavity on panel vibrations. *Journal of AIAA*, Vol. 1, 476–477.
- Ferreira, A. (2012). *Comparação analítica numérica de cavidades acústicas e vibro-acústicas* (Monografia de Projeto de Graduação em Engenharia Mecânica). Universidade de Brasília, Brasília-DF, FT, Departamento de Engenharia Mecânica.
- Ferreira, A., & Morais, M. (2013). Modal identification of acoustic cavity-plate problem using 3d fem: numerical and experiental comparison. *CILAMCE XXXIV*, 18.
- Gockenbach, M. (2010). *Partial differential equations: Analytical and numerical methods*. New Jersey: SIAM, 2da ed. (136p)
- Guy, & Bhattacharya. (1973). The transmission of sound through a cavity-backed finite plate. *Journal of Sound and Vibration*, 27(2), 207–223.
- Huacanra, J. R. R. (2015). *Solução analítica de uma cavidade acústica rígida acoplada por uma placa flexível em vibrações livres* (Dissertação de Mestrado em Integridade de Materiais da Engenharia). Universidade de Brasília, Brasília DF, FT-FGA, Programa de Pós-Graduação em Integridade de Materiais em Estrutura.
- Lyon, R. H. (1963). Noise reduction of rectangular enclosures with one flexible wall. *Journal of the Acoustical Society of America*, Vol. 35, pg. 1791–1797.
- Melo, N. (2013). *Análise modal experimental com fonte calibrada de cavidade acústica* (Dissertação de Mestrado em Ciência Mecânica). Universidade de Brasília, Brasília-DF, FT, Programa de Pós-Graduação em Ciências Mecânica.
- Pretlove, A. (1965). Free vibrations of a rectangular panel backed by a closed rectangular cavity. *Journal of Sound Vib.*, 3(2), 197–209.
- Pretlove, A. (1966). Forced vibrations of a rectangular panel backed by a closed rectangular cavity. *Journal of Sound Vib.*, Vol. 3(2), pg. 252–261.
- Qaisi, M. (1988). Free vibrations of a rectangular plate-cavity system. *Journal of Applied Acoustics*, 49-61.
- Ribeiro, P., & Pedroso, L. (2010). Solution of the dynamic interaction problem between a framed structure and an acoustic cavity using imposed deformation functions at the interface. *Journal of Hindawi Publishing Corporation*, 2010(1), 33.
- Spiegel, M., & Abellanas, L. (1988). *Ecuaciones diferenciales básicas y sus soluciones*. Madrid: McGraw-Hill.: Fórmulas y tablas de matemática aplicada. (pp.91-93)
- Szilar, R. (2004). *Theories and applications of plate analysis*. Hoboken, New Jersey: John Wiley e Sons. (1024p)
- Tourinho, A. (2011). *Construção de modelo para análise de funções de transferência de sistemas vibro-acústicos* (Dissertação de Mestrado em Ciência Mecânica). Universidade de Brasília, Brasília-DF, FT, Programa de Pós-Graduação em Ciência Mecânica.
- Wang, Z., & Le. (2014). Vibroacoustic analysis of a rectangular enclosure bounded by a flexible panel with clamped boundary condition. *Journal of Hindawi Publishing Corporation-Shock and Vibration*, 17.