



ACOPLAMENTO MCD/MRPR PARA ANÁLISE DE ESTRUTURAS METÁLICAS, DE CONCRETO E MISTAS

Ígor J. M. Lemes

Andréa R. D. Silva

Ricardo A. M. Silveira

Paulo A. S. Rocha

igorjml@hotmail.com

andreadiassilva@yahoo.com.br

ricardo@em.ufop.br

paulorocha@em.ufop.br

Programa de Pós Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Ouro Preto

Campus Universitário s/n, Morro do Cruzeiro, 35400-000, Ouro Preto, MG, Brasil

Resumo. A utilização de materiais com alta resistência na confecção de estruturas afeta diretamente a esbeltez dos elementos que a compõem. Assim, as estruturas tendem a apresentar baixa rigidez, e como resultado, o comportamento não linear se torna relevante. Nesse contexto, o Método dos Elementos Finitos (MEF) se destaca na simulação numérica de problemas estruturais. Já consolidado na análise avançada de estruturas de aço, o CS-ASA (Silva, 2009) utiliza formulações do MEF baseadas no Método da Rótula Plástica Refinado (MRPR), considerando então, a plasticidade de forma concentrada. As intervenções propostas neste trabalho serão realizadas dentro dessa plataforma computacional. A obtenção da capacidade resistente de seções com materiais heterogêneos, como o concreto, não é trivial. Além disso, a sua relação constitutiva não linear dificulta a definição das rigidezes dos elementos conforme as deformações variam. Dessa forma, tanto as curvas de interação normal-momento fletor quanto as rigidezes axial e à flexão serão obtidas por meio do Método da Compatibilidade de Deformações (MCD). É importante ressaltar que para estruturas mistas a perfeita interação entre os materiais será considerada. Por fim, os resultados obtidos no presente trabalho serão comparados com respostas numéricas e experimentais disponíveis na literatura.

Palavras-Chave: MEF, MRPR, Curvas de interação, MCD, Rigidez generalizada

1 INTRODUÇÃO

No contexto da análise numérica avançada de estruturas, o Método dos Elementos Finitos (MEF) se destaca como ferramenta eficiente. Assim, os *softwares* comerciais ou produzidos de forma independente baseados nesse método se tornam meios importantes para a avaliação e entendimento do comportamento de problemas associados à engenharia. O programa CS-ASA, *Computational System for Advanced Structural Analysis* (Silva, 2009), vem sendo desenvolvido ao longo dos últimos anos visando o estudo de diversas fontes de não linearidade, tanto no âmbito da análise estática quanto dinâmica de estruturas de aço. Mais recentemente, Lemes (2015) incluiu uma metodologia generalizada para avaliação da capacidade resistente da seção transversal e, acoplada ao conceito de rigidez homogeneizada, proporcionou ao CS-ASA condições para a realização de análises inelásticas de segunda ordem de estruturas mistas.

São encontrados na literatura diversos trabalhos nesta linha de pesquisa (Caldas, 2004; Bratina et al., 2004; Muniz, 2005; Chiorean, 2013; Gonçalves e Carvalho, 2014). A busca pela generalização e eficiência das formulações induz a utilização de métodos de análise da plasticidade de forma distribuída, como é comumente chamado o Método da Zona Plástica (MZP). Nessa abordagem, a consideração direta das deformações na formulação facilita a modelagem de elementos que possuam o concreto na sua composição. Isso se deve ao comportamento não linear do material além de sua anisotropia. Embora seja considerado mais preciso (Chen e Kim, 1997), o MZP demanda o intenso esforço computacional.

Para se obter boa precisão nos resultados de forma mais viável computacionalmente o Método da Rótula Plástica Refinado (MRPR) surge como alternativa. Usualmente, o MRPR está associado à análise de estruturas metálicas (Chan e Chui, 2000; Silva, 2009) e mistas (Fong e Chan, 2012; Lemes, 2015). Nessas abordagens, é possível que a degradação da rigidez da seção transversal seja feita por meio de elementos de mola fictícios inseridos nas extremidades dos elementos finitos de viga-coluna. Essa degradação se inicia quando a combinação de esforço normal e momento fletor ultrapassa o limite do regime elástico imposto por uma curva de início de plastificação. Em outras palavras, a seção transversal apresenta comportamento linear elástico até que essa curva seja atingida. Por outro lado, em qualquer análise, sempre haverá um trecho onde o comportamento dos materiais presentes na seção será linear elástico. Dessa forma, a modelagem de elementos de concreto armado não é precisa.

Liu et al. (2012) propuseram um modelo de análise de estruturas de concreto armado via MRPR. Nesse modelo a rigidez a flexão da seção transversal é avaliada através da relação momento-curvatura. Assim o momento de inércia da seção transversal era reduzido por uma equação aproximada proposta por Branson e Metz (1963). Já Ngo-Huu e Kim (2012) estudaram uma metodologia mista entre o MRPR e o MZP para a avaliação de estruturas mistas. Nesse trabalho os autores fizeram a discretização da seção transversal em fibras e avaliavam o módulo de elasticidade tangente dos materiais por meio das respectivas deformações.

Propõe-se neste trabalho uma abordagem baseada no Método da Compatibilidade de Deformações (MCD) (Caldas, 2004; Chiorean, 2013) para a avaliação tanto da capacidade resistente da seção transversal, quanto das rigidezes axial e à flexão. A construção da relação momento-curvatura se torna essencial para tal avaliação. Uma vez considerando a tangente à relação momento-curvatura, as rigidezes dependem somente do módulo de elasticidade dos materiais, retirado das respectivas relações constitutivas. Visa-se o acoplamento dessa metodologia ao MRPR avaliando a plasticidade em termos nodais através dos parâmetros generalizados de

rigidez. Dessa forma, as molas fictícias não são necessárias para a simulação da não linearidade dos materiais da seção transversal.

O presente trabalho está organizado em 4 seções. Na Seção 2 é apresentado o MCD, juntamente com as relações constitutivas utilizadas e o modelo de discretização da seção transversal. Mais adiante, na Seção 3, a formulação numérica baseada no MRPR (Silva, 2009; Gonçalves, 2013) é detalhada, incluindo o conceito de rigidez generalizada na montagem da matriz de rigidez do elemento. São simulados alguns exemplos para validação da metodologia proposta no item 4. Por fim, alguns aspectos importantes observados nos exemplos estudados são levantados na Seção 5.

2 MÉTODO DA COMPATIBILIDADE DE DEFORMAÇÕES

Ao submeter um elemento estrutural a forças externas, este se deforma gerando esforços internos para equilibrar o sistema. Essa deformação, a nível da seção transversal, é abordada no Método da Compatibilidade de Deformações (MCD). Supondo que todos os materiais presentes no elemento atuem conjuntamente (interação total), pode-se supor que o campo de deformações é linear, como será abordado mais adiante.

Para se fazer a análise da condição deformada da seção transversal e obter a capacidade resistente e sua rigidez, uma discretização da seção é feita. Na análise de estruturas planas, a discretização em fatias é bastante satisfatória (Lemes, 2015). Porém, no presente trabalho, as tensões residuais serão introduzidas explicitamente no perfil metálico. Assim, será feita a discretização em fibras, como ilustrado na Fig. 1. A seguir são apresentados os modelos constitutivos do aço e do concreto. Na Subseção 2.2, é descrito o procedimento iterativo realizado a nível da seção transversal para a construção da relação momento-curvatura. Por fim, os procedimentos para obtenção das rigidezes generalizadas e a curva de interação normal-momento são descritos nas seções 2.3 e 2.4, respectivamente.

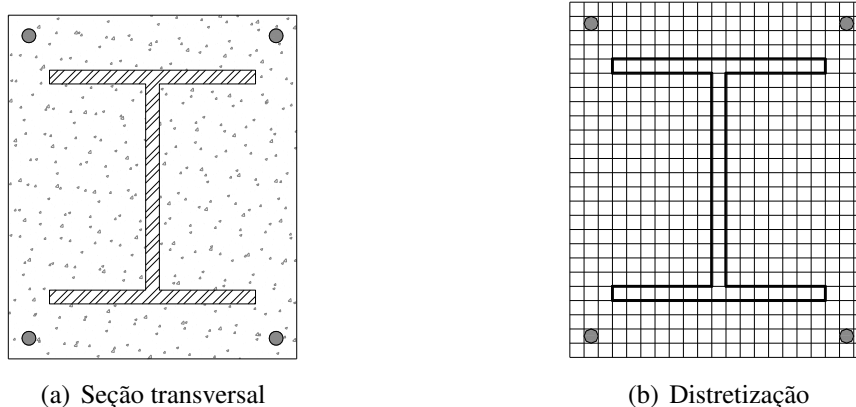


Figura 1: Discretização da seção transversal em fibras

2.1 Relações constitutivas

O comportamento do aço será descrito através do modelo constitutivo bilinear ilustrado na Fig. 2(a). Deve-se ressaltar a possibilidade da consideração do encruamento do material. Uma característica do aço é a isotropia, ou seja, seu comportamento à tração é igual ao de

compressão. Assim, na Fig. 2(a) é mostrado apenas o trecho referente ao primeiro quadrante da relação constitutiva. Vale lembrar que, após o processo de fabricação, o elemento de aço sofre um resfriamento desigual originando as tensões residuais. Assim, considera-se que ocorram deformações prescritas na seção. Nesse trabalho, a distribuição das tensões residuais, σ_r , segue o modelo ilustrado na Fig. 2(b), que é o mesmo utilizado por Chiorean (2013). Descreve-se então o comportamento do aço da seguinte forma:

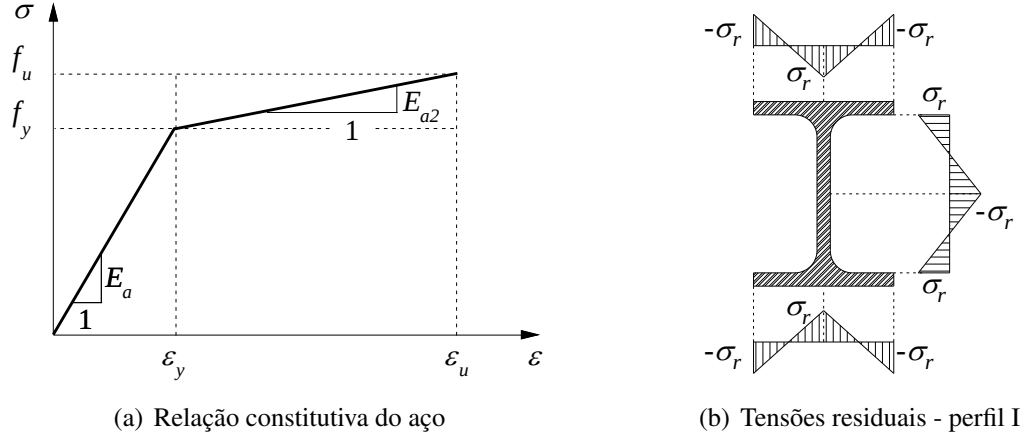


Figura 2: Comportamento do aço: relação constitutiva e tensões residuais

$$\sigma = \begin{cases} -f_y + E_{a2}(\varepsilon + \varepsilon_y), & -\varepsilon_u \leq \varepsilon \leq -\varepsilon_y \\ E_a \varepsilon, & -\varepsilon_y < \varepsilon < \varepsilon_y \\ f_y + E_{a2}(\varepsilon - \varepsilon_y), & \varepsilon_y \leq \varepsilon \leq \varepsilon_u \end{cases} \quad (1)$$

em que f_y , f_u , ε_y e ε_u , são respectivamente as tensões e deformações de escoamento e última do aço, E_a é o módulo de elasticidade no regime elástico e E_{a2} é o módulo de elasticidade na fase de encruamento.

O concreto tem propriedades mecânicas distintas na tração e na compressão. Quando traçado, esse material apresenta resistência máxima f_{cr} (Fig. 3(b)). Destaca-se, também, que ao atingir a resistência f_{cr} inicia-se o processo de fissuração. Para deformações superiores a ε_{cr} o concreto perde resistência. Assim, diversos pesquisadores e até mesmo as normas de projeto desconsideram sua contribuição quando traçado. No presente trabalho a relação constitutiva proposta pela NBR 6118 (2014), ilustrada na Fig. 3(a), é utilizada para descrever o comportamento do concreto à compressão. Na tração, o modelo proposto por Bažant e Oh (1983), optando por limitar a máxima deformação de tração em 0,0007, como feito por Bratina et al. (2004), e ilustrado na Fig. 3(b), foi implementado. Dessa forma, tem-se:

$$\sigma_c = \begin{cases} E_{tr} \varepsilon, & 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_{cr} \\ E_{tr,2}(\varepsilon - \varepsilon_{cr}) - f_{cr}, & \varepsilon > \varepsilon_{cr} \\ \left[\frac{2\varepsilon}{\varepsilon_{ci}} - \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{ci}} \right)^2 \right] f_c, & \varepsilon_{ci} < \varepsilon \leq 0 \\ -f_c, & \varepsilon_{cu} \leq \varepsilon \leq \varepsilon_{ci} \end{cases} \quad (2)$$

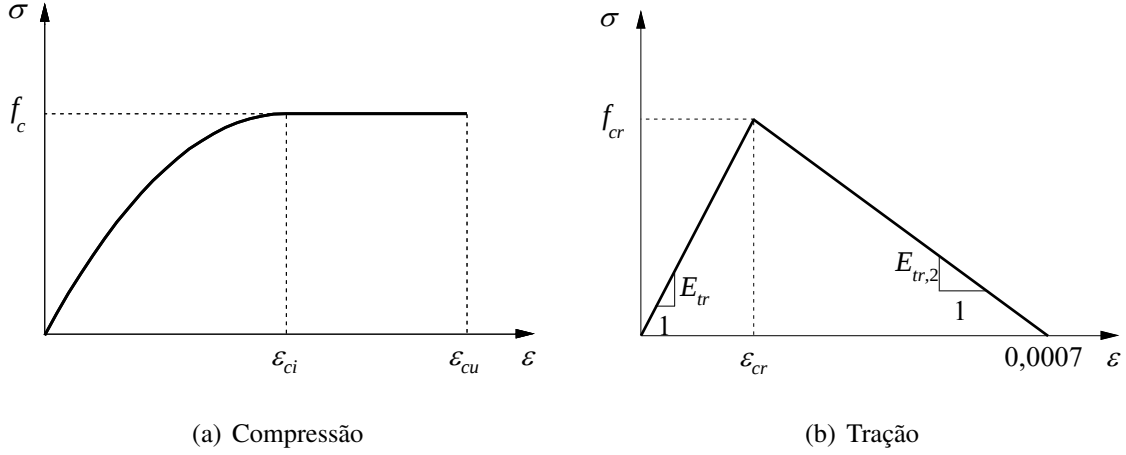


Figura 3: Relações constitutivas do concreto: compressão e tração

sendo ε_{ci} , ε_{cu} e ε_{cr} a deformação limite do trecho de comportamento não linear do concreto, a deformação última do concreto à compressão, e a deformação de início de fissuração, respectivamente; f_{cr} é a resistência à fissuração do concreto; E_{tr} e $E_{tr,2}$ são os módulos de elasticidade do concreto à tração antes e depois da fissuração, respectivamente.

2.2 Relação momento-curvatura

Neste trabalho, optou-se por utilizar o método iterativo de *Newton-Raphson* para a obtenção da relação momento-curvatura ($M - \phi$). Para um valor fixo de esforço axial, N , são dados incrementos no momento fletor solicitante, M , até que o momento último resistente seja atingido. A estratégia de incrementos utilizada foi baseada na proposta de Zubyan (2013), ou seja:

$$M_{j+1} = M_j + d\phi EI \quad (3)$$

Para descrever a distribuição de deformações, a discretização da seção em fibras ilustrada na Fig. 1(b) é bastante eficiente. O propósito dessa divisão é captar a deformação axial, ε , no centroide plástico CP de cada fibra e então, através das relações constitutivas dos materiais, obter as respectivas tensões, σ_i . Duas variáveis são substanciais para empregar essa metodologia: a área das fibras, A_i , e sua respectiva posição, y_i . Essa segunda é referenciada à linha neutra plástica (LNP), já que alguns pesquisadores (Caldas, 2004; Chen et al., 2001; Sfakianakis, 2002) apontam que dessa forma os problemas de convergência são minimizados.

A Figura 4 ilustra a distribuição de deformações em uma seção de concreto armado para uma combinação de esforços axial e de momento fletor. Assim, a deformação axial na i -ésima fibra, ε_i , é dada por:

$$\varepsilon_i = \varepsilon_0 + \varepsilon_{ri} + \phi y_i \quad (4)$$

em que y_i é a distância entre os centroides plásticos da fibra analisada e da seção transversal, ε_0 é a deformação axial no CP da seção, ε_r é a deformação devido às tensões residuais (se houver aço na fibra), e ϕ a respectiva curvatura.

Para a notação matricial adotada a seguir, as variáveis ε_0 e ϕ serão posições do vetor de deformações $\mathbf{X} = [\varepsilon_0 \ \phi]^T$. Chiorean (2013) ressalta que, adotando-se $\mathbf{X} = \mathbf{0}$ na primeira iteração, a convergência é atingida rapidamente. Numericamente, pode-se dizer que o equilíbrio

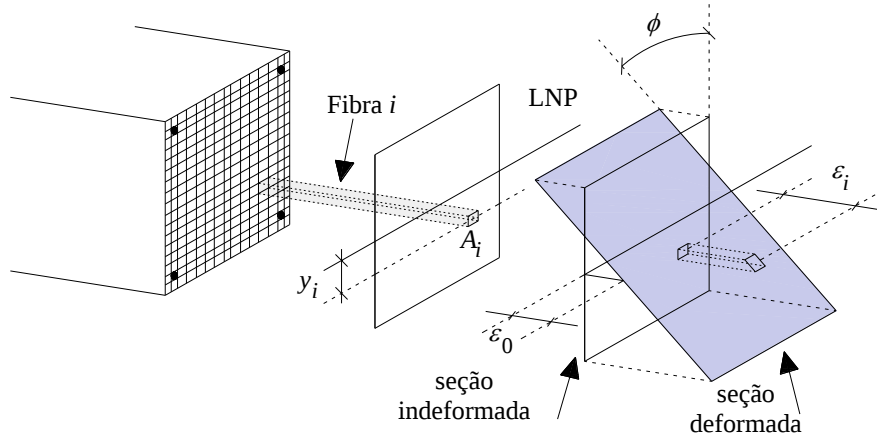


Figura 4: Campo linear de deformações sem curvatura no eixo y

da seção é obtido quando a seguinte equação é satisfeita:

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}) = \mathbf{f}_{ext} - \mathbf{f}_{int} \cong 0 \quad (5)$$

em que o vetor de forças externas $\mathbf{f}_{ext}$ é dado pelo esforço axial, N , e de momento fletor, M . Na forma matricial, a equação anterior é descrita como:

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n_{fib}} \sigma[\varepsilon_i(\varepsilon_0, \phi)] A_i \\ \sum_{i=1}^{n_{fib}} \sigma[\varepsilon_i(\varepsilon_0, \phi)] y_i A_i \end{bmatrix} \quad (6)$$

na qual, n_{fib} é o número de fibras geradas pela discretização da seção.

Já o vetor de forças internas é dado por expressões integrais clássicas para o esforço axial, N_{int} , e momento fletor, M_{int} . Uma vez conhecidas as áreas, A_i , e posições, y_i , de cada fibra, a integral passa a ser o somatório descrito na Eq. 6.

Embora seja eficiente iniciar o processo com $\mathbf{X} = \mathbf{0}$, a convergência só é atingida na primeira iteração se os esforços externos forem nulos. Assim, para a iteração seguinte, $k + 1$, o vetor de deformações é dado por:

$$\mathbf{X}^{k+1} = \mathbf{X}^k + \mathbf{F}'(\mathbf{X}^k)^{-1} \mathbf{F}(\mathbf{X}^k) \quad (7)$$

na qual $\mathbf{F}'$ é a matriz Jacobiana do problema não linear expresso na Eq. 5, isto é:

$$\mathbf{F}' = \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{X}} \right) = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n_{fib}} E_{T,i} A_i & \sum_{i=1}^{n_{fib}} E_{T,i} y_i A_i \\ \sum_{i=1}^{n_{fib}} E_{T,i} y_i A_i & \sum_{i=1}^{n_{fib}} E_{T,i} y_i^2 A_i \end{bmatrix} \quad (8)$$

em que $E_{T,i}$ é o módulo de elasticidade tangente retirado diretamente da relação constitutiva do material componente da i -ésima fibra.

O critério de convergência adotado neste trabalho é baseado na razão das normas Euclidianas do vetor de forças desequilibradas, $\mathbf{F}$, e do vetor de forças externas, $\mathbf{f}_{ext}$. Assim, escreve-se:

$$\frac{\|\mathbf{F}\|}{\|\mathbf{f}_{ext}\|} \leq Tol \quad (9)$$

com Tol sendo uma dada tolerância, que é assumida aqui 10^{-5} .

2.3 Rigidez generalizada

Uma vez construída a relação momento-curvatura e conhecendo os esforços atuantes no ponto nodal em questão, é possível, através do MCD, obter os parâmetros de rigidez EA_t e EI_t . Para isso, escrevem-se as seguintes equações (Chiorean, 2013):

$$EA_t = \frac{f_{11}f_{22} - f_{12}^2}{f_{22}} \quad (10)$$

$$EI_t = \frac{f_{11}f_{22} - f_{12}^2}{f_{11}} \quad (11)$$

sendo f_{ij} os termos da matriz Jacobiana dada na Eq. 8.

2.4 Curva de interação normal-momento fletor

Quando, para um dado esforço axial, é atingido o momento máximo da relação momento-curvatura, tem-se a plastificação total da seção. Define-se então, que esse par de esforços é um ponto da curva de interação normal-momento fletor.

3 MODELAGEM NUMÉRICA VIA MRPR

A aplicação da metodologia apresentada na seção anterior à plataforma computacional CS-ASA (Silva, 2009) introduz uma nova metodologia para análise de estruturas metálica e mistas de aço e concreto. Além disso, a abordagem da relação momento-curvatura para obtenção dos parâmetros de rigidez melhoram consideravelmente a análise do comportamento não linear de estruturas de concreto armado.

É importante destacar algumas considerações envolvendo a formulação de elementos finitos adotada neste trabalho, isto é:

- todos os elementos são inicialmente retos e prismáticos e a seção transversal permanece plana após a deformação;
- são desprezados os efeitos de instabilidade locais, como a flambagem nas chapas componentes dos perfis de aço; assim a seção pode desenvolver sua capacidade total de rotação plástica;
- os efeitos de instabilidade globais que podem acontecer em problemas tridimensionais, como a flambagem lateral ou torcional, são ignorados pois considera-se um sistema de travamento no eixo z ;
- grandes deslocamentos e rotações de corpo rígido são permitidos;
- as deformações originadas pelo cisalhamento são ignoradas;

- no caso da análise de estruturas mistas, considera-se a interação total entre os elementos de aço e concreto.

Diferentemente dos estudos anteriores utilizando a plataforma CS-ASA (Silva, 2009; Gonçalves, 2013; Lemes, 2015), as molas fictícias usualmente utilizadas para a simulação da não linearidade do material, não serão consideradas aqui. Na modelagem do sistema estrutural via MEF, utiliza-se o elemento finito de pórtico plano delimitado pelos pontos nodais i e j , como mostrado na Fig. 5. Também são ilustrados os esforços internos, M_i , M_j e P , e os respectivos graus de liberdade θ_i , θ_j e δ , referentes ao sistema corrotacional adotado.

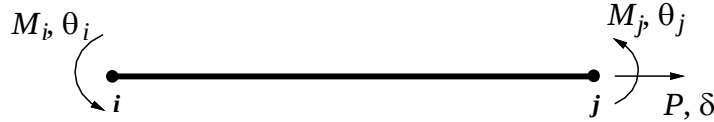


Figura 5: Elemento de viga coluna referenciado ao sistema corrotacional

A relação de equilíbrio do elemento finito ilustrado na Fig. 5, na forma incremental, é dada por:

$$\begin{Bmatrix} \Delta P \\ \Delta M_i \\ \Delta M_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} EA_t/L & 0 & 0 \\ 0 & k_{ii} & k_{ij} \\ 0 & k_{ji} & k_{jj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \delta \\ \Delta \theta_i \\ \Delta \theta_j \end{Bmatrix} \quad (12)$$

ou ainda, na sua forma compacta, tem-se:

$$\Delta \mathbf{f}_c = \mathbf{K}_c \Delta \mathbf{u}_c \quad (13)$$

na qual, ΔP , ΔM_i e ΔM_j são os incrementos de força axial e de momentos fletores e ΔL , $\Delta \theta_i$ e $\Delta \theta_j$ são os incrementos de deformação axial e rotações nodais, respectivamente.

Já os parâmetros k_{ii} , k_{ij} , k_{ji} e k_{jj} são termos da matriz de rigidez que dependem da formulação geometricamente não linear. Optou-se, neste trabalho, pela formulação linearizada proposta por Yang e Kuo (1994). Partindo dos estudos de Ziemian e McGuire (2002), Gonçalves (2013) desenvolve expressões para avaliar os termos da Eq. 12 considerando a variação do módulo de elasticidade de forma linear ao longo do comprimento do elemento. Dessa forma, utilizando as rigidezes à flexão, tem-se:

$$k_{ii} = \frac{3EI_{t,i} + EI_{t,j}}{L} + \frac{2PL}{15} \quad (14)$$

$$k_{ij} = k_{ji} = \frac{EI_{t,i} + EI_{t,j}}{L} - \frac{PL}{30} \quad (15)$$

$$k_{jj} = \frac{EI_{t,i} + 3EI_{t,j}}{L} + \frac{2PL}{15} \quad (16)$$

sendo os termos $EI_{t,i}$ e $EI_{t,j}$ as rigidezes à flexão dos pontos nodais i e j , respectivamente, obtidas por meio do procedimento descrito na Seção 2.2.

Uma vez formadas rótulas plásticas na estrutura, um incremento de carga faz com que as forças internas tendem a violar o domínio resistente naquele ponto. Faz-se necessária então uma estratégia para que isso não ocorra. Assim, o esforço axial é mantido constante e o momento fletor é reduzido de forma a não violar a curva de interação normal-momento. Essa

estratégia é denominada *Return Mapping* (Silva, 2009). Uma vez definida a relação força-deslocamento no sistema corrotacional, deve-se levá-la ao sistema global. Maiores detalhes sobre a transformação de sistemas e o *Return Mapping* podem ser vistos em Silva (2009).

4 EXEMPLOS NUMÉRICOS

Nesta seção, a estratégia numérica apresentada no presente trabalho é utilizada visando o estudo de sistemas estruturais metálicos, de concreto e mistos de aço e concreto. Os exemplos aqui abordados são divididos em quatro grupos: coluna de Foure (concreto armado), pórtico quadrado em concreto armado, pórtico metálico de seis andares e pórtico metálico simples. Nesse último, um estudo comparativo entre a utilização de estruturas metálicas e mistas será feito. Ressalta-se que os resultados encontrados são comparados com os apresentados na literatura, obtidos de forma numérica e/ou experimental.

4.1 Coluna de Foure

Na Figura 6 é apresentada a chamada coluna de Foure, que foi ensaiada inicialmente por Espion (1993) e depois estudada por diversos pesquisadores (Bratina et al., 2004; Muniz, 2005; Liu et al., 2012; Gonçalves e Carvalho, 2014) para validação de resultados numéricos. Trata-se de uma coluna de concreto armado com 225 cm de comprimento engastada na base sob flexão em torno do eixo de menor inércia, ilustrada na Fig. 6. Essa flexão ocorre devido à uma excentricidade da carga vertical aplicada à 1,5 cm do eixo centroidal do elemento. Além disso, segundo Liu et al. (2012), uma imperfeição geométrica inicial deve ser tomada igual a $h/1000$. A malha de elementos finitos adotada neste exemplo tem 4 elementos e 5 pontos nodais. A seção transversal é retangular 15x20 cm com armaduras positivas e negativas com áreas iguais à $2,26 \text{ cm}^2$ com cobrimento de 2 cm, discretizada em 16 fibras estruturadas. Os dados dos materiais componentes da coluna são ilustrados na Tabela 1.

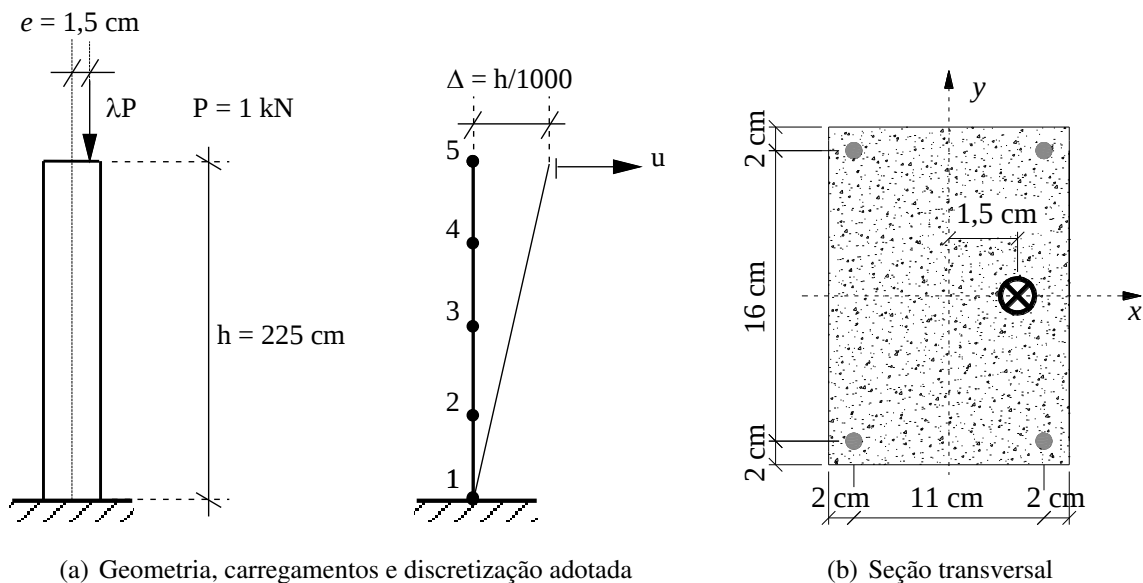


Figura 6: Coluna de Foure

Tabela 1: Dados dos materiais

Concreto			Aço		
F_{cd} (kN/cm ²)	ε_{ci}	ε_{cu}	F_{yd} (kN/cm ²)	E_a (kN/cm ²)	ε_u
3,83	-0,0023	-0,0035	46,5	20000	0,020

Duas análises são realizadas aqui: considerando a resistência a tração do concreto (CCT) e desconsiderando-a (CST). Pode-se verificar na Fig. 7 boa convergência entre os resultados obtidos com a presente metodologia e os encontrados na literatura tanto no contexto numérico quanto experimental. Na análise CCT realizada no CS-ASA ($P_{max,CCT}^{CS-ASA} = 448,6$ kN), verifica-se uma diferença de apenas 1,2% no valor da carga máxima suportada pelo elemento estrutural em comparação ao valor medido em laboratório ($P_{max}^{Espion} = 454$ kN). Em um segundo momento, a resistência à tração do concreto é desconsiderada (CST). Nota-se então uma redução da carga limite da coluna ($P_{max,CST}^{CS-ASA} = 414$ kN). Muniz também analisa este problema. Em sua pesquisa a resistência à tração do concreto é desprezada. Dessa forma, a carga última obtida foi de $P_{max}^{Muniz} = 422$ kN, que corresponde a uma diferença de 1,8%.

A Figura 8 ilustra o histórico de variação das forças internas e as respectivas curvas de interação normal-momento fletor para as análises CST e CCT. Vê-se claramente que a consideração da resistência à tração do concreto não é determinante na obtenção da curva NM. Conclui-se que a amplificação da capacidade resistente da coluna na análise CCT se deve à rigidez da coluna. A combinação entre as cargas normal de compressão (λP) e de momento fletor ($\lambda P e$) não é suficiente para que as deformações de tração sejam significantes a ponto de iniciar o processo de fissuração. Assim, essas deformações do concreto são menores do que ε_{cr} , e o módulo de elasticidade é tomado igual $E_{T,0}$, diferentemente da análise CST, onde esse valor é nulo.

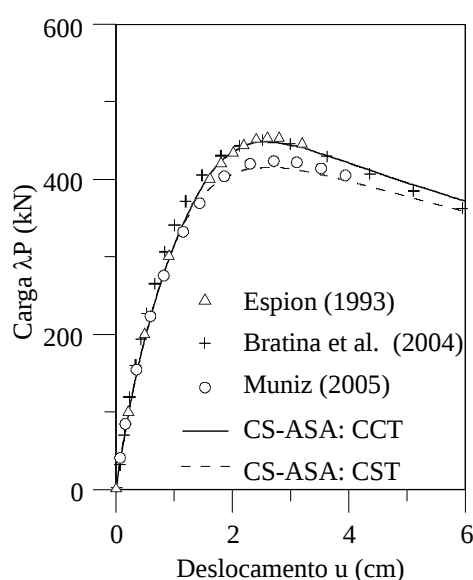


Figura 7: Trajetórias de equilíbrio

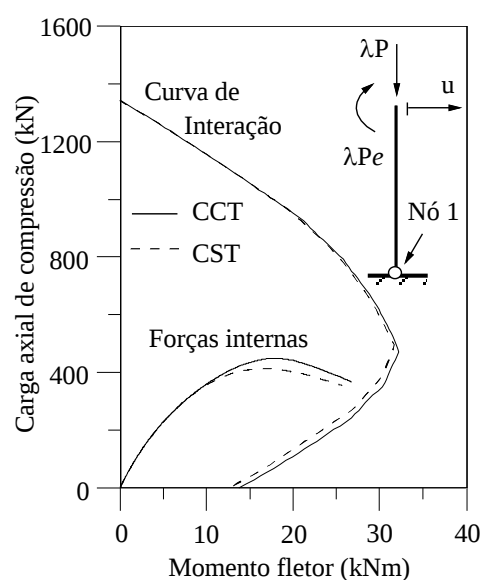


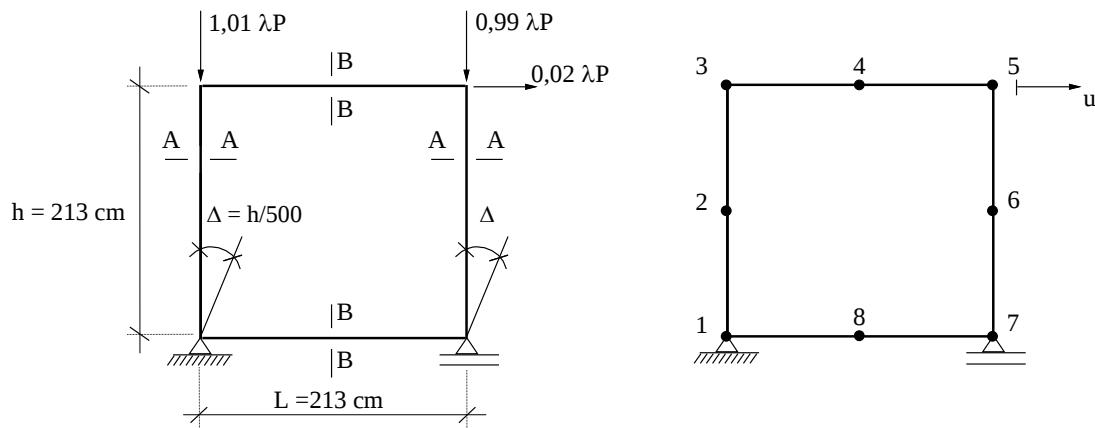
Figura 8: Forças internas no nó 1

4.2 Pórtico quadrado em concreto armado

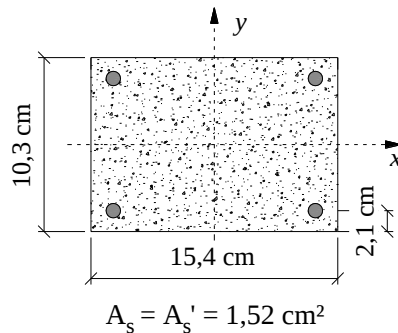
O portal ilustrado na Fig. 9 é estudado nesta seção. Novamente, estão disponíveis na literatura resultados experimentais (Ferguson e Breen, 1966) e numéricos (Gunnin et al., 1977; Bratina et al., 2004). Trata-se de um pórtico quadrado de concreto armado com altura e vão iguais a 213 cm e uma imperfeição geométrica inicial global igual a $h/500$. São aplicadas cargas incrementais verticais no topo das duas colunas e uma carga horizontal no topo da coluna da direita. Cada membro é dividido em dois elementos finitos. As seções AA (colunas) e BB (vigas) são retangulares com armaduras longitudinais conforme ilustrado nas Figs. 9(b) e 9(c), respectivamente. Nas seções transversais uma malha estruturada com 64 fibras é utilizada. Os dados dos materiais utilizados na confecção do pórtico em questão são destacados na Tab. 2.

Tabela 2: Dados dos materiais

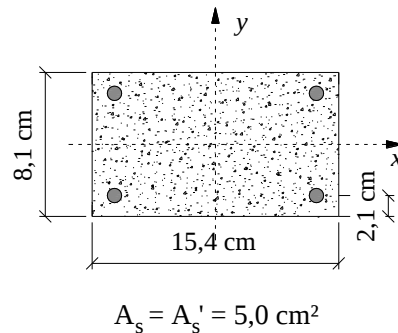
Elemento	Concreto			Aço		
	F_{cd} (kN/cm ²)	ε_{ci}	ε_{cu}	F_{yd} (kN/cm ²)	E_a (kN/cm ²)	ε_u
Colunas	2,21	-0,00185	-0,0035	38,39	20200	0,020
Vigas	2,21	-0,00185	-0,0035	40,34	20200	0,020



(a) Pórtico: geometria, carregamento e discretização adotada



(b) Seção A-A



(c) Seção B-B

Figura 9: Pórtico simples: geometria, discretização adotada e seções transversais

Os resultados obtidos através do CS-ASA são ilustrados na Fig. 10 e comparados com os de Ferguson e Breen (1996) (denotado adiante como FB). Percebe-se boa proximidade entre o comportamento da estrutura obtido de forma numérica e o simulado em laboratório. A diferença entre as cargas limites é de 1%, sendo $P_{max}^{CS-ASA} = 139,6 \text{ kN}$ e $P_{max}^{FB} = 141 \text{ kN}$. Além disso, os respectivos valores de deslocamentos referentes às cargas críticas também são próximos, sendo $u^{CS-ASA} = 6,55 \text{ cm}$ e $u^{FB} = 6,11 \text{ cm}$.

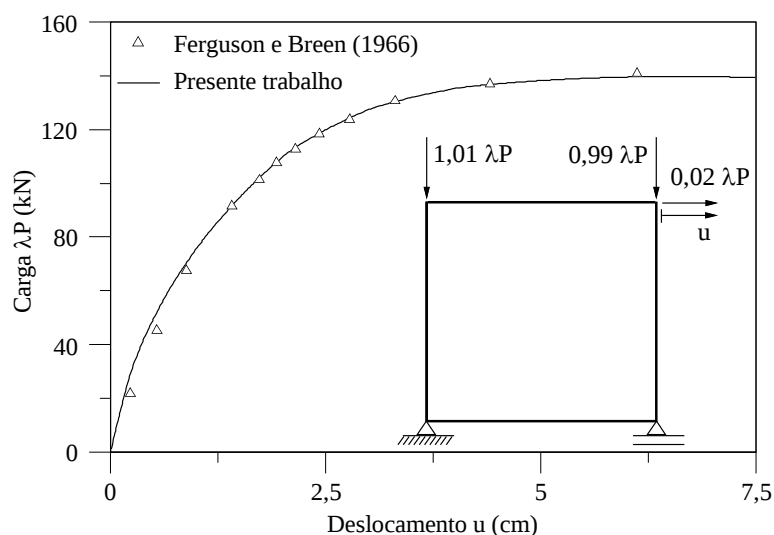


Figura 10: Trajetória de equilíbrio - pórtico em concreto armado

4.3 Pórtico de aço seis andares

Muito utilizado para validação e calibração de diversas formulações (Barsan e Chiorean, 1999; Chan e Chui, 2000; Rocha, 2006) o pórtico de aço ilustrado na Fig. 11 é estudado agora através da metodologia proposta neste trabalho. A estrutura em questão foi inicialmente analisada por Vogel (1985) avaliando a plasticidade tanto de forma distribuída como concentrada. A geometria, os perfis, o carregamento e a malha de elementos finitos utilizada (Rocha, 2006) são mostradas nessa mesma figura. Todas as cargas atuantes (concentradas e distribuídas) são incrementais. A estrutura apresenta uma imperfeição global igual a 1/450.

O aço dos perfis apresenta tensão de escoamento igual a 235 MPa e módulo de elasticidade tomado como 205 GPa na fase elástica. Durante o encruamento, o módulo de elasticidade é dado por 2% do valor de E no regime elástico. Vale ressaltar que as tensões residuais são negligenciadas na presente análise.

A variação do fator de carga, λ , em relação ao deslocamento horizontal no topo do pórtico é ilustrada na Fig. 12. O comportamento da estrutura obtido no CS-ASA se aproxima do resultado de Barsan e Chiorean (1999). A diferença entre o máximo valor do parâmetro de carga é de 1%, sendo $\lambda^{CS-ASA} = 1,21$ e $\lambda^{BC} = 1,20$.

4.4 Portal simples

O último exemplo deste trabalho, ilustrado na Fig. 13, refere-se a um pórtico simples bi-engastado. Diversas análises foram feitas nesse sistema estrutural por métodos de plasticidade

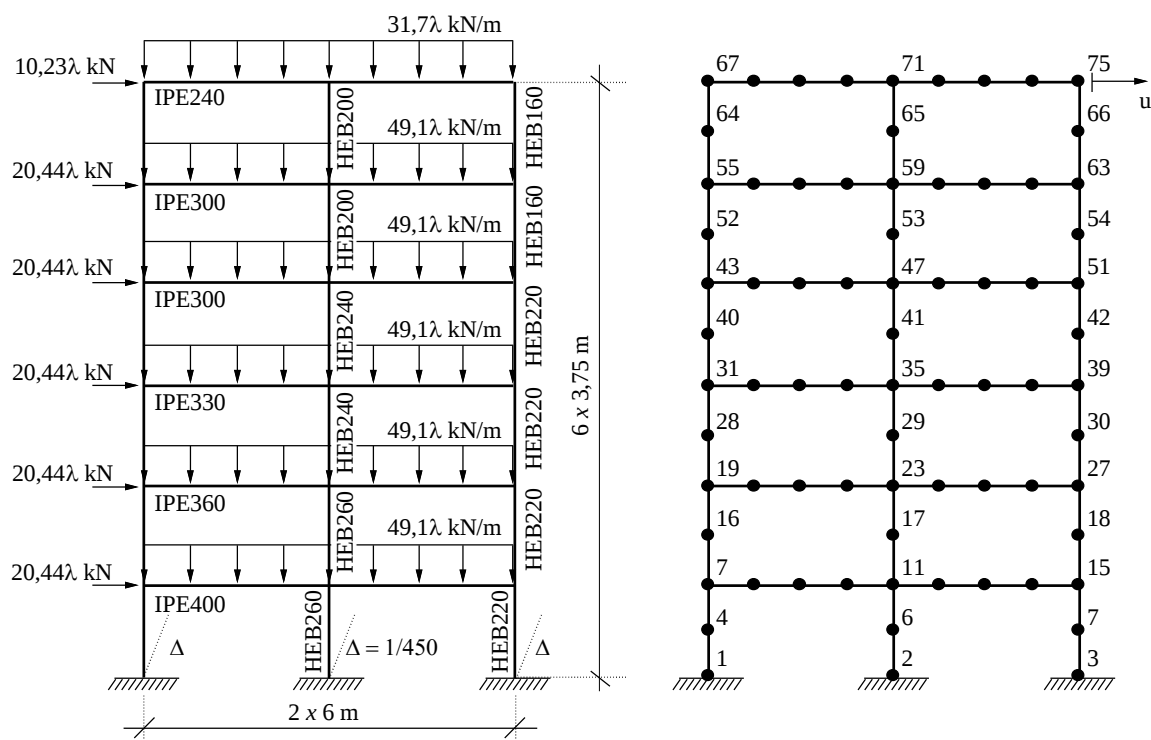


Figura 11: Pórtico de 6 andares: geometria, carregamentos e discretização adotada

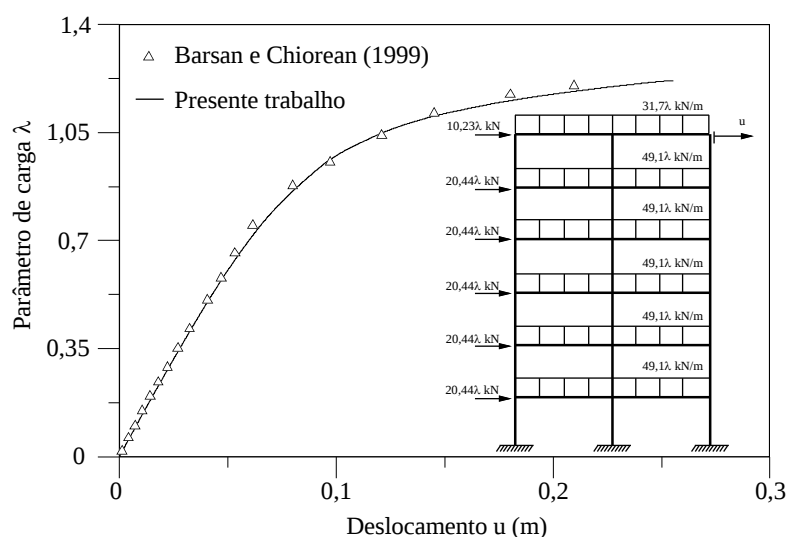


Figura 12: Trajetória de equilíbrio do pórtico de 6 andares Vogel (1985)

distribuída (Vogel, 1985) ou pelo MRPR (Silva, 2009). Diferentemente das pesquisas anteriormente citadas, Barsan e Chiorean (1999) realizaram análises considerando o encruamento do aço. Trata-se de um pórtico com 5 m de altura e 4 m de vão. Uma imperfeição geométrica inicial, Δ , será considerada. As colunas são confeccionadas com perfis HEB300 e a viga por perfis HEA400. Os elementos estruturais são de aço com tensão de escoamento igual a 235 MPa e módulo de elasticidade de 205 GPa. No presente trabalho o encruamento será considerado. Nesse estado o aço apresenta módulo de elasticidade igual a 2% do módulo de elasticidade no regime elástico.

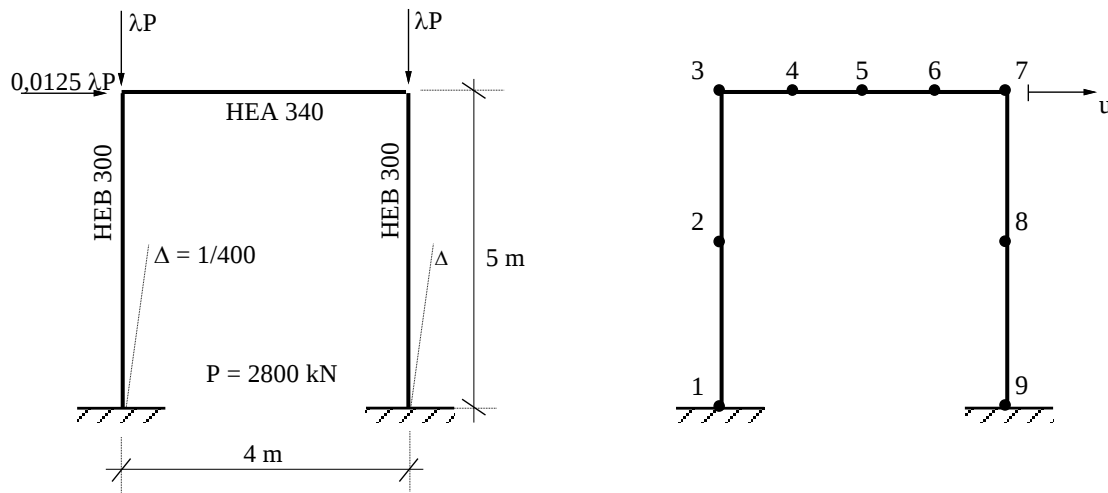


Figura 13: Pórtico metálico simples: geometria, carregamentos e discretização adotada

O comportamento do pórtico analisado se apresenta condizente com a literatura, como ilustrado na Fig. 14(a). O parâmetro de carga máximo obtido no presente trabalho foi de 1,067, que se comparado a resposta de Barsan e Chiorean (1999), 1,06, apresenta um erro de 0,7%. Duas considerações podem determinar tal diferença. A primeira delas é a relação constitutiva adotada para o aço, já que os autores adotam um modelo trilinear com um patamar de escoamento. A outra fonte de diferença é a forma como a plasticidade é avaliada, uma vez que Barsan e Chiorean (1999) utilizam o Método da Zona Plástica.

Um novo estudo é realizado neste trabalho. Propõe-se revestir parcialmente as colunas com concreto com f_{cd} igual a 30 MPa. O objetivo é avaliar o ganho de rigidez e capacidade resistente do sistema estrutural. Com a adição do concreto se observa na Fig. 14(b) que o sistema estrutural se apresenta mais rígido e com uma carga máxima maior do que o pórtico metálico, como era esperado. Nesse novo sistema, o máximo valor para o parâmetro de carga foi de 1,62, aproximadamente 52% maior que a configuração proposta por Vogel (1985).

Através da Fig. 15, pode-se observar que a seção mista não apresenta, em nenhuma combinação de esforço normal e momento fletor, capacidade resistente inferior a seção puramente metálica. Ressalta-se ainda a grande contribuição do concreto quando a seção se apresenta sob compressão. Nesse estudo, em média a capacidade resistente da seção sob compressão amplificou 48%. Quando a seção é submetida à esforço axial positivo (tração) observa-se nessa mesma figura um pequeno ganho na capacidade resistente. Isso se deve a consideração da resistência à tração do concreto.

É evidente que o preenchimento do espaço entre as mesas do perfil metálico contribuem também na rigidez do sistema estrutural, como observado na Fig. 14(b). Silva (2009) estudou o avanço da plastificação nos pontos nodais através do MRPR, e verificou que o apoio da direita (nó 9) apresentou maior índice de plastificação quando atingida a carga limite do sistema. Dessa forma, a variação da rigidez à flexão em relação ao momento fletor atuante nesse mesmo ponto nodal é ilustrada na Fig. 16. Vale ressaltar que as curvas apresentadas nessa figura são construídas até o momento em que o parâmetro de carga máximo é atingido. A acentuada queda de rigidez observada nas duas curvas está relacionada com as mesas entrando em regime de encruamento, sendo o módulo de elasticidade reduzido bruscamente, uma vez que as tensões

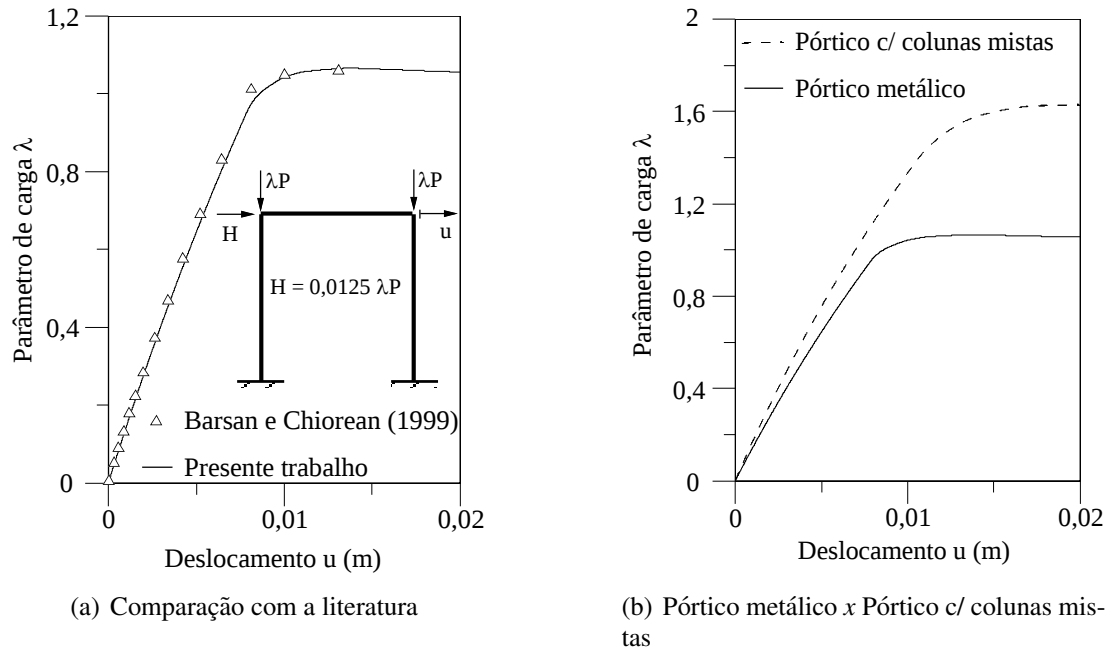


Figura 14: Trajetórias de equilíbrio

residuais não foram consideradas. Verifica-se também que a rigidez à flexão não se anula para valores elevados de momento fletor, e, na verdade, as curvas tendem à uma assíntota vertical. Isso ocorre devido a consideração do encruamento do aço.

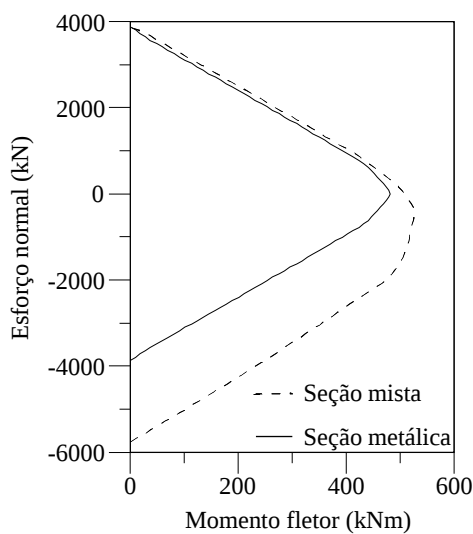


Figura 15: Curva de interação N-M das colunas

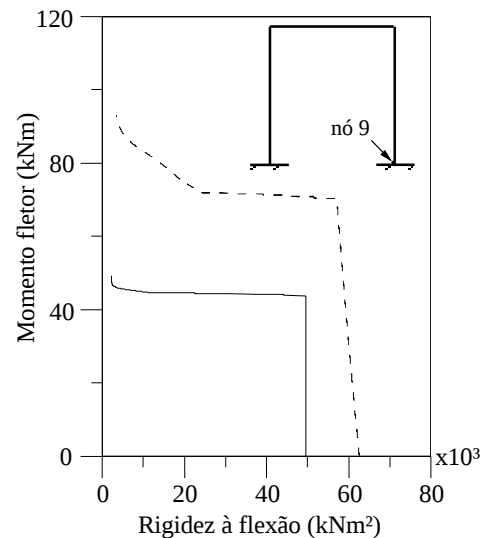


Figura 16: Variação da rigidez à flexão no nó 9

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS E PESQUISAS FUTURAS

Neste trabalho foi apresentada uma metodologia generalizada, baseada no MCD, para a avaliação da capacidade resistente e das rigidezes axial e à flexão de estruturas de aço, concreto e mistas de aço e concreto. Essa metodologia foi inserida na plataforma CS-ASA (Silva, 2009) e acoplada ao MRPR para simulação da plasticidade de forma concentrada.

Nos exemplos apresentados, vê-se que o acoplamento (MCD/MRPR) proposto representa de forma eficiente o comportamento das estruturas. Ressalta-se que o problema da avaliação da rigidez de estruturas que apresentam concreto na sua composição, associado ao MRPR, é eliminado com a construção da relação momento-curvatura. Outra contribuição do presente trabalho é uma nova metodologia para a inclusão do encruamento do aço para análises via MRPR.

Como etapas seguintes da pesquisa pretende-se incluir modelos para a descrição do comportamento não linear das ligações em estruturas mistas, além da possibilidade de deslizamento na interface dos materiais (aço e concreto). Estudos sob a forma como as tensões residuais são incluídas nas análises também serão realizados. Outro objetivo é entrar no âmbito da análise dinâmica de estruturas considerando diversas fontes de não linearidades.

AGRADECIMENTOS

Oa autores agradecem à CAPES, ao CNPq, à Fapemig e ao PROPEC/UFOP o apoio fornecido para o desenvolvimento desta pesquisa.

REFERÊNCIAS

- Barsan, G.M. & Chiorean, C.G., 1999. Influence of residual stress on the carrying-capacity of steel framed structures. Numerical investigation, In Dubina, D., & Ivany, M., eds, *Stability and Ductility of Steel Structures*, pp. 317-324. Elsevier.
- Bažant Z.P. & Oh B.H., 1983. Crack band theory for fracture of concrete. *Materials and Structures*, vol. 16, pp. 155-177.
- Branson, D.E. & Metz G.A., 1963. *Instantaneous and time-dependent deflections of simple and continuous reinforced concrete beams*. Auburn: Dept. of Civil Engineering and Auburn Research Foundation, Auburn University.
- Bratina, S., Saje, M. & Planinc, I., 2004. On materially and geometrically non-linear analysis of reinforced concrete planar frames. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 41, pp. 7181-7207.
- Caldas, R.B., 2004. *Análise Numérica de Pilares Mistos Aço-Concreto*. Dissertação de Mestrado. Programa de Pós Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Ouro Preto.
- Chan, S.L. & Chui, P., 2000. *Non-linear static an cyclic analysis of steel frames with semi-rigid connections*. Oxford, Elsevier.
- Chen, W.F. & Kim, S.E., 1997. *LFRD steel design using advanced analysis*. CRC Press.
- Chen, S., Teng, J.G. & Chan, S.L., 2001. Design of Biaxially Loaded Short Composite Columns of Arbitrary Section. *Journal of Structural Engineering*, vol. 127, n. 6, pp. 678-685.
- Chiorean, C.G., 2013. A Computer Method for Nonlinear Inelastic Analysis of 3D Composite Steel-Concrete Frame Structures. *Engineering Structures*, vol. 57, pp. 125-152.
- Espion, B., 1993. Benchmark Examples for Creep and Shrinkage Analysis Computer Programs, Creep and Shrinkage of Concrete. *TC 114 RILEM. E&FN Spon*.

- Ferguson, P.M. & Breen, J.E., 1966. Investigation of the long concrete column in a frame subjected to lateral loads. *Symposium on Reinforced Concrete Columns*. American Concrete Institute SP-13.
- Fong, M. & Chan, S. L., 2012. Advanced analysis of steel-concrete composite beam-columns by refined plastic-hinge method. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, v. 12, n. 6.
- Gonçalves, G.A., 2013. *Modelagem do Comportamento Inelástico de Estruturas de Aço: Membros sob Flexão em torno do Eixo de Menor Inércia*. Dissertação de Mestrado. Programa de Pós Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Ouro Preto.
- Gonçalves, R. & Carvalho, J., 2014. An Efficient Geometrically Exact Beam Element for Composite Columns and its Application to Concrete Encased Steel I-Sections. *Engineering Structures*, vol. 75, pp. 213-224.
- Gunnin, B.L., Rad, F.N. & Furlong, R.W., 1977. A general nonlinear analysis of concrete structures and comparison with frame tests. *Computers and Structures*, vol. 7, pp. 257-265.
- Lemes, I.J.M., 2015. *Análise Avançada via MRPR de Estruturas Mistas de Aço e Concreto*. Dissertação de Mestrado. Programa de Pós Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Ouro Preto.
- Liu, S.W., Liu, Y.P. & Chan, S.L., 2012. Advanced analysis of hybrid steel and concrete frames. Part 2: Refined plastic hinge and advanced analysis. *Journal of Constructional Steel Research*, vol. 70, pp. 337-349.
- Muniz, C.F.D.G., 2005. *Modelos Numéricos para Análise de Elementos Estruturais Mistos*. Dissertação de Mestrado. Programa de Pós Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Ouro Preto.
- NBR6118, 2014. Projeto de estruturas de concreto - procedimento. *Associação Brasileira de Normas Técnicas*.
- Ngo-Huu, C. & Kim, S.E., 2012. Practical nonlinear analysis of steelconcrete composite frames using fiberhinge method *Journal of Constructional Steel Research*, vol. 74, pp. 90-97.
- Rocha, P.A.S., 2006. *Análise Inelástica de Segunda Ordem de Estruturas Metálicas com Ligações semirrígidas*. Dissertação de Mestrado. Programa de Pós Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Ouro Preto.
- Sfakianakis, M.G., 2002. Biaxial Bending with Axial Force of Reinforced, Composite and Repaired Concrete Section of Arbitrary Shape by Fiber Model and Computer Graphics. *Advances in Engineering Software*, vol. 33, pp. 227-242.
- Silva, A.R.D, 2009. *Sistema Computacional para Análise Avançada Estática e Dinâmica de Estruturas Metálicas*. Tese de Doutorado. Programa de Pós Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Ouro Preto.
- Vogel, U., 1985. Calibrating Frames, *Stahlbau*, vol. 54, pp. 295-311.
- Yang, Y.B. & Kuo, S.B., 1994. *Theory & Analysis of Nonlinear Framed Structures*. Prentice Hall.
- Ziemian, R.D. & McGuire, W., 2002. Modified tangent modulus approach, a contribution to

plastic hinge analysis. *Journal of Structural Engineering*, vol. 128, n. 10, pp. 1301-1307.

Zubydan, A.H., 2013. Inelastic Large Deflection Analysis of Space Steel Frames Including H-shaped Cross Sectional Members. *Engineering Structures*, vol. 48, pp. 155-165.