



COMPARAÇÃO ENTRE A FORMULAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO COM SOLUÇÃO FUNDAMENTAL DEPENDENTE DA FREQUÊNCIA E A FORMULAÇÃO COM INTEGRAÇÃO DIRETA DE FUNÇÕES RADIAIS NA SOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE HELMHOLTZ

Carlos Friedrich Loeffler

Pedro Vinícius Moreira Pereira

Luciano de Oliveira Castro Lara

carlosloeffler@bol.com.br

pedrovinicius012@gmail.com

castrolara@hotmail.com

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, UFES

Av. Fernando Ferrari, 540 – Bairro Goiabeiras – 29075 – 910, Vitória, ES – Brasil

Webe João Mansur

webe@coc.ufrj.br

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, COPPE/UFRJ – Centro de Tecnologia,
Bloco B, Ilha do Fundão – 21941-972 – Rio de Janeiro, RJ – Brasil

Abstract. Seeking validate a solution technique for Helmholtz problems, the Boundary Element Method with Direct Integration, which applies radial basis functions to approach the inertia term, is used to solve numerically problems governed by Helmholtz Equation. To compare results, it is used the standard Boundary Element formulation which uses the fundamental solution correlated to Helmholtz Equation and has the frequency of excitation as argument. Examples concerning with direct solution of Helmholtz problems are solved with both Boundary Element formulations and then their results are compared with available analytical solutions.

Keywords: Boundary Elements Method, Helmholtz Equation, Frequency dependent fundamental solution Boundary Element Formulation, Radial Basis Functions with Boundary Elements.

1 INTRODUÇÃO

Diante do grande interesse econômico e industrial resultante da prospecção de jazidas de petróleo, feitas através de modernas tecnologias de análise sísmica, continua sendo intenso o desenvolvimento e o aprimoramento de métodos numéricos na área de dinâmica de estruturas e sistemas em geral. Muitas iniciativas nesse sentido podem ser observadas, sobretudo abordando o aperfeiçoamento de algoritmos de processamento numérico, acoplados a métodos discretos poderosos, como o Método dos Elementos Finitos e o Método das Diferenças Finitas. Tais iniciativas se justificam em razão da necessidade de minimização do enorme dispêndio computacional no tratamento de sistemas discretos com muitos milhões de graus de liberdade que, nos casos de resposta dinâmica, ainda precisam avançar adequadamente ao longo do tempo, através de esquemas de integração direta.

Nesse sentido, devido às características pouco atraentes de sua organização matricial, o Método dos Elementos de Contorno (MEC) tem estado na retaguarda dessas aplicações, o que não significa não haver um esforço significativo em seu contexto de pesquisa, objetivando a sua flexibilização matemática e melhoria de gasto em esforço computacional, sem perda da qualidade dos seus resultados.

Uma parte deste esforço tem sido feita através de formulações alternativas baseadas no emprego de procedimentos de interpolação, usando funções de base radial (Bulmann, 2003). Isto porque muitos problemas de interesse prático não se expressam em termos de equações cujos operadores são autoadjuntos ou, então, a forma integral inversa é demasiadamente complicada. O uso de tais funções também permite a adoção de uma série de procedimentos que podem, sob certas condições, simplificar bastante o processamento da resposta.

No que se refere à área de dinâmica, há conteúdos de indiscutível interesse ao MEC por não demandarem o esforço computacional da integração passo a passo, ao longo do tempo. Estes casos importantes consistem da análise do espectro modal da resposta, do cálculo das frequências e da análise no próprio domínio da frequência, problemas esses governados pela Equação de Helmholtz. O MEC já possui uma formulação integral inversa associada a este problema, que usa uma solução fundamental dependente da frequência de excitação. Não obstante sua elegância, precisão e conformidade com o formalismo matemático, essa formulação esbarra em dificuldades relacionadas ao custo computacional e relativa falta de flexibilidade no trato de problemas correlatos, que não impliquem diretamente na obtenção de resposta a uma excitação conhecida. A solução de um simples problema de valor característico é um desses casos restritos. A matriz relacionada à inércia do sistema é dependente da própria frequência, impedindo o emprego de algoritmos de extração imediata dos autovalores.

Nesse sentido, uma primeira grande contribuição veio com o desenvolvimento da formulação com Dupla Reciprocidade (MECDR) (Nardini e Brebbia, 1983) que permitiu a simulação acessível não apenas de problemas de valor característicos, mas casos dinâmicos, transientes e problemas onde há fontes ou ações de domínio, anteriormente resolvidos de modo particular e custoso. Embora seja flexível e apresente resultados razoavelmente satisfatórios, a MECDR esbarra em certas imprecisões numéricas, sobretudo devidas a problemas de condicionamento matricial, resultantes da necessidade de imposição de pontos de interpolação no interior do domínio, comumente chamados de pólos (Partridge et al., 1992).

Mais recentemente, foi proposta uma nova técnica baseada na utilização de funções radiais, denominada técnica de integração direta de integrais de domínio (MECID).

Diferentemente da MECDR, nesta formulação não se exige a construção de duas matrizes auxiliares multiplicando as matrizes H e G, pois há aproximação direta do núcleo completo da integral, à semelhança do que é feito num processo de interpolação, fazendo apenas o uso de uma função primitiva. Apenas a transformação da integral de domínio numa integral de contorno torna a MECID diferente de uma simples interpolação. Assim, uma ampla gama de diferentes funções radiais pode ser utilizada sem problemas de instabilidade que ocorrem comumente com a MECDR.

Neste trabalho busca exatamente comparar o desempenho da MECID em face da formulação tradicional do MEC que usa a solução fundamental dependendo da frequência (MECSF). Não há expectativa de que os resultados da MECID sejam superiores, pois a inércia do sistema é aproximada por funções radiais. Assim, à medida que frequências mais altas são consideradas, há necessidade de uma melhor caracterização da inércia do sistema e, nessas condições, a aproximação ditada pela MECID certamente vai fornecer resultados mais imprecisos. Todavia, é importante mensurar o distanciamento de precisão entre as duas formulações e este é o objetivo do presente trabalho.

2 A EQUAÇÃO DE HELMHOLTZ

A Equação de Helmholtz é uma das mais importantes equações da Física Matemática. Pode ser compreendida como um caso particular da equação de campo escalar generalizada, no qual um potencial $u(\mathbf{X})$, onde $\mathbf{X}=\mathbf{X}(x_1, x_2)$ é submetido a uma ação difusiva gerada pela aplicação do operador Laplaciano e reage de modo proporcional, da seguinte forma:

$$\nabla^2 u(\mathbf{X}) = -k^2 u(\mathbf{X}). \quad (1)$$

O significado da constante de proporcionalidade k depende do problema físico abordado.

Uma das razões da grande importância da Equação de Helmholtz é que tal equação pode ser interpretada como uma simplificação da Equação da Onda Acústica, expressa por:

$$\nabla^2 U(\mathbf{X}, t) = \frac{\rho}{E} \ddot{U}(\mathbf{X}, t) = \frac{1}{c^2} \ddot{U}(\mathbf{X}, t). \quad (2)$$

Na Eq. (2) c é a velocidade de propagação da onda acústica no meio, igual ao quociente entre a massa específica e o modo de elasticidade dilatacional (Juvinall, 1967) e $U(\mathbf{X})$ é a resposta espacial do sistema à excitações quaisquer, de conteúdo modal generalizado. No caso particular em que se busca determinar o movimento produzido no sistema por uma excitação variável cuja frequência é conhecida e dada por ω , o potencial $U(\mathbf{X}, t)$, que dependeria da posição no espaço $\mathbf{X}$ e do tempo t e, conforme mencionado apresentaria um movimento composto por um conteúdo vibracional vasto, passa a ser expresso de modo específico, na forma:

$$U(\mathbf{X}, t) = u(\mathbf{X})e^{-i\omega t}. \quad (3)$$

Na equação (3) i é a unidade imaginária e $U(\mathbf{X})$ é a parte espacial da resposta do sistema àquela excitação harmônica ω . Desse modo, a derivada segunda da Eq. (3) com relação ao tempo resulta em:

$$\ddot{U}(\mathbf{X}, t) = -\omega^2 u(\mathbf{X})e^{-i\omega t}. \quad (4)$$

A aplicação do operador Laplaciano na Eq. (3) e sua substituição na Eq. (2), juntamente com a Eq. (4), resulta na equação da Onda, onde k é igual a $(\omega/c)^2$. Agora fica claro que o significado do potencial $u(X)$ neste caso é de simples amplitude de resposta, estacionária, mas que varia ponto a ponto no domínio considerado.

Na realidade, os problemas governados pela equação de Helmholtz podem ser divididos em três grupos; problemas diretos, problemas de autovalor e problemas inversos.

Nos problemas diretos, objetiva-se determinar as configurações de equilíbrio do potencial $u(X)$ em função de um conjunto de condições de contorno conhecidas. É o caso abordado neste trabalho.

Nos problemas de autovalor, busca-se encontrar todos os valores das frequências, denominadas ω_n , capazes de gerar configurações autoequilibradas no sistema, na ausência de excitações de contorno. Tais frequências são denominadas frequências naturais do sistema ou autovalores.

Nos problemas inversos, determinam-se propriedades do meio perante o conhecimento das excitações de contorno e da resposta do sistema.

3 SOLUÇÃO FUNDAMENTAL DO PROBLEMA DE HELMHOLTZ

A solução fundamental consiste na idéia de uma função que faça a correlação entre um tipo especial de excitação e sua resposta entre dois pontos distintos num determinado campo físico, governado por uma equação diferencial conhecida. Muitas vezes ainda são chamadas como Funções de Green, embora modernamente tenham adquirido maior generalidade e sido englobadas no contexto da Teoria das Distribuições (Strauss, 1992; Weinberger, 1970).

Assim, dado um meio bidimensional governado pela Equação de Helmholtz com domínio aberto ou infinito, a solução fundamental $u^*(\mathbf{X})$ e sua derivada $q^*(\mathbf{X})$ numa direção η , gerados num ponto campo $\mathbf{X}$ por uma fonte pontual situada a uma distância euclidiana r deste, são dados por (Dominguez, 1993):

$$u^*(\xi; \mathbf{X}) = \frac{1}{2\pi} K_0\left(i \frac{\omega r}{c}\right) \quad (5)$$

$$q^*(\xi; \mathbf{X}) = -\frac{i\omega}{2\pi c} K_1\left(i \frac{\omega r}{c}\right) \frac{\partial r}{\partial n(\mathbf{X})} \quad (6)$$

Nas equações anteriores K_0 e K_1 são funções de Bessel de primeiro e segundo tipos e c é a já mencionada velocidade de propagação da onda no meio acústico, igual ao quociente entre o módulo de elasticidade dilatacional do meio (Juvinal, 1967) e sua massa específica. A obtenção destas expressões é facilitada pela solução fundamental admitir a independência angular da relação entre potenciais situados em dois pontos distintos no sistema.

4 FORMULAÇÃO DO MEC DEPENDENTE DA FREQUÊNCIA

Neste trabalho, a dedução da formulação integral do MEC dependente da frequência, doravante denominada MECSF, é feita com base nas operações matemáticas básicas de integração, partindo da forma integral forte associada à Eq. (1), usando como função

auxiliar a solução fundamental dependente da frequência, Eq. (5), e integrando por sobre o domínio físico $\Omega(X)$, conforme mostrado a seguir:

$$\int_{\Omega} \nabla^2 u(X) u^*(\xi; X) d\Omega = -k^2 \int_{\Omega} u(X) u^*(\xi; X) d\Omega. \quad (7)$$

Duas operações de integração por partes no lado esquerdo da Eq. (7), acompanhadas da aplicação do Teorema da Divergência, operações estas bem documentadas em farta literatura (Brebbia et al., 1984) geram a seguinte expressão integral, na qual foi empregada o fluxo fundamental, Eq.(6):

$$\int_{\Gamma} q(X) u^*(\xi; X) d\Gamma - \int_{\Gamma} u(X) q^*(\xi; X) d\Gamma = -k^2 \int_{\Omega} u(X) [u^*(\xi; X) + \nabla^2 u^*(\xi; X)] d\Omega. \quad (8)$$

Considerando que a solução fundamental resulta exatamente da estrutura matemática gerada no lado direito da Eq. (8) e escrita entre colchetes, tem-se, com a consideração de uma fonte concentrada unitária, o seguinte:

$$[u^*(\xi; X) + \nabla^2 u^*(\xi; X)] = -\Delta(\xi; X). \quad (9)$$

Na Eq. (9), Δ é a função Delta de Dirac. A substituição da Eq. (9) na Eq. (8) fornece a seguinte equação integral de contorno:

$$\int_{\Gamma} q(X) u^*(\xi; X) d\Gamma - \int_{\Gamma} u(X) q^*(\xi; X) d\Gamma + k^2 c(\xi) u(\xi) = 0. \quad (10)$$

O coeficiente $c(\xi)$ depende do posicionamento do ponto ξ com relação ao domínio físico $\Omega(X)$ e, no caso de ser localizado no contorno $\Gamma(X)$, também da suavidade deste (Brebbia et al., 1984).

Em razão da solução fundamental e sua derivada serem expressas por funções complexas, os procedimentos tradicionais de discretização com o MEC nesta formulação geram matrizes reais e complexas, que devem ser operacionalizadas de acordo com uma álgebra adequada. Pela estrutura matemática gerada na Eq. (10) não há formação de uma matriz de inércia explícita, de forma que a frequência de excitação está inserida nos coeficientes das matrizes características **H** e **G** do MEC (Brebbia et Walker, 1980). As integrações singulares também são bem mais complicadas do que as requeridas nos problemas com soluções fundamentais reais. Devido à extensão dos algebrismos, elas não são apresentadas aqui. Detalhes podem ser colhidos nas seguintes referências (Dominguez, 1993; Kythe, 1995).

5 FORMULAÇÃO DO MEC COM INTEGRAÇÃO DIRETA

Nesta formulação, a solução fundamental e sua derivada normal são referentes ao problema de Laplace e não ao problema de Helmholtz. Esta simplificação na solução fundamental permite à formulação MECID gerar explicitamente uma matriz de inércia, nos moldes da formulação com Dupla Reciprocidade (Loeffler e Mansur, 1986) e também do Método dos Elementos Finitos (Bathe, 1982). Por outro lado, tomando-se uma solução fundamental associada a um problema escalar mais simples, há evidente perda da capacidade de representação do espaço funcional gerado na formulação integral do MEC, que à luz do Método dos Resíduos Ponderados (Brebbia e Walker, 1980), por exemplo, significaria uma limitação no expurgo dos resíduos cometidos na aproximação do potencial $u(\mathbf{X})$ e sua derivada normal $q(\mathbf{X})$.

No caso da MECID, a abordagem habitual do MEC para o operador Laplaciano é mantida. Assim, considera-se a forma integral inversa da Equação de Helmholtz sendo dada por:

$$c(\xi)u(\xi) + \int_{\Gamma} u(X)q^*(\xi; X)d\Gamma - \int_{\Gamma} q(X)u^*(\xi; X)d\Gamma = \frac{\omega^2}{c^2} \int_{\Omega} u(X)u^*(\xi; X)d\Omega \quad (11)$$

No caso da MECID, o núcleo completo da integral de domínio é interpolado por funções de base radial diretamente, de acordo com a Eq. (12):

$$u(X)u^*(\xi; X) = \xi \alpha^i F^i(X^i; X) \quad (12)$$

Uma vez que as funções de interpolação $F^i(X^i; X)$ utilizadas pertencem a classe das funções radiais, seu argumento é composto pela distância Euclidiana $r(X^i, X)$, que caracteriza o posicionamento relativo entre os pontos base X^i e os pontos genéricos do domínio X .

Cabe ressaltar que não há qualquer restrição na formulação matemática da MECID quanto à tipologia das funções radiais a serem empregadas, de modo que mesmo as funções radiais de suporte compacto (Wendland, 1995) podem ser usadas indistintamente. Resta, naturalmente, o trabalho de implementação numérica, que se torna bem mais complicado com tais funções. Esta robustez é devida à estrutura matemática de sua formulação ser bastante semelhante a uma simples interpolação. De qualquer forma, apenas a função de base radial de placa fina é aqui utilizada em todas as simulações implementadas, uma vez que produz bons resultados.

Após o processo de discretização, estes pontos X gerarão os pontos nodais em que o potencial $u(X)$ é calculado. Para cada ponto fonte ξ , a interpolação dada pela Eq. (12) corresponde a uma varredura de todos os pontos base X^i em relação aos pontos X do domínio, ponderada pelos coeficientes $\xi \alpha^i$. Estes coeficientes podem ser obtidos após a discretização, através da resolução de um sistema simples de equações algébricas, conforme mostra Loeffler et al., (2014) e Loeffler et al., (2015).

Da mesma forma que para a formulação com Dupla Reciprocidade, a MECID também usa uma função de interpolação primitiva Ψ^i . Assim, a integral do termo fonte expressa pela Eq. (12) torna-se a seguinte:

$$\int_{\Omega} \xi \alpha^i F^i(X^i; X)d\Omega = \int_{\Omega} (\xi \alpha^i \Psi_{,jj}^i(X^i; X))d\Omega = \int_{\Gamma} (\xi \alpha^i \Psi_{,j}^i(X^i; X)n_j(X))d\Gamma = \xi \alpha^i \int_{\Gamma} \eta^i(X^i; X)d\Gamma \quad (13)$$

A expressão anterior foi testada com resultados bastante satisfatórios em aplicações preliminares consistindo no cálculo de volumes e valor de imagem de funções, além de simulações com o MEC resolvendo problemas de Poisson.

Então, considerando a Eq. (11), a equação integral de governo passa a ser expressa por:

$$c(\xi)u(\xi) + \int_{\Gamma} u(X)q^*(\xi; X)d\Gamma - \int_{\Gamma} q(X)u^*(\xi; X)d\Gamma = \frac{\omega^2}{k^2} [\xi \alpha^i \int_{\Gamma} \eta^i(X^i; X)d\Gamma] \quad (14)$$

6 TESTES NUMÉRICOS

6.1 Primeiro exemplo

Para melhor avaliar as particularidades da MECID junto à Equação de Helmholtz, este primeiro exemplo consiste da solução de um problema unidimensional simples, cuja equação de governo é dada pela seguinte equação:

$$k^2 \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x^2} = -\omega^2 u \quad (15)$$

O domínio consiste de um quadrado de lados unitários e o valor de k também foi tomado igual a unidade. A intenção é ampliar gradativamente os valores de ω de modo a avaliar a precisão da MECID quando a matriz de massa, que é efetivamente aproximada pelas funções de base radial, ganha proporções significativas face às matrizes $\mathbf{H}$ e $\mathbf{G}$. As características físicas e geométricas do problema são mostradas na Fig. 1.

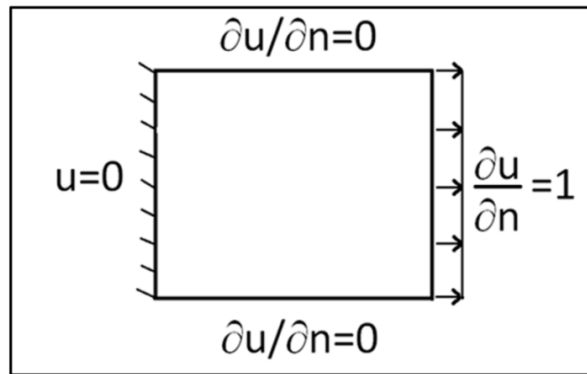


Figura 1 – Características geométricas e condições de contorno para o primeiro exemplo

Neste caso, a solução analítica é dada por:

$$u(x) = \frac{\sin \omega x}{\omega \cos(\omega)} \quad (16)$$

Como medida do erro, usa-se aqui a diferença entre os valores analíticos e numéricos sendo dividida pelo maior valor analítico para cada valor da frequência de excitação. Os gráficos são construídos em termos do erro médio percentual para cada frequência.

São então mostrados primeiramente os resultados para a MECID. Para estas simulações foi tomada internamente uma quantidade um pouco maior de pólos, que melhoram a interpolação – mais crítica nesta formulação – do que de pontos fonte. Ressalta-se que estes últimos atuam em conjunto com os nós livres do contorno gerando graus de liberdade ao sistema e também são importantes em qualquer análise dinâmica.

Neste caso, duas malhas foram usadas: a mais simples com 84 nós de contorno, 80 pontos fonte internos e 144 pólos; a mais refinada com 164 nós de contorno, 144 pontos fonte e 259 pólos.

Os valores de ω são incrementados considerando um intervalo 0.5 hertz, procurando evitar a ressonância, que longitudinalmente apresenta valor igual a $n\pi/2$, sendo n um número

inteiro ímpar. A proximidade do valor da frequência de excitação do valor da frequência natural do sistema é claramente detectada na curva de erro pela formação de picos, conforme mostrado na Fig. 2. Percebe-se, entretanto, a ação de dois fatores no espectro de erros da MECID: primeiramente, o sistema discreto apresenta-se mais rígido do que deveria, sobretudo na malha menos refinada, reduzindo os valores reais das frequências naturais, precipitando assim o aparecimento dos picos na curva de erros; em segundo lugar, devido à aproximação da inércia por funções radiais, excitam-se também certos modos vibracionais transversais, que são captados no espectro. Verifica-se ainda que, para a malha mais pobre, valores acima de $\omega=9$ Hz não mais apresentam bons resultados, pois a matriz de massa – aproximada pelas funções radiais – nestas condições está 81 vezes amplificada com relação às matrizes H e G.

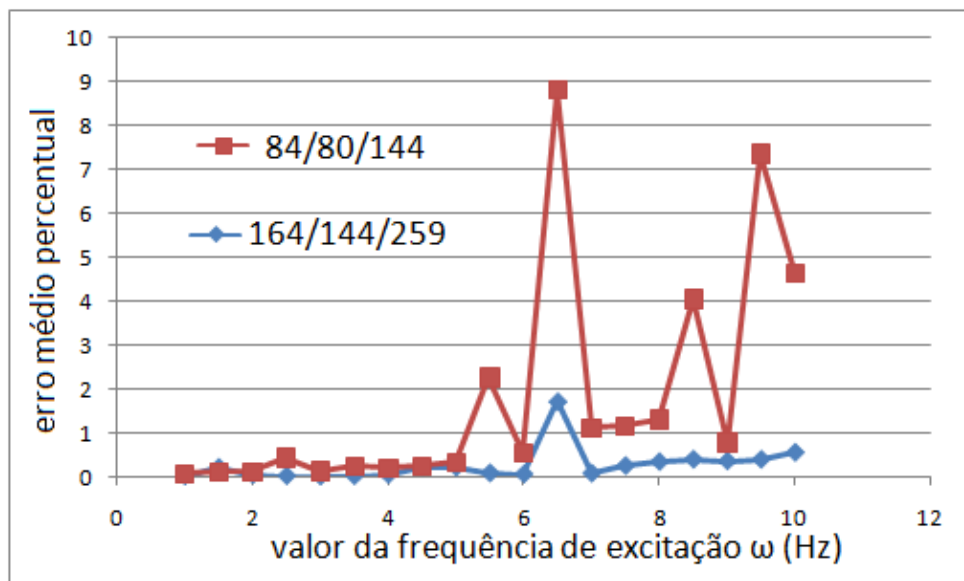


Figura 2 – Valores do erro médio percentual para o MECID em função da frequência de excitação ω

Os valores de erro na formulação com solução fundamental dependente da frequência são mostrados na Fig. 3 para duas malhas 80 e 160 elementos lineares, com nós duplos nos cantos. Para essa formulação, pode-se perceber a menor diferença de precisão nos resultados entre as duas malhas usadas para o mesmo espectro de frequência usado nas simulações com a MECID. No entanto, a partir de 12 Hz também passa a vigorar uma significativa diferença entre os resultados entre as malhas de 84 e 164 nós.

Para melhor avaliação de resultados, na Fig. 4 são comparados os resultados da MECID com a formulação do MEC dependente da frequência, para a malha mais refinada, ou seja, com 160 elementos de contorno lineares.

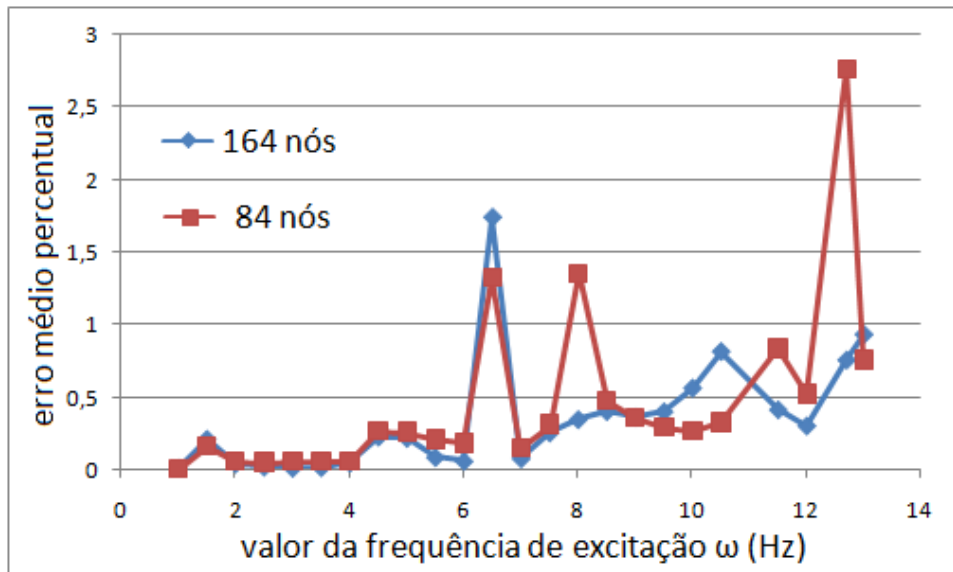


Figura 3 – Valores do erro médio percentual para o MEC dependente da frequência de excitação

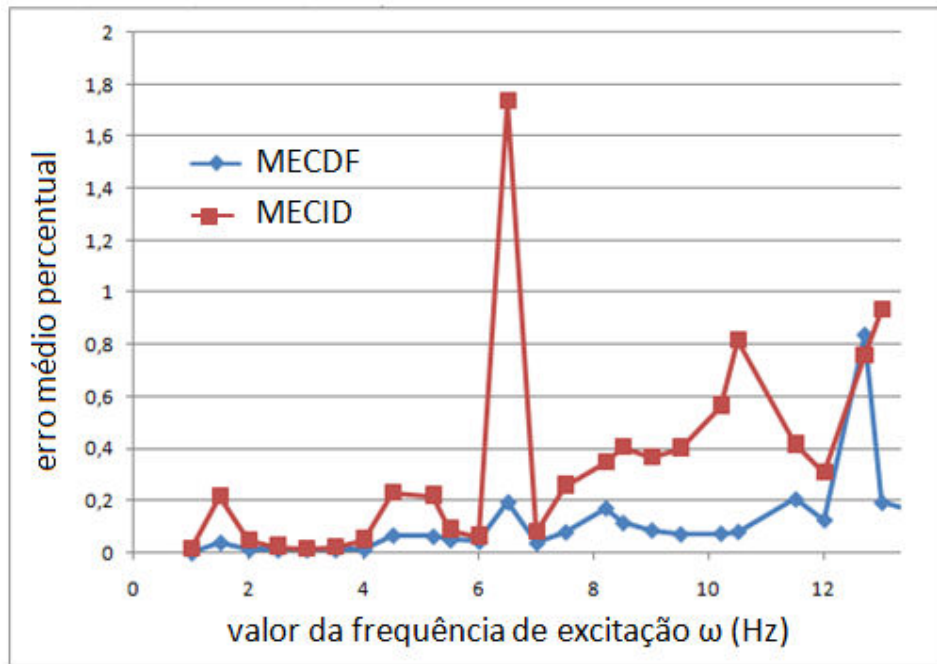


Figura 4 – Comparativo dos valores do erro médio percentual para o MECID e MECDF com a malha com 164 pontos nodais no contorno

6.2 Segundo exemplo

Neste exemplo aborda-se um problema bidimensional, sabidamente mais complexo do que o anterior e no qual apenas condições do tipo essencial são impostas no contorno, conforme indicado na Fig. 5:

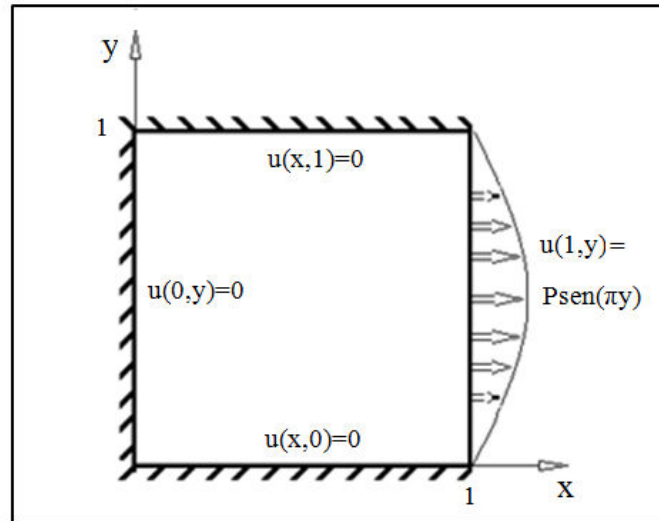


Figura 5 – Condições de contorno e conformação geométrica do segundo exemplo

A Equação de governo agora é dada por:

$$k^2 \left[\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} \right] = -\omega^2 u(x, y) \quad (17)$$

Mais uma vez o valor de k é tomado unitário. A solução analítica para este caso, obtida pelo método de separação de variáveis, é dada por:

$$u(x, y) = \frac{\sin(x\sqrt{\omega^2 - \pi^2}) \sin(\pi y)}{\sin(\sqrt{\omega^2 - \pi^2})} \quad (18)$$

Devido à indeterminação gerada quando $\omega = \pi$ e as respostas complexas para valores menores, os crescentes valores da frequência de excitação imposta são escolhidos acima do valor π .

Para ambas as formulações, a malha de contorno usada tem 320 elementos lineares com 324 pontos nodais, devido a presença de nós duplos nos cantos. No caso da MECID, também foram usados 324 pontos fonte internos e 576 pólos interpolantes.

Neste exemplo, pelo fato de serem calculadas as derivadas do potencial ou forças de superfície, um cuidado especial deve ser tomado com relação à medida de erro. Essas derivadas comportam-se como tensões numa estrutura e dessa forma são fortemente influenciadas pelo valor das frequências de vibração, mais precisamente por estarem associadas ao quadrado destas, conforme expressam Clough & Penzien (1972). Assim, os valores analíticos das tensões para frequências de excitação mais altas crescem quadraticamente com relação ao mesmo cálculo, se feito com relação ao potencial ou flecha na membrana. Logo, para evitar o traçado de uma curva de erro na qual a diferença entre os valores numéricos e analíticos crescem menos do que os valores máximos analíticos que figuram no denominador da expressão de erro, também foi usado aqui o conceito de erro absoluto, composto apenas da diferença entre os valores analítico e numérico, dividida pela quantidade de nós tomados para a medida.

Nas figuras que se seguem, são plotados o erro médio percentual absoluto e relativo e o valor analítico máximo das forças de superfície no contorno, para melhor avaliação do

comportamento numérico da simulação. Na Fig.6 mostram-se os resultados da MECID e na Fig. 7 os resultados da MECSF.

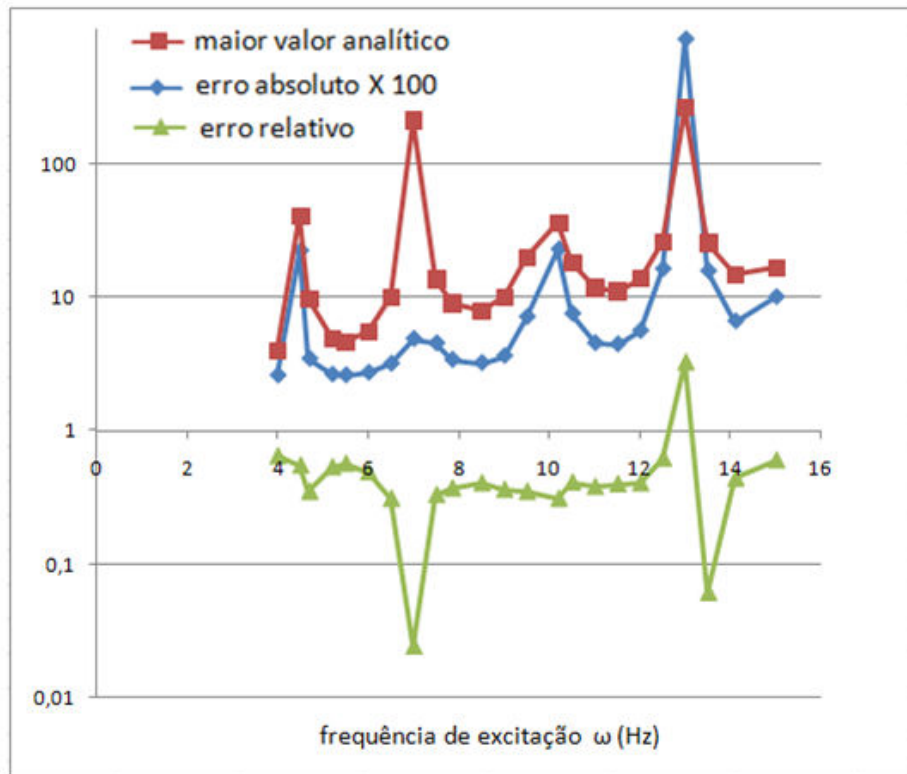


Figura 6 – Valores numéricos referentes às forças de superfície dados pelo MECID

Da comparação das Fig. 6 e 7 pode-se perceber que o erro médio percentual relativo parece se estabilizar na MECID e mesmo se reduzir na MECSF, o que resulta do efeito mencionado: os valores no denominador da medida de erro relativo crescem com o aumento da frequência, numa taxa maior do que o numerador, composto do erro absoluto. Como era de se esperar, o desempenho numérico da MECSF é melhor, pois a curva de erro absoluto é bem mais estável no espectro de frequências de excitação escolhido, enquanto que na MECID há evidente amplificação desta. Enquanto a MECID constrói a matriz de inércia a partir de aproximações com funções base radial e usa uma solução fundamental apenas difusiva, a MECSF possui a frequência de excitação na própria solução fundamental, construindo um espaço funcional bem mais rico.

Contudo, os resultados da MECID são razoáveis, particularmente tendo em vista a relativa complexidade do problema, envolvendo dinâmica e determinação da resposta em termos de forças de superfície.

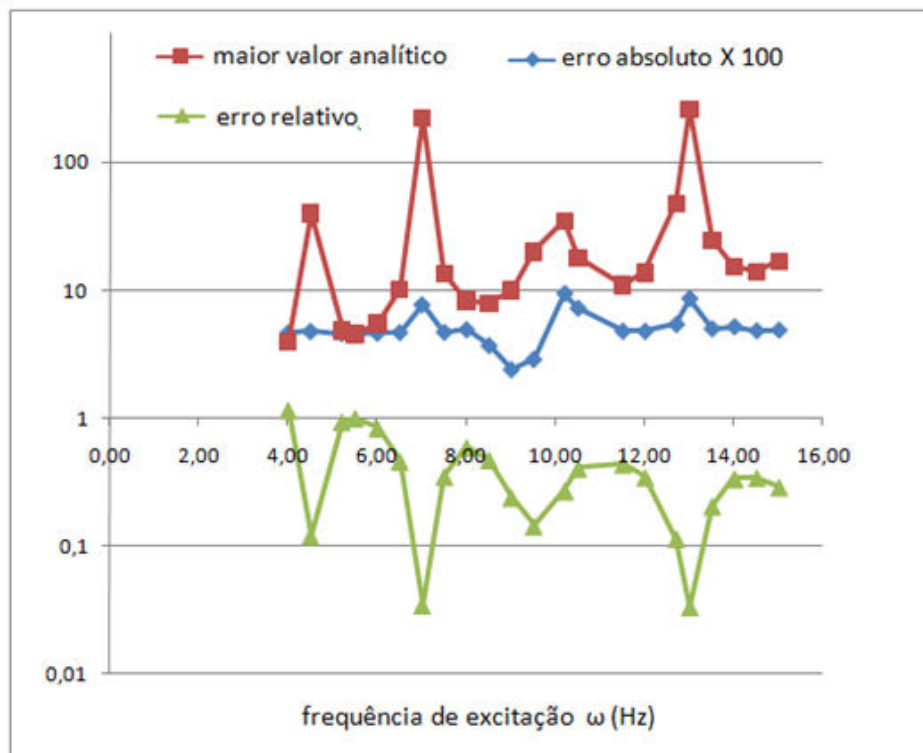


Figura 7 – Valores numéricos referentes às forças de superfície dados pelo MECSF

7 CONCLUSÕES

As formulações do MEC que empregam soluções fundamentais associadas ao problema que se deseja resolver são sabidamente muito precisas e elegantes. Além dos problemas de Helmholtz aqui abordados, problemas difusivo-advectivos, problemas de propagação de ondas e outros, quando resolvidos usando a respectiva solução fundamental como função auxiliar na formulação integral apresenta comumente resultados com exatidão superior a de outras formulações e métodos numéricos; entretanto, apresenta limitações sérias, que ultrapassam os limites da dificuldade matemática ou dos embaraços na programação computacional: tais formulações tendem a ser custosas e pouco flexíveis. No caso dos Problemas de Helmholtz, o desenvolvimento de formulações alternativas como a Dupla Reciprocidade se deveu exatamente ao fato de que apenas os problemas diretos apresentam uma solução acessível pela MECSF; os demais problemas, de autovalor e análise inversa, tornam-se bem mais complicados de se abordar. O fato de não ser gerada uma matriz de massa restringe bastante as possibilidades de generalização dessa formulação. Por essa razão, buscando superar os padrões de precisão numérica mostrados pela MECDR ao longo de muitos anos de testes, buscou-se desenvolver uma alternativa, denominada MECID, aqui apresentada.

Também usando funções radiais como a MECDR, a estrutura matemática da MECID é muito semelhante a um processo de interpolação simples, para o qual se verifica que a utilização de funções radiais é bastante bem sucedida. Ao realizar uma transformação para eliminar a integral domínio, há uma indiscutível perda de precisão, mas bastante aceitável para aplicações em engenharia. É uma formulação bastante flexível, podendo ser utilizada juntamente com algumas outras técnicas numéricas, tais como o ajuste interno de graus de função radiais para interpolação, através dos quais muitos pólos podem ser removidos, e se

chegar a um sistema final de equações mais reduzido sem perda apreciável de precisão, de acordo com os resultados obtidos de um estudo anterior (Loeffler et al., 2015). Não é difícil demonstrar que a extensão do procedimento MECID para a obtenção de resposta dinâmica em meios homogêneos, e mesmo heterogêneos, é imediata.

Nas simulações apresentadas ratificou-se que a precisão da MECSF é superior, mas para espectros de frequências não muito altos, o desempenho da MECID é bastante satisfatório. Diante das limitações da primeira, ditadas pela sua menor flexibilidade, percebe-se que é possível investir em aprimoramentos e novas modelagens com a MECID e se chegar a uma fase de consolidação de mais uma ferramenta de solução com o MEC ao alcance dos profissionais de engenharia.

REFERÊNCIAS

- Brebbia, C. A., Telles, J. C. F., & Wrobel, L. C., 1984. *Boundary Element Techniques*. Springer-Verlag, Berlin.
- Brebbia, C. A., Walker, S., 1980. *Boundary Element Techniques in Engineering*. Newnes-Butterworths, London.
- Buhmann, M. D., 2003. *Radial Basis Function: Theory and Implementations*. Cambridge Press.
- Loeffler, C. F., Cruz, A. L., & Bulcão, A., 2015. Direct Use of Radial Basis Interpolation Functions for Modelling Source Terms with the Boundary Element Method. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, vol. 50, pp. 97-108.
- Nardini, D., Brebbia, C. A., 1983. Transient Dynamic Analysis by the Boundary Element Method, , In C.A. Brebbia ed, *Proceedings of BEM V*, pp 719-730.
- Loeffler, C. F., Mansur W. J., 1986. Vibrações Livres de Barras e Membranas Através do Método dos Elementos de Contorno. *Revista Brasileira de Engenharia*, caderno de Engenharia Civil, vol. 4, n. 2, pp. 5-23.
- Loeffler, C. F., Pereira, P. V. M., & Barcelos, H. M., 2014. Direct Interpolation Technique using Radial Basis Functions Applied to the Helmholtz Problem. In Mallardo, V., & Aliabadi, F. M. H., eds, *15 International Conference on Boundary Element and Meshless Techniques*, pp. 223-228.
- Partridge, P. W., Brebbia, C. A., & Wrobel, L. C., 1992. *The Dual Reciprocity, Boundary Element Method*, Computational Mechanics Publications and Elsevier, London.
- Wendland, H., 1995. Piecewise polynomial, positive definite and compactly supported radial functions of minimal degree. *Advances in Computational Mathematics*, vol. 4, pp. 389-396.
- Weinberger, H. F., 1970. *Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales*, Editorial Reverte, Barcelona.
- Strauss, W. A., 1992. *Partial Differential Equations, An Introduction*, John Wiley & Sons, New York.
- Clough, R. W., & Penzien, J., 1972. *Dynamics of Structures*, McGraw-Hill Kogakusha.
- Juvinall, R. C., 1967. *Engineering Considerations of Stress, strain and strength*, McGraw-Hill.

Kythe, O. J., 1995. *An Introduction to Boundary element Methods*, CRC Press, Boca Raton.

Dominguez, J., 1993. *Boundary Elements in Dynamics*, Computational Mechanics Publications, Elsevier Applied Science, London.

Bathe, K. J., 1982. *Finite Element Procedures in Engineering analysis*, Prentice-Hall.