



PROPAGAÇÃO DE ONDAS ACÚSTICAS EM MEIOS HETEROGÊNEOS PELO MÉTODO DOS VOLUMES FINITOS EM MALHAS NÃO ESTRUTURADAS

Julio Tomás Aquije Chacaltana

julio.chacaltana@ufes.br

Programa de Pós Graduação em Engenharia Ambiental, PPGEA/UFES.

Av. Fernando Ferrari 514, 29075-910, Goiabeiras, Vitória. ES – Brasil.

Antônio Manoel Ferreira Frasson

antonio.frasson@ufes.br

Departamento de Engenharia Elétrica, DEL/UFES.

Av. Fernando Ferrari 514, 29075-910, Goiabeiras, Vitória. ES – Brasil.

Carlos Friedrich Loeffler

carlosloeffler@bol.com.br

Programa de Pós Graduação em Engenharia Mecânica, PPGEM/UFES.

Av. Fernando Ferrari 514, 29075-910, Goiabeiras, Vitória. ES – Brasil.

André Bulcão

bulcao@petrobras.com.br

CENPES/PDGeo/GEOF

Centro de Pesquisa e Desenvolvimento Leopoldo A. Miguez de Mello

Av. Jequitiba, 950, Cidade Universitária, Ilha do Fundão, 21941-598. RJ, RJ – Brasil.

Resumo. Neste trabalho é desenvolvido um modelo numérico para realizar a propagação de ondas de pressão em meios não-homogêneos. Uma malha de volumes triangulares é usada para representar de forma discreta o domínio de interesse. A equação da onda de pressão para meio heterogêneo é resolvida em cada volume triangular pelo Método dos Volumes Finitos. O gradiente de pressão nas faces de cada elemento triangular é calculado usando o teorema do gradiente o qual envolve as informações da pressão avaliada nos baricentros dos volumes triangulares adjacentes e dos vértices em comum. A integração no tempo é resolvida de forma explícita. Um código em linguagem Fortran é escrito para solucionar o sistema de equações algébricas com ajuda de um PC. O modelo numérico é usado para resolver

problemas acústicos em meios não homogêneos, como os que caracterizam os casos típicos de propagação de ondas sísmicas. Com este intuito, neste trabalho são apresentadas algumas das simulações realizadas com problemas dinâmicos homogêneos e heterogêneos, que balizaram a eficiência do método nas comparações realizadas com as respostas analíticas disponíveis na literatura.

Palavras-Chave: *Método dos Volumes Finitos, Malhas não-estruturadas, Meio Heterogêneo, Equação da Acústica.*

1 INTRODUÇÃO

Nas engenharias e ciências correlatas, os métodos numéricos da Mecânica Computacional são ferramentas de utilização corrente e fundamentais para análise e solução de problemas estruturais e projetos de máquinas e equipamentos. Problemas envolvendo redes neurais, processamento de sinais, mapeamento costeiro e meteorologia são alguns dos muitos exemplos que podem ser citados. Entre estes, vale destacar a sísmica de prospecção, um dos mais importantes e arrojados campos de aplicação dos métodos numéricos na atualidade, de particular interesse na pesquisa científica brasileira.

No que tange a esta área de pesquisa, do ponto de vista teórico sabe-se que é possível prever a resposta sísmica de um meio heterogêneo, utilizando uma modelação matemática adequada. Assim, através de um tratamento adequado da recuperação de respostas provenientes de pesquisas de campo, é possível identificar o posicionamento de poços de petróleo e partir para a prospecção com probabilidades mais altas de sucesso.

Nesta área de vanguarda é contínua a busca por técnicas que permitam uma definição cada vez mais precisa das feições geológicas, de forma a melhor identificar as regiões mais propícias ao acúmulo de hidrocarbonetos, sendo assim fundamental o aprimoramento tanto da compreensão físico-matemático do problema como das diversas ferramentas numéricas disponíveis e cabíveis de aplicação.

O Método dos Volumes Finitos (MVF) é uma técnica numérica moderna e bastante eficaz, mas tem sido aplicada particularmente em problemas relacionados à Mecânica dos Fluidos (Danu & Tenaud, 2004), não obstante apresentar diversas qualidades e possíveis vantagens que credenciariam sua utilização em outras áreas (Oliveira, 1997 e Patankar, 1980). Na realidade, tal como atuam os mais conhecidos métodos numéricos, como o Método dos Elementos Finitos e o Método dos Elementos de Contorno, o MVF busca a solução numérica de equações diferenciais parciais, não havendo nenhum impedimento para sua aplicação especializando-o à solução de problemas hiperbólicos, como os que caracterizam os casos de propagação de ondas e os problemas da dinâmica estrutural.

O presente trabalho expõe exatamente um resumo do esforço desenvolvido no sentido de aplicar o MVF numa área promissora, a geofísica, especificamente na simulação da propagação das ondas de choque através das camadas rochosas heterogêneas do solo. De modo a se ajustar às particularidades dos problemas citados, um modelo numérico robusto composto por malhas não estruturadas precisou ser desenvolvido, com adequado nível de precisão e preparado para simular casos com malhas muito refinadas, sem que haja problemas de instabilidade numérica e excessivo esforço computacional.

2 A EQUAÇÃO DA ACÚSTICA PARA MÉIO NÃO HOMOGENEO

É um fato comprovado que durante a propagação de uma onda de pressão num médio fluido as partículas do meio fluido sofrem pequenos deslocamentos retornando posteriormente à sua posição inicial e que o movimento do fluido é muito menor que a velocidade de propagação da onda de pressão. Admitindo um processo isentrópico durante a propagação de uma onda de pressão num meio fluido compressível e aplicando o método de Perturbação nas equações de Navier-Stokes se obtém o conjunto de equações diferenciais parciais de primeira ordem (Henke, 2015), escritas abaixo usando o referencial de Euler:

$$\frac{1}{\rho c^2} \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \frac{1}{\rho c^2} \frac{\partial P_f}{\partial t} \quad (1)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} \quad (2)$$

A Eq. (1) representa a Lei de conservação da massa e a Eq. (2) representa a conservação da quantidade de movimento. Nestas equações P é a pressão, u_i é a velocidade do meio fluido, ρ é a massa específica do fluido, e c é a velocidade com a qual a onda de pressão se propaga no meio fluido. O primeiro termo do lado direito da Eq. (1) representa o termo fonte de pressão onde a variável P_f tem unidades de pressão. No referencial de Euler estas variáveis físicas são funções do espaço x_i e do tempo t .

Derivando a Eq. (1) em relação ao tempo e tomando o divergente da Eq. (2) é possível eliminar os termos que envolvem a velocidade e obter a equação diferencial parcial de segunda ordem para a pressão, denominada Equação da Acústica, que leva em consideração a não homogeneidade do meio contínuo:

$$\frac{1}{E} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = \nabla \cdot \left(\frac{c^2}{E} \nabla P \right) + \frac{1}{E} \frac{\partial^2 P_f}{\partial t^2} \quad (3)$$

Por conveniência, na Eq. (3) foi introduzido o módulo de elasticidade volumétrico $E = \rho c^2$, já que é a propriedade comumente encontrada nos estudos da sismica de prospecção (Silva, 2011).

Ressalta-se que há indiscutível similaridade entre a Equação da Acústica para o meio fluido e o problema da propagação de ondas de dilatação em meios sólidos. Sabe-se que as ondas de distorção, ao trafegarem mais lentamente do que as dilatacionais, podem ser adequadamente desprezadas nos procedimentos típicos de análise da sismica. Assim, a pressão P pode representar adequadamente a onda acústica que trafega num meio sólido rochoso, tipicamente heterogêneo.

3 MODELO DO MÉTODO DOS VOLUMES FINITOS

Na metodologia aqui empregada, primeiramente soluciona-se o lado direito da Eq. (3) isoladamente da parte dinâmica, sem qualquer perda de generalidade. Isto porque o termo dependente do tempo é facilmente operacionalizado através dos esquemas incrementais de avanço, também conhecidos como técnicas de integração direta, também empregados nos principais métodos discretos conhecidos. Assim, integra-se a equação de difusão num volume finito genérico V de forma que:

$$\int_V \nabla \cdot (\Gamma \nabla \phi) dV + S^\phi = 0 \quad (4)$$

Na Eq. (4), a variável Γ representa o quociente c^2/E e o termo de fonte S^ϕ representa a integral no volume do termo $1/E \partial^2 P_f / \partial t^2$ o qual é assumido como conhecido. A variável ϕ passa a ser a variável primal do problema, igual à pressão P . O foco é desenvolver uma solução numérica em volumes finitos para um triângulo base i , em função dos triângulos vizinhos i_1, i_2 e i_3 e dos vetores normais unitários $\hat{n}_1, \hat{n}_2$ e $\hat{n}_3$ às arestas do triângulo base. A Figura 1 ilustra o triângulo base.

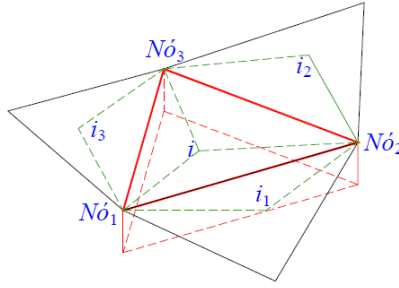


Figura 1 Volume finito i base de seção triangular e espessura unitária e seus volumes vizinhos i_1, i_2 e i_3 .

Demonstra-se que a integral do lado esquerdo da Eq. (4) pode ser decomposta na soma de três integrais que envolvem as faces do volume base de seção triangular, segundo a relação a seguir:

$$\oint_S \Gamma_\phi \nabla \phi \cdot \hat{n} dS = \int_{S_1} \Gamma_{\phi_1} \nabla \phi_1 \cdot \hat{n}_1 dS + \int_{S_2} \Gamma_{\phi_2} \nabla \phi_2 \cdot \hat{n}_2 dS + \int_{S_3} \Gamma_{\phi_3} \nabla \phi_3 \cdot \hat{n}_3 dS \quad (5)$$

onde S_1 é a superfície da face que une os nós N_1 e N_2 , S_2 é a superfície da face que une os nós N_2 e N_3 e S_3 é a superfície da face que une os nós N_3 e N_1 . Estas superfícies têm espessura unitária. Cada uma das integrais do lado direito da Eq. (5) pode ser aproximada usando o teorema do valor médio para integrais, o que resulta na seguinte aproximação numérica:

$$\int_S \Gamma_\phi \nabla \phi \cdot \hat{n} dS = \Gamma_{\phi_1} \nabla \phi_1 \cdot \hat{n}_1 l_1 + \Gamma_{\phi_2} \nabla \phi_2 \cdot \hat{n}_2 l_2 + \Gamma_{\phi_3} \nabla \phi_3 \cdot \hat{n}_3 l_3 \quad (6)$$

Onde l_1, l_2 e l_3 são os comprimentos das arestas entre o N_1 e N_2 , N_2 e N_3 e o N_3 e N_1 respectivamente, e $\hat{n}_1, \hat{n}_2$ e $\hat{n}_3$ são os vetores unitários normais a estas. O cálculo de cada um dos gradientes que aparecem na Eq. (6) é realizado aplicando o Teorema do Gradiente, dado pela expressão abaixo:

$$\int_V \nabla \phi dV = \oint_S \phi \hat{n} dS \quad (7)$$

O gradiente do primeiro termo do lado direito da Eq. (6) é calculado usando o volume formado pelo paralelepípedo que contem no seu interior a aresta que une os nós N_1 e N_2 . Este volume envolve os centros de massa dos volumes adjacentes e as extremidades da aresta, os nós, e é formado pelo paralelepípedo de espessura unitária $i N_1 i_1 N_2$ como é mostrado pelas linhas tracejadas da Figura 1. O cálculo dos outros gradientes que aparecem no lado direito da Eq. (6) segue um procedimento análogo. Finalmente, substituindo as aproximações numéricas dos gradientes calculados pela Eq. (7) na Eq. (6), se obtém a forma discreta da Eq. (4) que depois de uma manipulação algébrica pode ser reescrita como na forma comumente usada no método dos volumes finitos:

$$A_i \phi_i + A_{i1} \phi_{i1} + A_{i2} \phi_{i2} + A_{i3} \phi_{i3} + S_i^{\phi_{no}} + S_i^{\phi} = 0 \quad (8)$$

A equação algébrica acima é usada para construir o sistema de equações da malha que representa a forma discreta do domínio contínuo de interesse (Marques, 2015). Na Eq. (8) o valor discreto da função ϕ é calculado no baricentro do volume i em função das informações do ϕ nos volumes vizinhos i_1, i_2 e i_3 e, assim, compatibilizar os elementos e permitir a construção do sistema de equações para os diferentes volumes finitos (Oliveira, 1997. Patankar, 1980. Chow, *et al*, 1996). O termo $S_i^{\phi_{no}}$ da Eq. (8) representa a não ortogonalidade do paralelepípedo e detém as informações da função ϕ nos nós dos triângulos. Assume-se que os valores de ϕ nos vértices de cada elemento triangular são conhecidos, a partir da interpolação dos valores de ϕ do baricentro para os nós (Danu & Tenaud, 2004).

A próxima etapa consiste na integração do termo dinâmico da Equação da Onda no volume finito base, como mostrado na equação a seguir:

$$\int_{V_i} \frac{1}{E} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} dV = \frac{V_i}{E_i} \left(\frac{P_i^{n+1} - 2P_i^n + P_i^{n-1}}{\delta t^2} \right) \quad (9)$$

onde V_i é o volume do volume finito base e n é a variável associada com o tempo discreto. Sem perda de generalidade, considerando o volume base de seção triangular e espessura unitária, o valor associado a este volume é a própria área do elemento triangular da malha. Na Eq. (9) foi utilizada a aproximação por diferenças finitas da segunda derivada temporal da pressão P_i com segunda ordem de aproximação no tempo, dada pela Eq. (10) escrita abaixo:

$$\frac{\partial^2 P_i}{\partial t^2} = \frac{P_i^{n+1} - 2P_i^n + P_i^{n-1}}{\delta t^2} + O(\delta t^2) \quad (10)$$

Finalmente, a forma discreta da equação da acústica para meio não homogêneo é obtida ao substituir a forma discreta do termo dinâmico, Eq. (9), e forma discreta do termo difusivo avaliada no instante de tempo n , Eq. (8), na equação da acústica, Eq. (3). Desta forma pode-se montar um esquema explícito de integração no qual se avança de modo incremental ao longo do tempo, através da escolha de um passo de integração δt adequado (Bathe, 1982) e partindo de condições iniciais e de contorno prescritas. Então, o esquema explícito fornecerá os valores da pressão no futuro, instante de tempo $n+1$, desde que os valores da pressão sejam conhecidos no presente e no passado, respectivamente o instante de tempo n e o instante de tempo $n-1$, em todo o domínio de interesse.

4 EXEMPLOS

4.1 Propagação de Onda em meio homogêneo bidimensional

O objetivo deste exemplo é avaliar se os elementos triangulares não estruturados introduzem dispersão, reflexão e outros fenômenos numéricos típicos de problemas dinâmicos num caso homogêneo em que se dispõe de solução analítica. Neste sentido, uma membrana completamente fixada em seus bordos é excitada em seu ponto central por uma fonte concentrada P_f cuja forma é mostrada na Eq. (11) a seguir:

$$\frac{\partial^2 P_f}{\partial t^2} = -\frac{\partial^2 e^{-\pi(Bt^2 w^2)}}{\partial t^2} = 2\pi B w^2 (1 - 2\pi B w^2 t^2) e^{-\pi(Bt^2 w^2)} \quad (11)$$

Este tipo de fonte é comumente intitulado de pulso gaussiano. Procedimentos matemáticos usando a Transformada de Fourier demonstram que fontes expressas por funções exponenciais têm sua faixa de excitação modal representada no argumento da função. Em termos mais exatos, caso o argumento temporal da função seja submetido a uma Transformada de Fourier ficará representado em termos da maior frequência de excitação presente no carregamento, denominada frequência de corte.

A malha utilizada para representar o domínio de 1Km X 1Km é mostrada na Figura 2. A malha possui 1048 volumes finitos e 565 nós e foi usada para realizar a propagação de uma onda de pressão com frequência de corte de 5HZ.

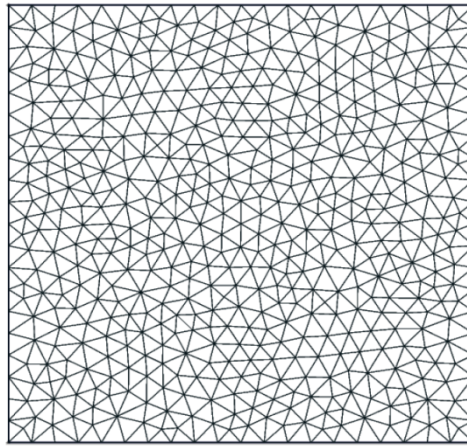


Figura 2. Malha de volumes finitos triangulares utilizada na simulação do primeiro exemplo

A Figura 3 ilustra o comportamento da onda gerada a partir do centro em alguns instantes selecionados. Enquanto a frente de onda não chega aos bordos, a solução analítica é similar a excitação aplicada, permitindo identificar que a representação da frente de onda e seu perfil à jusante foram bastante satisfatórios

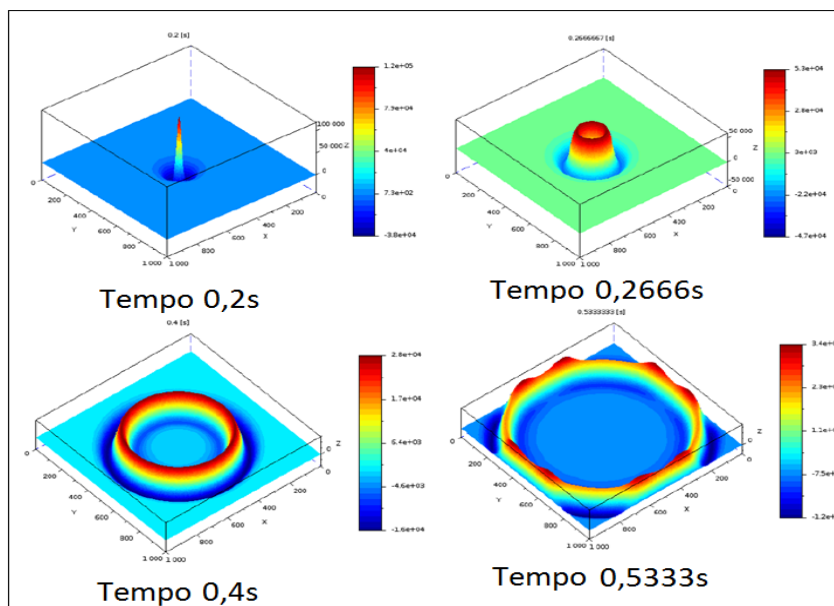


Figura 3. Perfil da frente de onda em alguns instantes de tempo

Fazendo-se um corte paralelo as arestas, conforme mostrado nas Fig. 4, Fig. 5 e Fig. 6, é possível perceber em detalhe o complexo processo de propagação da onda de pressão a partir do centro de excitação. Conforme anteriormente mencionado, a partir do instante $t = 0,2s$ é possível acompanhar o valor do pico de pressão em direção as arestas e, antes da reflexão, que acontece aproximadamente no instante $t = 0,54s$, e compará-lo com o valor analítico referente a uma membrana infinita com o mesmo carregamento. Não há diferença sensível com a malha utilizada, ou seja, os erros são insignificantes.

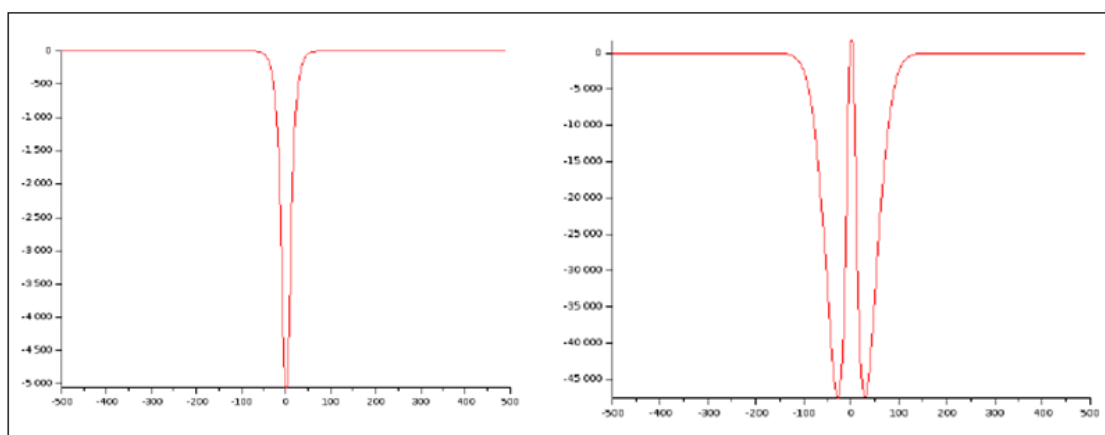


Figura 4. Valores de pressão em corte: para $t=0,12s$ (esquerda) e $t=0,186s$ (direita)

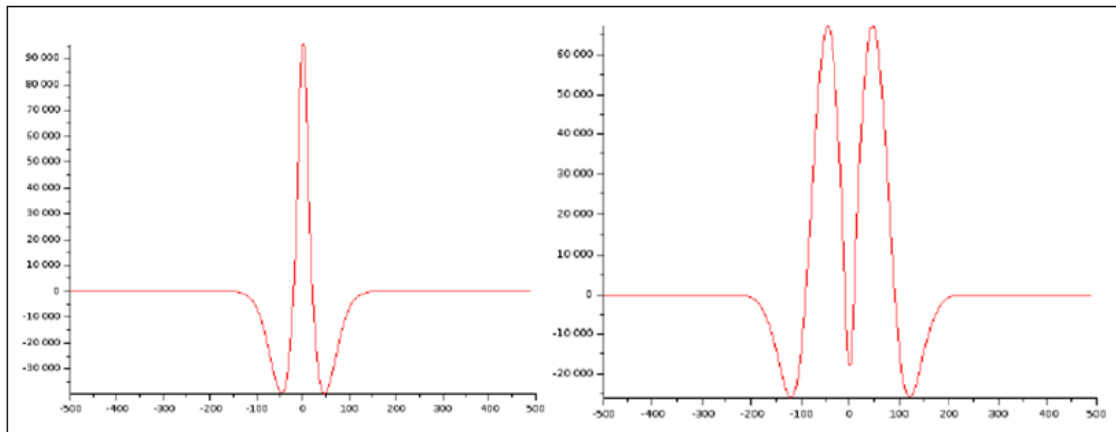


Figura 5. Valores de pressão em corte: para $t=0,197s$ (esquerda) e $t=0,245s$ (direita)

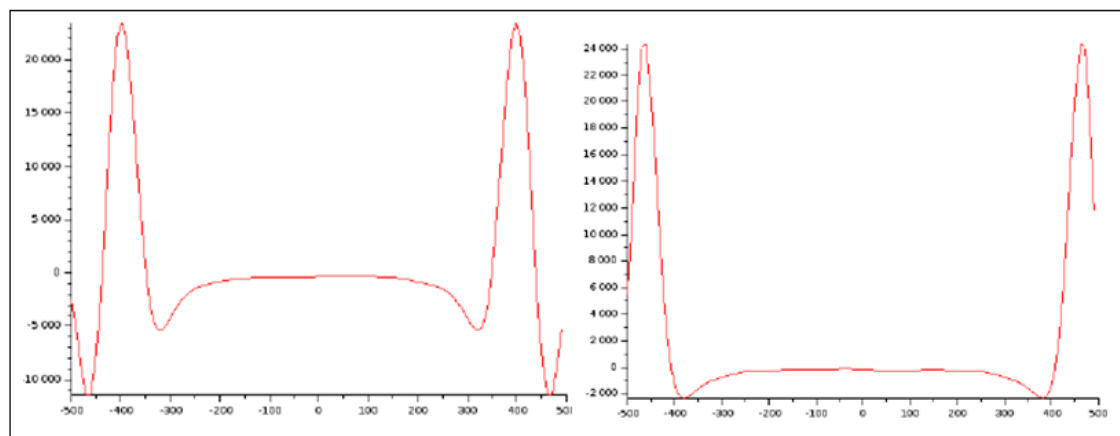


Figura 6. Valores de pressão em corte: para $t=0,477s$ (esquerda) e $t=0,533s$ (direita)

Para finalizar este exemplo, na Figura 7 apresenta-se a ilustração de um sismograma referente à propagação da onda acústica, colhida em 178 estações de monitoramento, considerando uma frequência de corte de 5Hz.

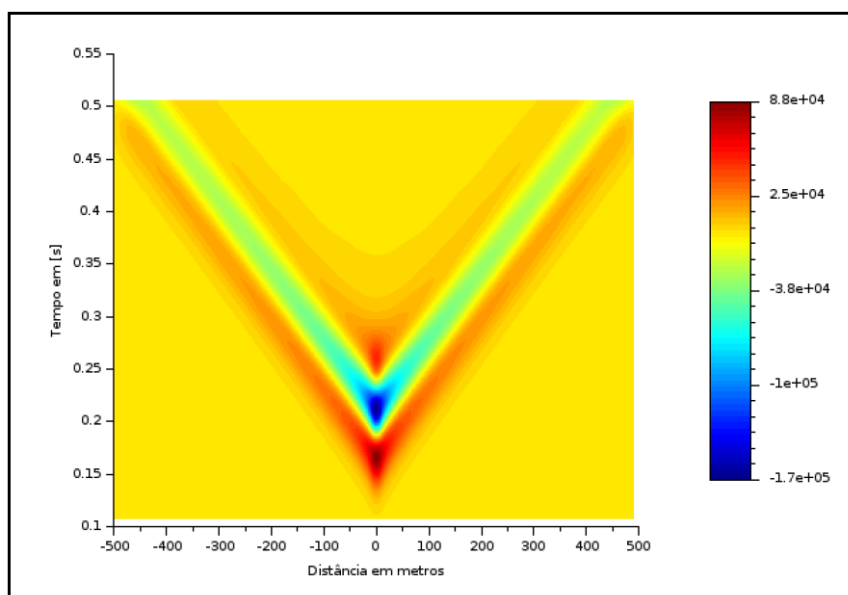


Figura 7. Sismograma da onda acústica, considerando uma frequência de corte de 5Hz

4.2 Propagação de Onda em meio heterogêneo unidimensional

Neste exemplo resolve-se uma barra heterogênea submetida a uma deformação súbita ε na extremidade $x = b$ e engastada na extremidade $x = a$, conforme mostra a Figura 8. A heterogeneidade se deve a variação quadrática do módulo de elasticidade longitudinal. A obtenção da equação diferencial de equilíbrio dinâmico é feita a partir da Lei de Newton, considerando que atuam apenas tensões uniaxiais. A equação de governo em termos da variável básica $P(x, t)$ é dada, neste caso, por:

$$E(x)P'' + E'(x)P' = \rho\ddot{P} \quad (12)$$

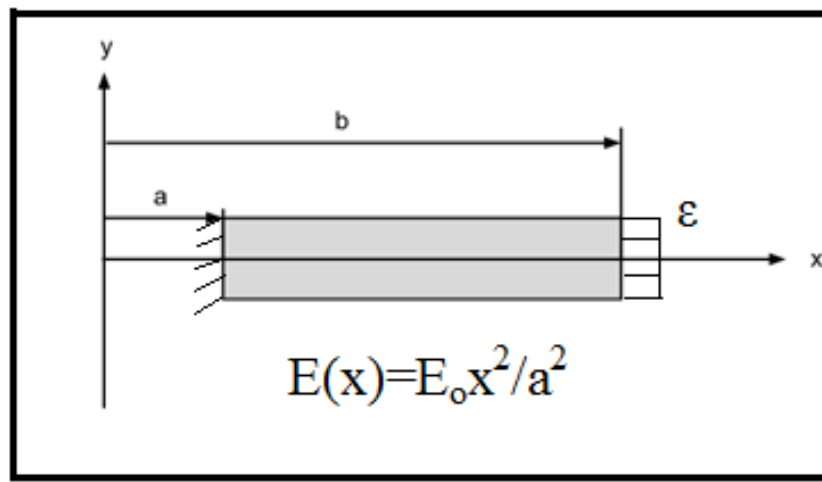


Figura 8. Barra engastada com módulo de rigidez longitudinal variável

A solução analítica da Eq. (12) é obtida através do Método de Separação de Variáveis, (Hildebrand, 1965) resultando numa solução expressa em termos de uma série de funções, sendo que o cálculo dos coeficientes não é elementar, necessitando ser efetivado através de um programa numérico de alta precisão para solução de integrais (Loeffler & Coutinho, 2012).

Assim, particularizando as dimensões da barra, considerando $a = 1\text{m}$ e $b = 3\text{m}$, a solução analítica para a variável básica $P(x, t)$ é dada por:

$$P(x, t) = 9\varepsilon \left(1 - \frac{1}{x} \right) + x^{-1/2} \sum_{n=1}^{\infty} F_{1n} \sin(q_n \ln x) \cos(g_n t) \quad (13)$$

A resposta analítica mostrada na Eq. (13) foi obtida considerando $n = 100$ ou seja, os primeiros cem termos na série de autofunções.

As simulações numéricas obtidas pelo Método dos Volumes Finitos usaram 52736 triângulos e o passo de integração empregado foi de 0,0005 segundos. A dimensão característica, correspondente ao valor da aresta média foi de 0,01m

Nas figuras que se seguem são mostradas as respostas analíticas em comparação às respostas numéricas para avariável básica $P(x,t)$ ao longo do tempo em quatro pontos específicos da barra, em $x = 1,5\text{m}$, $x = 2,0\text{m}$, $x = 2,5\text{m}$ e $x = 3,0\text{m}$.

Inicialmente, na Figura 9 mostra-se a resposta ao longo do tempo de $P(x,t)$ para o valor de $x = 1,5\text{m}$. A linha contínua representa a solução numérica e os asterísticos correspondem à solução analítica. Esta convenção é empregada também nos gráficos que se sucedem nas Figura 10, Figura 11, e Figura 12, referentes à resposta em pontos diferentes da barra.

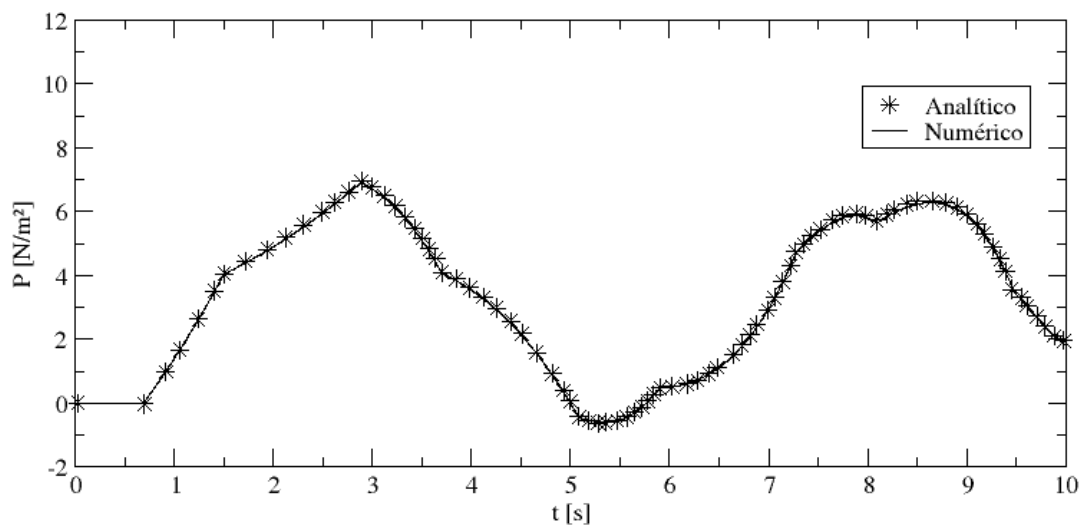


Figura 9. Curva analítica de deslocamento ao longo do tempo em $x=1.5\text{m}$

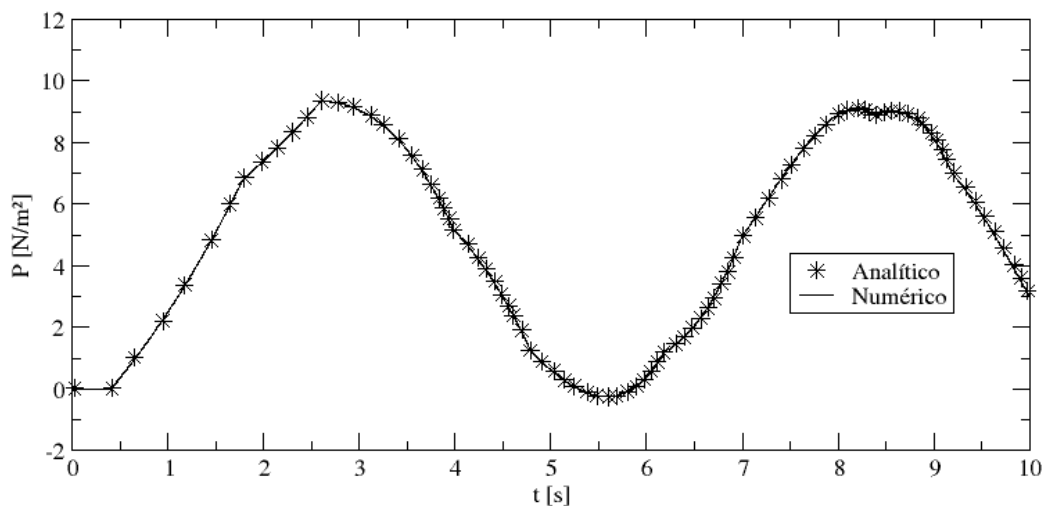


Figura 10. Curva numérica de deslocamento ao longo do tempo em $x=2.0\text{m}$

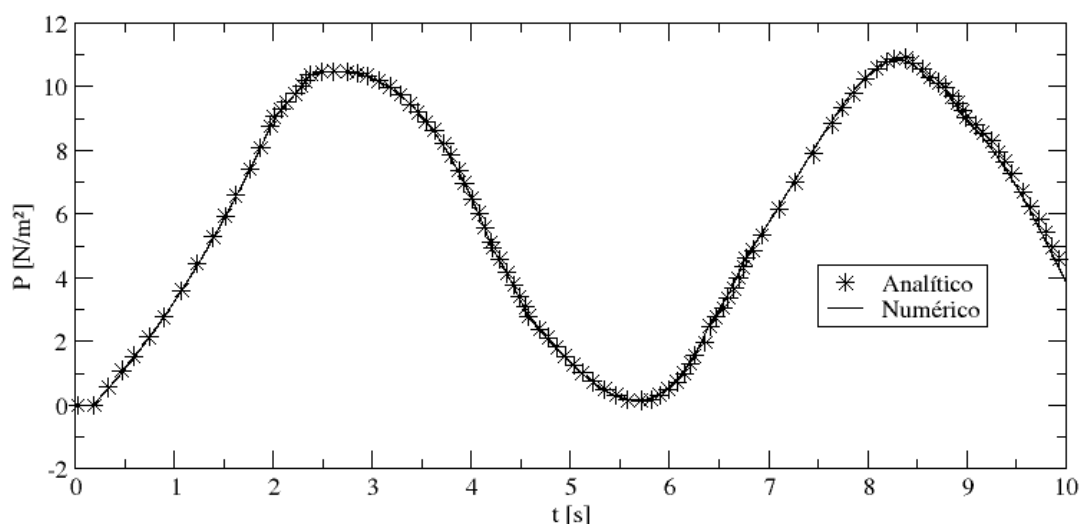


Figura 11. Curva analítica de deslocamento ao longo do tempo em $x=2.5m$

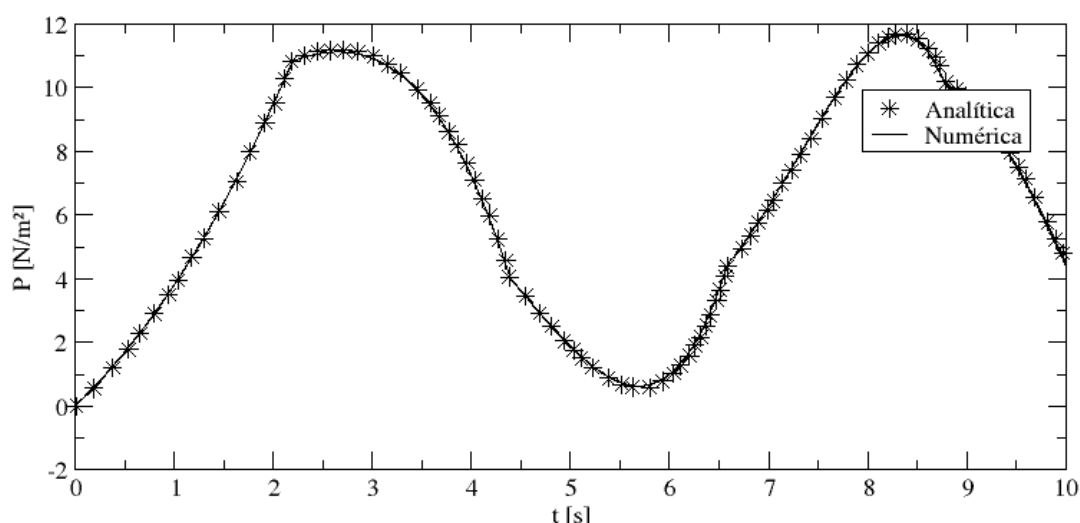


Figura 12. Curva numérica de deslocamento ao longo do tempo em $x=3.0m$

Percebe-se a excelente concordância dos resultados numéricos com os analíticos a qual ocorre em todos os pontos observados, destacando-se a ausência de ruído e o acompanhamento preciso dos picos e valores intrínsecos à resposta deste problema. Não há amortecimento fictício sensível, confirmando a adequação do esquema numérico proposto a esse tipo de problema dinâmico.

Quanto mais próximo se situa o ponto no qual se captura a resposta da extremidade livre maiores são os deslocamentos e assim pode-se observar que, devido à heterogeneidade do meio constituinte, as frequências naturais do problema não são harmônicas. Logo, não há periodicidade na solução e o fenômeno da dispersão da resposta física é bem pronunciado.

Nos instantes iniciais de resposta apresentados no gráfico da Figura 9, pode-se verificar claramente que a simulação via MVF obedeceu ao princípio de causalidade, ou seja, não houve perturbação artificial do patamar horizontal da curva que descreve a ausência de resposta, devido à onda propagada a partir da extremidade carregada ainda não ter chegado ao ponto de observação.

Nos gráficos da Figura 10 e Figura 11 pode-se observar a redução do patamar horizontal da curva inicial da resposta, devido a menor distância dos pontos de coleta de resposta até a extremidade carregada. Por efeito do já citado fenômeno de dispersão física, também os instantes de tempo

correspondentes ao primeiro vale das curvas de resposta se alteram, em função da posição do ponto de observação; se reduzem, quanto mais próximos se encontram do engaste.

Destaca-se no gráfico da Figura 12 a descrição precisa do crescimento acentuado da pressão nos instantes iniciais, no ponto $x = 3,0\text{m}$, que corresponde à extremidade livre da barra. À medida que a onda se propaga, a rigidez do sistema se reduz e a taxa de crescimento de pressão cresce, até haver a interferência com outros trens de onda que sucessivamente são induzidos pelo carregamento.

O erro relativo associado aos resultados numéricos do problema de propagação de onda em meio heterogêneo são menores do que 4%

5 CONCLUSÕES

Diversas experiências já realizadas e não mostradas aqui por questões de espaço avalizaram adequação do método dos volumes finitos nas aplicações estacionárias não homogêneas. Testes de convergência com diversas malhas de diferentes graus de refinamento atestaram a diminuição significativa e monótona do erro à medida que o comprimento característico da malha se reduziu.

Sistemas com até cinquenta comprimentos de onda da maior frequência da faixa utilizada puderam ser simulados com relativa precisão. Malhas com centenas de milhares de graus de liberdade foram utilizadas, também sem problemas de ruído na resposta para alguns problemas teste bastante esbeltos

Assim, a abordagem de problemas dinâmicos foi empreendida com expectativa promissora de alcançar resultados satisfatórios, conforme se pode observar nos resultados apresentados neste artigo.

Não obstante a necessidade de dar a continuidade da pesquisa, no sentido de se resolver problemas maiores e mais complexos, já se pode observar importantes características nas respostas numéricas obtidas, particularmente a ausência significativa de dissipação e dispersão numérica, atestando a consistência do esquema de avanço na resposta e na contenção da propagação de ruídos pela forma adotada de transmissão de informação entre os volumes finitos que compõem a discretização.

A ausência dos fenômenos numéricos espúrios em nível relevante durante as simulações dos problemas dinâmicos já abordados motiva a expectativa de aplicações futuras bem sucedidas em casos heterogêneos reais de grande porte e complexidade, como os que caracterizam as análises da sísmica de prospecção, de grande interesse na atualidade

REFERÊNCIAS

- Bathe, K. J., 1982. *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*. Prentice-Hall.
- Chow, P.A., Cross M. & Pericles K., 1996. Natural extension of the conventional finite volume method into polynomial unstructured meshes for CFD application, *Applied Math. Modeling*, vol. 20, 170-183.
- Danu, V. & Tenaud, C., 2004. High Order One Step Monotonicity-Preserving Schemes for Unsteady Compressible Flow Calculations, *Journal of Computational Physics*, vol. 193, 563-594.
- Henke C., 2015. Separation of acoustic waves in isentropic flow perturbations. *Annals of Physics* 355, 70-86.
- Hildebrand F.B., 1965. *Methods of Applied Mathematics*. Dover Pub., New York.
- Loeffler, C.F. & Fernandes F. C., 2012. Solução Analítica do Problema da Barra de Rigidez Variável Sujeita a Carga de Impacto através do Método de Separação de Variáveis, *I*

Congresso de Matemática Aplicada e Computacional Nordeste (CMAC-NE), Natal, Anais em CD ROM.

Marques, A. C., 2005. Desenvolvimento de Modelo numérico utilizando o método dos volumes finitos em malhas não-estruturadas. *Dissertação de Mestrado em Engenharia Ambiental*. Programa de Pós-graduação em Engenharia Ambiental, Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, ES, Brasil, 94 pp.

Oliveira P. C., 1997. Esquema FLUX-SPLINE aplicado em cavidades abertas com convecção natural. *Tese de Doutorado em Engenharia Mecânica*, Unicamp.

Patankar, S. V., 1980. Numerical Heat Transfer and Fluid Flow. *Hemisphere Publishing Corporation*.

Silva, V. F., 2011. Estratégias para Estudos de Iluminação Sísmica Baseadas na Equação da Onda. *Dissertação de Mestrado em Engenharia Civil*, COPPE/UFRJ.