



IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL DAS EQUAÇÕES DE NAVIER STOKES EM UMA FORMULAÇÃO PENALIZADA DE ELEMENTOS FINITOS

Liad Paskin

Carlos Eduardo da Silva

liadpaskin@gmail.com

kadu@lamce.coppe.ufrj.br

LAMCE/PEC/COPPE/UFRJ

Av. Athos da Silveira Ramos, 149, 21941-909, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

Abstract. *Problemas de engenharia e ciências aplicadas envolvendo escoamentos de fluidos são frequentemente encontrados. Quantificar grandezas físicas em um escoamento é premissa comum em metodologias de cálculo e dimensionamento de estruturas e equipamentos. Há cenários em que um escoamento envolve nível de complexidade que foge às hipóteses contempladas em modelos analíticos, evidenciando-se assim uma demanda direta de projetos de engenharia em empregar procedimentos experimentais e numéricos.*

Apresenta-se uma metodologia de modelagem numérica de mecânica dos fluidos, com particular atenção em escoamentos incompressíveis bidimensionais e fluidos newtonianos. Para tanto, desenvolveu-se um modelo numérico em elementos finitos segundo uma estratégia penalizada, necessária para tratar dificuldades matemáticas de divergente nulo que traduz a restrição cinemática de incompressibilidade.

Foram implementados elementos triangulares quadráticos, com integração reduzida para o termo penalizado. Em uma descrição Euleriana, o princípio de conservação da quantidade de movimento revela o termo convectivo, que neste trabalho é tratado de forma linearizada pelo método de Picard. A discretização temporal é avaliada pelo método de diferenças finitas de Crank-Nicolson.

Ao final, apresentam-se aplicações empregando a metodologia proposta, sendo elas os problemas de escoamento interno e externo em uma cavidade e um cilindro respectivamente. Os resultados obtidos indicam boa concordância com resultados disponíveis na literatura.

Keywords: *Formulação Penalizada, Escoamento incompressível, Mecânica dos Fluidos computacional, Esteira de von Karman, Escoamento em Cavidade*

1 INTRODUÇÃO

O estudo da mecânica dos fluidos é atividade de grande relevância no desenvolvimento histórico científico e tecnológico (Eckert, 2007). A expansão do conhecimento científico aprofunda o entendimento do comportamento fluido e permite que as aplicações industriais e tecnológicas explorem suas propriedades. Este conhecimento é hoje aplicado em diversos setores industriais, e.g., químico, civil, mecânico, automotivo, aeronáutico, naval, offshore, subsea. Avaliar grandezas físicas características a um escoamento é hoje premissa comum nos cálculos e dimensionamentos das estruturas e equipamentos que compõe esses setores.

Os procedimentos adotados para se estudar a mecânica dos fluidos podem ser classificados como analíticos, experimentais, ou numéricos. O método dos elementos finitos é um dentre os métodos numéricos empregados para solucionar de forma aproximada as equações que descrevem o comportamento de um fluido. Essas equações exibem dificuldades matemáticas e exigem tratamento adequado.

A restrição cinemática de incompressibilidade é uma das grandes dificuldades envolvidas na simulação computacional de fluidos, sendo matematicamente expressa pelo divergente nulo do campo de velocidades (Gresho & Sani, 1998). Para satisfazer essa restrição, o campo de aproximação da velocidade deve ser construído com divergente nulo a priori, característica essa somente atendida por funções solenoides (Karam, 1989). Formulações baseadas em vorticidade e função corrente como variáveis principais satisfazem essa restrição, mas demonstram-se abordagens limitadas ao espaço bidimensional, que requerem o pós-processamento dos campos de velocidade e pressão a partir de derivadas da solução, comprometendo a precisão do método quando são essas as variáveis de interesse. A técnica de multiplicadores de Lagrange e as formulações penalizadas apresentam-se como alternativas a este problema. A formulação penalizada para solução das equações de Navier Stokes foi proposta por (Hughes, et al., 1979) como “*A mais simples e efetiva implementação da incompressibilidade ao método dos elementos finitos*”, sendo a alternativa escolhida por este trabalho para tratar da restrição cinemática de incompressibilidade.

Em modelos matemáticos com restrições internas, como no caso da incompressibilidade, as propriedades do modelo contínuo não são automaticamente transferidas para o modelo discreto (Karam, 1989). As condições de existência e unicidade para o modelo discreto, expressas pelo teorema de Brezzi (Brezzi, 1974), devem então ser avaliadas para cada espaço de aproximação escolhido. Neste trabalho optou-se em discretizar o domínio em elementos triangulares quadráticos, se fazendo necessário o emprego de integração reduzida nos termos penalizados (Hughes, et al., 1979). A integração reduzida dos termos penalizados torna o modelo obtido matematicamente semelhante àquele obtido pelos métodos mistos (Malkus & Hughes, 1978).

O presente artigo apresenta uma metodologia de modelagem numérica das equações de Navier Stokes pelo método dos elementos finitos, aplicada ao escoamento incompressível e bidimensional de um fluido newtoniano. Elementos triangulares quadráticos são empregados com integração reduzida do termo penalizado. O termo convectivo da equação de Navier Stokes é tratado de forma linear pelo método de Picard (Engelman, et al., 1981). O método de diferenças finitas de Crank Nicolson é responsável pela discretização temporal do modelo (Hughes, et al., 1979).

Na seção seguinte, as equações de governo são apresentadas. Dentre os algoritmos adotados pela presente metodologia, os mais relevantes são descritos na seção três. Na quarta seção, são exemplificados dois estudos de caso com o objetivo de demonstrar algumas das capacidades da metodologia desenvolvida, bem como verificar sua implementação.

2 EQUAÇÕES DE GOVERNO

2.1 Fluido newtoniano e escoamento incompressível

Em um domínio contínuo $\Omega \times [0, t_f]$, as equações de Navier Stokes traduzem o princípio de conservação de movimento do escoamento de um fluido newtoniano em regime incompressível e descrito em referencial Euleriano:

$$\rho (\partial \mathbf{u} / \partial t + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - \mathbf{b}) - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = 0 \quad (1)$$

onde ρ e $\mathbf{u}$ são respectivamente a massa específica e o campo de velocidades, $\mathbf{b}$ é o vetor de forças de corpo que considera o efeito da gravidade e $\boldsymbol{\sigma}$ o tensor de tensões de Cauchy.

O princípio de conservação de massa no domínio considerado é expresso pela equação da continuidade, que quando aplicada a um regime incompressível, impõe a seguinte restrição cinemática:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2)$$

Sendo o fluido newtoniano, escoando em regime incompressível, o tensor $\boldsymbol{\sigma}$ é dado por:

$$\boldsymbol{\sigma} = -p \mathbf{I} + 2 \mu \mathbf{D} \quad (3)$$

Onde p é a pressão, $\mathbf{I}$ a matriz identidade, μ a viscosidade dinâmica e $\mathbf{D}$ o tensor simétrico da taxa de deformação, dado por:

$$\mathbf{D} = 1/2 \cdot [\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T] \quad (4)$$

2.2 Formulação penalizada

A formulação penalizada é obtida impondo uma relação entre a pressão e o campo de velocidades (Hughes, et al., 1979), tal que:

$$p = -\lambda (\nabla \cdot \mathbf{u}) \quad (5)$$

onde λ é o parâmetro de penalização. Segundo a Equação (5), o divergente do campo de velocidades deve anular-se para que se mantenha uma pressão finita à medida que λ tende a infinito. A convergência da formulação penalizada para as equações incompressíveis de Navier Stokes foi comprovada por (Temam, 1977). O parâmetro λ deve ser suficientemente grande para que a compressibilidade introduzida seja mínima, mas não grande demais para que cause complicações numéricas. Segundo (Hughes, et al., 1979), o parâmetro λ pode ser expresso como:

$$\lambda = c \mu \quad (6)$$

onde c é uma constante dependente do tamanho de palavra do computador utilizado. (Hughes, et al., 1979) sugere que para um tamanho de palavra de ponto flutuante entre 60 e 64 bits, uma escolha apropriada para c é de 10^7 . Este valor foi adotado nos casos aqui apresentados.

3 METODOLOGIA

3.1 Modelo semi discreto

O modelo matemático semi discreto referente às equações de governo apresentadas na seção anterior é representado pelo sistema:

$$\mathbf{M}\dot{\mathbf{u}} + [\mathbf{C} + \mathbf{K}(\mathbf{u})]\mathbf{u} = \mathbf{F} \quad (7)$$

Onde $\mathbf{M}$ é a matriz de massa, $\mathbf{C}$ a matriz de difusão, $\mathbf{K}(\mathbf{u})$ a matriz de convecção não linear, $\mathbf{F}$ o vetor forçante e $\dot{\mathbf{u}}$ o campo de aceleração local. A matriz de difusão é composta pelos termos viscoso $\mathbf{C}_\mu$ e penalizado $\mathbf{C}_\lambda$ (Hughes, et al., 1979), tal que:

$$\mathbf{C} = \mathbf{C}_\mu + \mathbf{C}_\lambda \quad (8)$$

Neste trabalho, elementos triangulares quadráticos compõe o domínio espacial discreto. Para garantir a convergência da formulação proposta, a matriz penalizada $\mathbf{C}_\lambda$ deve ser então integrada de forma reduzida por um ponto de Gauss. Os demais termos das Equações (7) e (8) são integrados por três pontos de Gauss.

3.2 Algoritmo de solução transiente

Implementou-se o algoritmo preditor corretor, linear implícito e de passo único, apresentado por (Hughes, et al., 1979). Considerando-se determinado instante de tempo $t_n = n\Delta t$ e iteração i , indicados pelos subscritos e sobrescritos abaixo se apresenta as equações (9), (10), (11) e (12) que descrevem o método adotado.

$$(\mathbf{M} + \gamma\Delta t\mathbf{C})\mathbf{u}_{n+1}^{i+1} = \mathbf{M}\tilde{\mathbf{u}}_{n+1} + \gamma\Delta t [\mathbf{F}_{n+1} - \mathbf{K}(\mathbf{u}_{n+1}^{(i)})\mathbf{u}_{n+1}^{(i)}] \quad (9)$$

$$\tilde{\mathbf{u}}_{n+1} = \mathbf{u}_n + (1 - \gamma)\Delta t \dot{\mathbf{u}}_n \quad (10)$$

$$\mathbf{u}_{n+1}^{(0)} = \tilde{\mathbf{u}}_{n+1} \quad (11)$$

$$\dot{\mathbf{u}}_{n+1} = (\mathbf{u}_{n+1} - \tilde{\mathbf{u}}_{n+1}) / (\gamma\Delta t) \quad (12)$$

onde $\tilde{\mathbf{u}}_{n+1}$ é o preditor do campo de velocidades, Δt o passo de tempo, e γ uma constante que determina a estabilidade do método. Nas aplicações seguintes $\gamma = 0.5$.

A Equação (9) é resolvida a cada iteração. A matriz não linear $\mathbf{K}(\mathbf{u}_{n+1}^{(i)})\mathbf{u}_{n+1}^{(i)}$ é avaliada de forma explícita enquanto a matriz simétrica linear $(\mathbf{M} + \gamma\Delta t\mathbf{C})$ é avaliada de forma implícita. A matriz a ser invertida é linear e a inversão pode ser efetuada somente uma vez para um passo de tempo fixo. A matriz não linear é tratada de forma linearizada conforme o método de Picard (Engelman, et al., 1981).

A inversão da matriz $(\mathbf{M} + \gamma\Delta t\mathbf{C})$ é efetuada por uma fatoração de forma direta pelo algoritmo de Crout (Hughes, 1987). O algoritmo de reordenamento de malha de Cuthill Mckee foi implementado para aperfeiçoar o desempenho da inversão.

3.3 Esforços no corpo rígido

As forças nodais equivalentes à distribuição de esforços na estrutura rígida são avaliadas conforme (SILVA, et al., 2009). Considera-se então a força interna atuante em cada elemento acoplado ao corpo rígido e indicado pelo domínio Ω_e :

$$\mathbf{f}_{int}^e = \int \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega_e \quad (13)$$

Seja n_{en} o numero de nós pertencentes ao elemento e N_I a função de forma associada ao nó I , a matriz $\mathbf{B}$ é o operador diferencial discreto:

$$\mathbf{B} = B_{jI} = \frac{\partial N_I}{\partial x_j}, \quad I = 1, \dots, n_{en} \quad (14)$$

A força nodal equivalente em determinado nó é obtida pelo somatório da força nodal interna de cada elemento adjacente a este nó. A força total no corpo é finalmente avaliada somando-se as reações às forças nodais equivalentes dos nós adjacentes à estrutura.

4 ESTUDO DE CASOS

Nesta seção apresentam-se duas aplicações para avaliar algumas das capacidades da ferramenta desenvolvida. Incialmente é apresentado um problema de escoamento interno induzido em uma cavidade pelo movimento de seu bordo superior. O segundo caso representa o escoamento externo que ao encontrar um corpo cilíndrico, induz o desprendimento dos vórtices que formam a esteira de von Karman.

4.1 Cavidade

Neste caso, o escoamento interno desenvolve-se no interior da cavidade apresentada na Figura 1, induzido pela velocidade horizontal unitária de seu bordo superior. Os demais bordos da cavidade mantêm velocidade nula, e todos possuem dimensões unitárias.

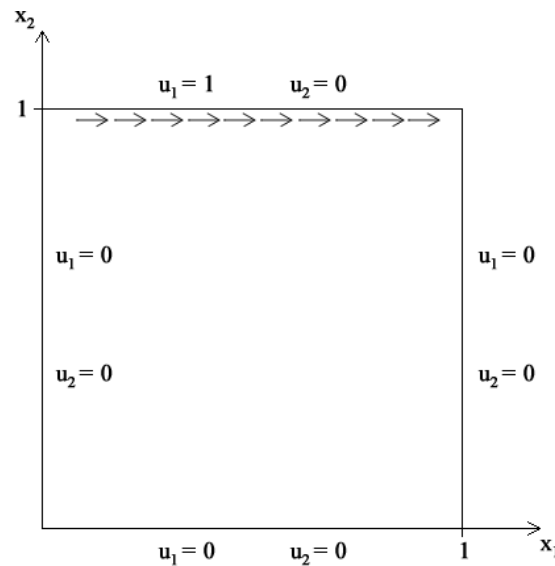


Figura 1. Geometria e condições de contorno da cavidade modelada

A malha modelada é formada pela subdivisão de cada bordo em 80 segmentos igualmente espaçados, formando 80×80 quadrados que por sua vez originaram o dobro de elementos triangulares quadráticos. Formam-se dessa forma 25,921 nós e 12,800 elementos.

O numero de Reynolds é calculado para este problema considerando comprimento e velocidade característicos unitários. O resultado obtido em regime permanente com numero de Reynolds 400 é comparado com o resultado publicado por (Reddy, 1982) na Figura 2. Nesta figura superpõem-se as componentes horizontais e verticais do perfil de velocidade observado ao longo das linhas de centro vertical e horizontal respectivamente. A comparação realizada indica boa concordância entre os resultados. O campo de velocidades obtido em estado permanente é ilustrado na Figura 3.

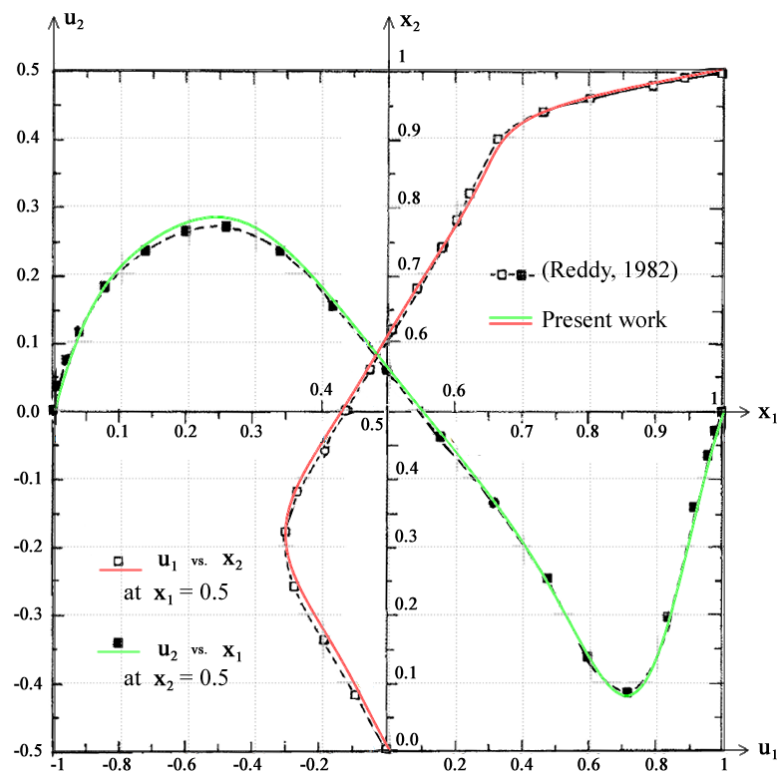


Figura 2. Resultados obtidos para Reynolds 400. Adaptado de (Reddy, 1982).

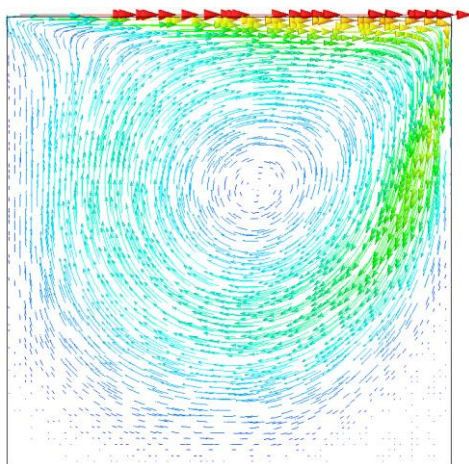


Figura 3. Campo de velocidades obtido com Re 400 em estado permanente

4.2 Esteira de von Karman

O modelo consiste em um cilindro circular imerso em escoamento externo. O escoamento incide de forma uniforme e um par de vórtices surge à jusante do cilindro como resultado de sua interação com o escoamento incidente. Quando o escoamento atinge maiores números de Reynolds esses vórtices se tornam instáveis e se desprendem do corpo, sendo carregados pelo escoamento e originando a esteira de vórtices de von Karman, fenômeno observado nesta modelagem. Este problema é referido por (Brooks & Hughes, 1982) como “*Um dos mais desafiadores problemas para métodos numéricos, já que todos os termos presentes nas equações de governo são significantes*”.

O modelo, suas dimensões e condições de contorno são ilustrados na Figura 4. O bordo esquerdo do domínio é o inlet, onde o fluxo incide com velocidade prescrita, uniforme e unitária. O bordo direito recebe condição de outlet, com força de superfície nula. Em suas extremidades superior e inferior o domínio encontra condição de não penetração, mas livre deslizamento. Em sua interface com o corpo cilíndrico, o fluido tem velocidade prescrita nula.

A malha gerada é ilustrada na Figura 5 e possui 164.872 nós e 81.674 elementos. O contorno do corpo cilíndrico é composto por 2.520 nós. O intervalo de tempo adotado é de 0.01 unidades de tempo.

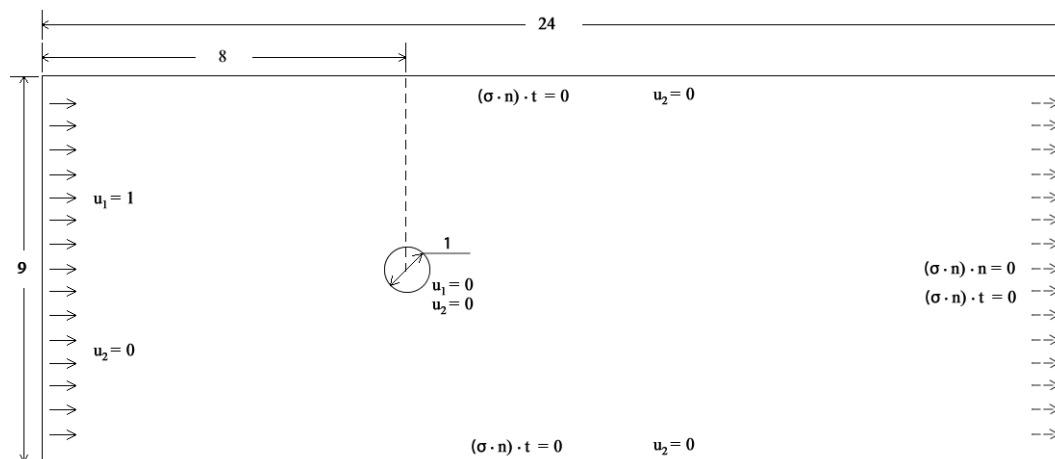


Figura 4. Geometria e condições de contorno do modelo de von Karman

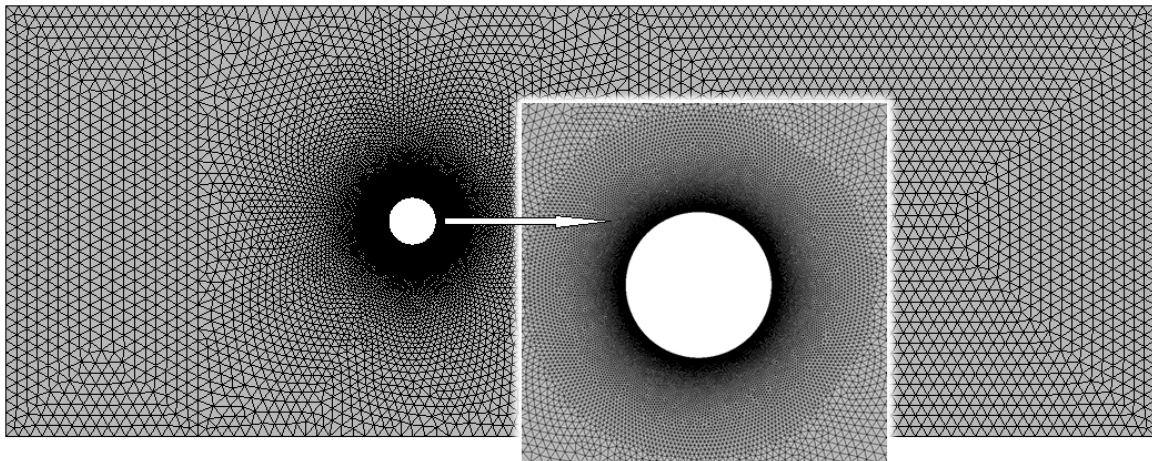


Figura 5. Malha de elementos finitos para o modelo de von Karman

Seja o comprimento característico dado pelo diâmetro do cilindro e a velocidade característica pela magnitude da velocidade do escoamento incidente, os resultados seguintes foram observados para número de Reynolds 100. Para o número de Reynolds considerado, a literatura (Ahlborn, et al., 2002) prevê o número de Strouhal relacionado à frequência de liberação de vórtices dado pela fórmula

$$St = 0.212(1 - 21.2/Re) \quad (15)$$

A Equação (15) indica número de Strouhal de 0,167 para o modelo aqui considerado, equivalente a um período de 5,99 unidades de tempo entre o desprendimento de cada vórtice. O período correspondente, observado nos resultados obtidos pela presente modelagem é de 5,79 unidades. Observa-se assim discrepância de 3,3% entre o resultado modelado e aquele previsto pela literatura.

Com objetivo de validar as amplitudes do campo de velocidade e dos esforços induzidos no cilindro, o mesmo modelo foi implementado com mesma malha e intervalo de tempo na plataforma comercial Fluent, que soluciona as equações de Navier Stokes pelo método dos Volumes Finitos. A Figura 6 compara os resultados de velocidades obtidos por ambas as ferramentas em quatro gráficos. Cada um dos gráficos exibidos na Figura 6 refere-se a um ponto posicionado na linha de centro horizontal, onde a componente vertical do perfil de velocidade é plotada ao longo do tempo.

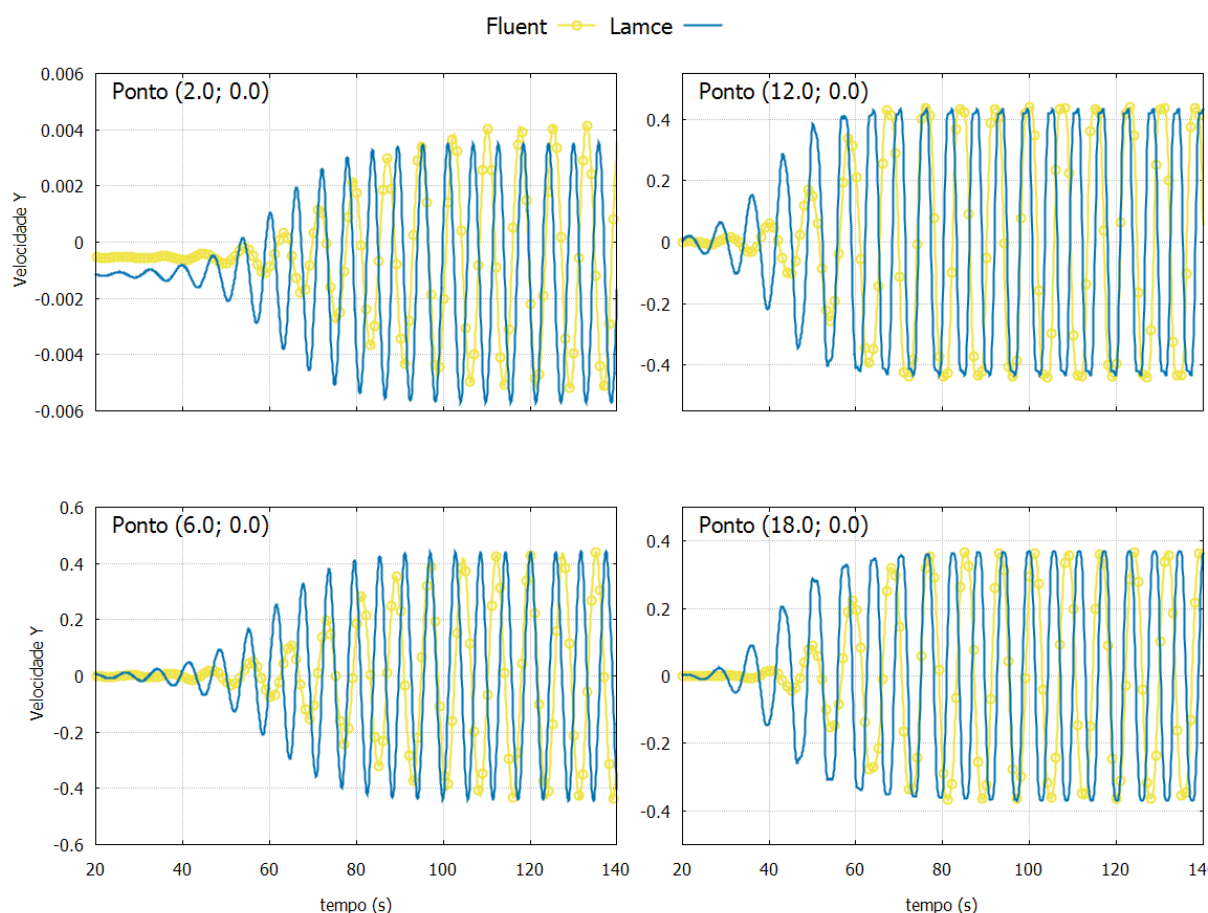


Figura 6. Velocidades transversais obtidas com a presente metodologia e o Fluent. Reynolds 100.

A Figura 7 superpõe os sinais da componente transversal da força resultante no cilindro, observadas por cada metodologia. A amplitude observada por cada um dos sinais indica ótima concordância entre as modelagens. O sinal gerado pela plataforma Fluent, porém, tem período de 7,64 unidades de tempo, apresentando discrepância de 27,6% em relação ao valor previsto pela Eq. (15). O primeiro gráfico da Figura 6 indica uma assimetria atípica em ambos os modelos. Devido a sua pequena amplitude quando comparada aos demais gráficos, essa assimetria não foi considerada relevante para as conclusões aqui realizadas, mas será investigada por trabalhos futuros.

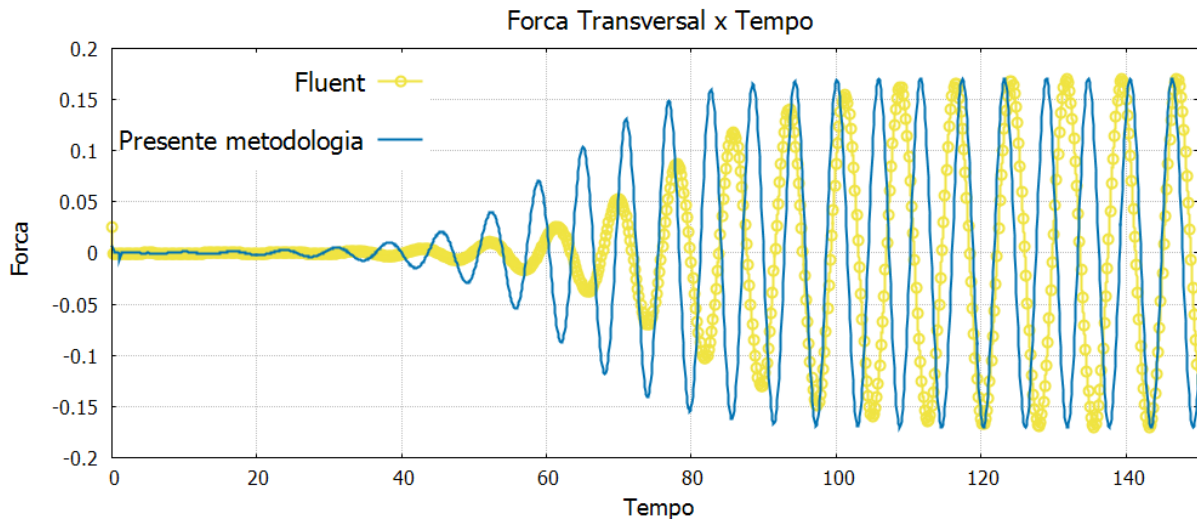


Figura 7. Esforços transversais no cilindro, obtidos pela presente metodologia e pelo Fluent. Reynolds 100.

A Figura 8 ilustra os resultados obtidos por esta ferramenta com Reynolds 100, ao colorir o domínio e traçar linhas de contorno baseadas na magnitude do campo de velocidade.

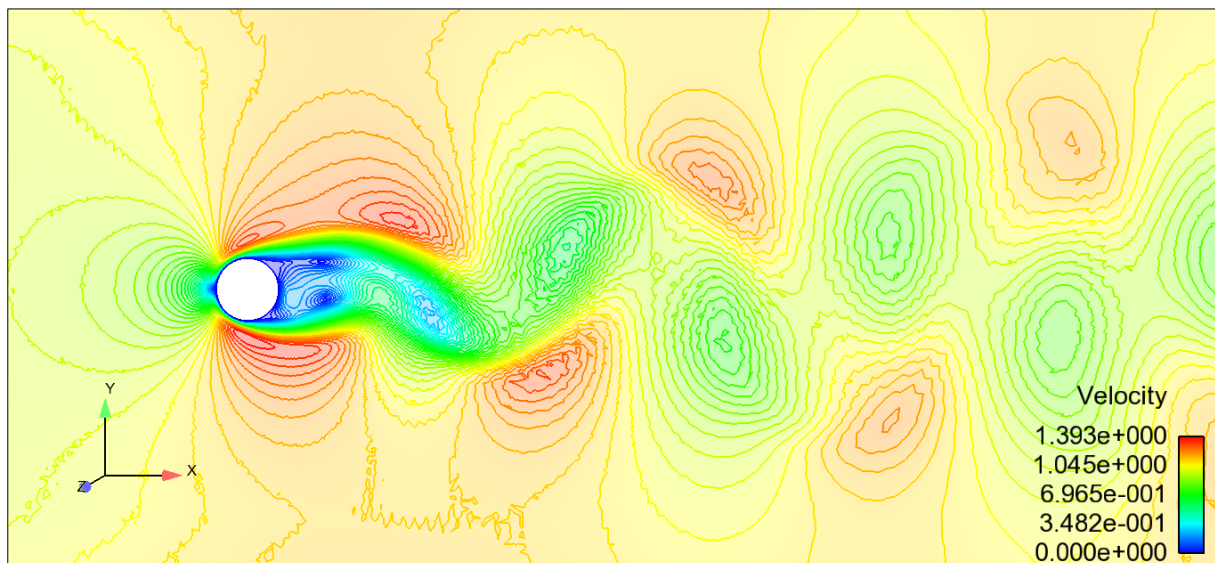


Figura 8. von Karman model, Re 100 results

5 CONCLUSÃO

Este trabalho apresentou uma formulação penalizada de elementos finitos, capaz de modelar escoamentos bidimensionais e incompressíveis de fluidos newtonianos. Algumas das principais dificuldades presentes na simulação computacional de fluidos foram introduzidas, bem como métodos utilizados para contorná-las. Atenção especial foi dedicada aos métodos mais relevantes dentre aqueles que compõem a presente metodologia, e algumas de suas capacidades exemplificadas nos estudos de caso.

O principal objetivo atingido por este trabalho foi o desenvolvimento de uma formulação consistente, capaz de modelar as equações de Navier Stokes de forma conveniente, sem a introdução de parâmetros de estabilização. Os resultados obtidos apresentam boa concordância com aqueles encontrados na literatura.

Trabalhos futuros pretendem estender as capacidades da formulação desenvolvida, capacitando-a, por exemplo, a solucionar problemas tridimensionais de interação fluido-estrutura.

REFERÊNCIAS

Ahlborn, B., Seto, M. L. & Noack, B. R., 2002. On drag, Strouhal number and vortex-street structure. *Fluid Dynamics Research*.

Brezzi, F., 1974. On the existence, uniqueness and approximation of saddle-point problems arising from lagrange multipliers. *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis - Modélisation Mathématique et Analyse Numérique*.

Brooks, A. N. & Hughes, T. J., 1982. Streamline upwind/Petrov-Galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations. *Computer methods in applied mechanics and engineering*.

Eckert, M., 2007. *The dawn of fluid dynamics: a discipline between science and technology*. s.l.:John Wiley & Sons.

Engelman, M., Strang, G. & Bathe, K. J., 1981. The application of quasi-Newton methods in fluid mechanics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*.

Gresho, P. M. & Sani, R. L., 1998. *Incompressible flow and the finite element method*. New York: John Wiley and Sons, Inc..

Hughes, T. J. R., 1987. *The finite Element method: linear static and dynamic finite element analysis*. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, Inc..

Hughes, T. J. R., Liu, W. K. & Brooks, A., 1979. Finite element analysis of incompressible viscous flows by the penalty function formulation. *Journal of Computational Physics*.

Karam, F. J., 1989. *Uma nova formulação de elementos finitos mistos para escoamentos incompressíveis*. Rio de Janeiro(RJ): Universidade Federal do Rio de Janeiro.

Malkus, D. S. & Hughes, T. J. R., 1978. Mixed finite element methods - reduced and selective integration techniques: a unification of concepts. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*.

Reddy, J. N., 1982. Penalty-finite-element analysis of 3-D Navier-Stokes equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 19 Fevereiro.

SILVA, C. E. et al., 2009. EdgeCFD-ALE: A finite element system for complex fluid-structure interactions in offshore engineering.. *CILAMCE*, Issue Buzios.

Temam, R., 1977. *Navier-Stokes Equations*. North Holland.