



APLICAÇÃO DA ANÁLISE DE COMPONENTES PRINCIPAIS A PROBLEMAS DE ENGENHARIA

Ronaro Liziero Picoli

Patricia Habib Hallak

ronarolpicoli@gmail.com

patricia.hallak@ufjf.edu.br

Programa de Pós Graduação em Engenharia Civil da COPPE/UFRJ

Programa de Pós Graduação em Modelagem Computacional da UFJF; Departamento de Mecânica Aplicada e Computacional da UFJF.

COPPE/UFRJ, Caixa Postal 68501, CEP 21941-914, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

Rua José Lourenço Kelmer, s/n - Campus Universitário Bairro São Pedro, CEP: 36036-900, Juiz de Fora, MG, Brasil.

Paulo Augusto Berquó de Sampaio

sampaio@ien.gov.br

Instituto de Engenharia Nuclear.

Rua Hélio de Almeida, 75, Cidade Universitária, Ilha do Fundão, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

Abstract. Neste trabalho aplica-se a análise de componentes principais (ACP) em dois problemas de engenharia. O primeiro deles refere-se à aplicação da ACP para a obtenção dos modos e frequências naturais de uma viga utilizando suas respostas em deslocamento. Essas respostas são comparadas às obtidas do modelo contínuo e às obtidas por um modelo discreto da estrutura. É realizada também uma associação entre a variação dos erros obtidos e a variação das taxas de amortecimento. No segundo exemplo, o método é aplicado ao campo de pressões gerado pelo vento ao redor de um perfil retangular, imerso em meio fluido, com o objetivo de se obter os coeficientes aerodinâmicos e também as frequências de descolamento e recolamento de vórtices ao longo da superfície do corpo. O campo de pressões no contorno do corpo é obtido por meio da fluidodinâmica computacional. Conclui-se que a ACP é um método aplicável aos problemas citados e permite um entendimento maior dos fenômenos e casos analisados.

Keywords: ACP, dinâmica, CFD.

1 INTRODUÇÃO

1.1 Contextualização

Desde o colapso da ponte de Tacoma, nos Estados Unidos em 1940, houve um crescimento no interesse por pesquisas sobre o efeito do vento em estruturas como pontes e construções esbeltas. Desde então, com o avanço da tecnologia, novos processos e equipamentos foram desenvolvidos para a análise das vibrações em estruturas e das interações da mesma com o fluido ao seu redor.

Dentre esses avanços, destaca-se o da computação, o que permite a solubilidade de problemas cada vez mais complexos, como problemas de fluidodinâmica, que eram analisados somente por meios experimentais e que agora podem ser analisados por meio da modelagem computacional, na área conhecida como fluidodinâmica computacional (*Computational Fluid Dynamics, CFD*).

O avanço da computação permitiu também a utilização de métodos que antes exigiam esforço e tempo. Dentre esses métodos, cita-se o da análise das componentes principais - ACP, que é de interesse no presente trabalho. Esta é uma técnica para a análise de dados multivariados e vem sendo usado na engenharia, por exemplo, para a solução de problemas de escoamento em torno de estruturas e para a análise de dados na etapa de pós-processamento (Hemón & Santi, 2002).

Feeny & Kappagantu (1998) utilizam a análise de componentes principais para a obtenção das formas de vibração de um sistema dinâmico. Já Hemon & Santi (2002) e Amandolèse & Crémona (2005) aplicam o método para o estudo sobre característica aerodinâmicas de um corpo sob escoamento de um fluido com o objetivo de avaliar a forma de desprendimento e recolamento de vórtices que ocorrem ao longo desse corpo.

Baseado em Feeny & Kappagantu (1998) e Hemón & Santi (2002), este trabalho utiliza a análise de componentes principais para a obtenção dos modos e frequências naturais de uma viga, para a obtenção de características aerodinâmicas de um perfil retangular e para avaliar como ocorre o desprendimento e recolamento de vórtices ao longo do perfil.

1.2 Justificativa e Objetivos

Estruturas sob efeitos de cargas dinâmicas podem sofrer vibrações, capazes de gerar danos e desconforto aos seus usuários. A análise das formas de uma estrutura vibrar permite ao projetista erradicar ou minimizar esses problemas. Além disso, a determinação das frequências em que essas vibrações ocorrem devem ser conhecidas para se evitar ou reduzir a possibilidade de que ocorra a ressonância entre essas frequências e as frequências do carregamento, o que pode levar à ruína da estrutura. Neste contexto, a análise das componentes principais surge como alternativa aos métodos clássicos como a análise modal, para a obtenção das frequências e formas de vibração.

Entre as cargas dinâmicas que podem atuar sobre uma estrutura, estão as cargas provocadas pelo vento, que, além de potencial carregamento estático, podem gerar vórtices perto da estrutura, fenômeno este associado às característica do escoamento e ao formato da estrutura. Dependendo da frequência do desprendimento e recolamento dos vórtices, a estrutura pode ter as suas vibrações amplificadas.

Os efeitos das vibrações induzidas pelo desprendimento cadenciado de vórtices foram sentidos, por exemplo, sobre a Ponte Rio Niterói no Estado do Rio de Janeiro. Esta ponte vibrava no primeiro modo de vibração vertical para velocidade do vento da ordem de 60 km/h, o que causava extremo desconforto aos usuários. Para atenuar essas oscilações foram instalados no seu interior um sistema de múltiplos atenuadores sincronizados (Battista & Pfeil, 2010).

Pesquisadores na área (Shimada & Ishihara, 2002) perceberam que, dependendo a relação entre a largura e a altura da estrutura, os vórtices descolados tendem a recolar sobre a superfície do corpo. Esse comportamento influencia na análise espectral do campo de pressão sobre a estrutura, onde frequências associadas a esses padrões de escoamento são obtidas.

Hemón & Santi (2002) e Amandolèse & Crémona (2005) utilizam a análise de componentes para obter coeficientes aerodinâmicos da estrutura e prover uma forma de analisar o desprendimento e recolamento dos vórtices. Em comparação com a visualização de vórtices, a análise das componentes principais tem a vantagem de analisar as propriedades físicas em relação ao tempo e espaço simultaneamente (Hemón & Santi, 2002).

Assim, a aplicação do método da análise de componentes principais em problemas de engenharia viabiliza uma compreensão melhor de um fenômeno, a fim de evitar problemas relacionados a este. Desta forma, o objetivo principal deste artigo é o de avaliar a eficiência da análise das componentes principais. Para tal, são apresentados os resultados da aplicação desta ferramenta a dois problemas de engenharia. O primeiro problema está relacionado à obtenção das formas e frequências de vibração de um viga a partir da sua resposta em deslocamento. O segundo problema trata da obtenção das propriedades aerodinâmicas de um objeto sob o escoamento de um fluido e a determinação das frequências em que ocorrem os descolamentos e recolamentos dos vórtices ao longo da estrutura, associando-as a forma com que o fluido interage com a superfície do corpo. Para tal, são obtidos os históricos das pressões no contorno do corpo por meio da aplicação de técnicas em CFD.

Na sequência deste texto é apresentada a fundamentação teórica e algébrica da ACP. Logo após, é mostrada a sua aplicação aos dois problemas propostos, bem como uma discussão dos resultados obtidos. Por fim, tem-se as considerações finais do trabalho.

2 ANÁLISE DE COMPONENTES PRINCIPAIS

Em pesquisas pode-se obter grande quantidade de dados o que torna difícil a análise e compreensão destes. O método da Análise de Componentes Principais - ACP (*Principal Component Analysis*) objetiva encontrar, a partir do conjunto de dados original, um novo conjunto de dados que facilite a interpretação e utilização das informações contidas nos dados originais.

“Na análise de componentes principais procura-se maximizar a variância de uma combinação linear das variáveis.” (Rencher, 2002), isto é, encontrar a associação que melhor representa as similaridades e diferenças dos dados.

De acordo com Jackson (1991), a idéia da ACP foi desenvolvida por Karl Pearson em 1901, porém somente em 1933 Harold Hotelling desenvolveu o procedimento conhecido atualmente. Por esse motivo, a ACP também é conhecida como transformação de Hotelling. Na área de processamento de sinais é conhecida como transformação de Karhunen-Loève e, nas engenharias civil e mecânica, como decomposição em funções próprias ortogonais (*Proper Orthogonal Decomposition*, POD) (Feeny & Kappagantu, 1998 e Hemón & Santi, 2002).

Diversas aplicações utilizam a ACP, como exemplificado em Jobson (1992, Rencher (2002) e Jackson (1991). Para classificar espécies de animais, compactar imagens e áudios, avaliar a poluição em cidades e, na engenharia, para obter informações associadas a um fenômeno. Utiliza-se também para facilitar a visualização de dados e suas associações com mais de 3 dimensões.

2.1 Formulação Algébrica da ACP

Nesta seção é demonstrado a ACP a partir da matriz da soma dos quadrados e produto cruzado - sqcp (*Sum of Squares and Cross Product Matrix*), baseado em Jobson (1992). Outros autores como Johnson & Wichern (2007) e Rencher (2002) realizam a demonstração através da matriz de covariância. A opção pela matriz sqpc deve-se ao fato dela ser mais geral que a matriz de covariância. Além disso, a matriz de correlação que é utilizada nos experimentos é proporcional a matriz sqpc (Hemón & Santi, 2002, Amandolèse & Crèmona, 2005 e Feeny & Kappagantu, 1998).

Seja $\mathbf{X}$ uma matriz de dados composta por n amostras, cada uma com p variáveis e todas reais. A ACP objetiva encontrar novas variáveis tais que estas contenham a maior variância possível das p variáveis originais e o número das novas deve ser menor ou igual a p . É necessário ainda que estas sejam ortogonais entre si.

A primeira componente principal $\mathbf{Z}_1$ é uma combinação linear das colunas de $\mathbf{X}$:

$$\mathbf{Z}_1 = \mathbf{X} \cdot \mathbf{v}_1 \quad (1)$$

onde $\mathbf{v}_1$ é formado por p coeficientes indeterminados.

Assumindo que $\mathbf{v}_1$ é unitário, isto é:

$$\mathbf{v}_1^T \cdot \mathbf{v}_1 = 1 \quad (2)$$

quer-se que $\mathbf{Z}_1$ tenha a maior variância associada. Logo, deve-se encontrar $\mathbf{v}_1$ tal que a norma de $\mathbf{Z}_1$ seja a maior possível (Buljak, 2012). Esse problema pode ser expresso como:

$$\max(\mathbf{Z}_1^T \cdot \mathbf{Z}_1) \quad (3)$$

Substituindo-se a Eq. 1 na Eq. 3, tem-se então:

$$\max(\mathbf{v}_1^T \cdot \mathbf{X}^T \cdot \mathbf{X} \cdot \mathbf{v}_1) \quad (4)$$

Utilizando-se o método de multiplicadores de Lagrange, obtém-se o seguinte operador em função de $\mathbf{v}_1$:

$$\mathcal{L}(\mathbf{v}_1) = \mathbf{v}_1^T \cdot \mathbf{X}^T \cdot \mathbf{X} \cdot \mathbf{v}_1 - \lambda_1(\mathbf{v}_1^T \cdot \mathbf{v}_1 - 1) \quad (5)$$

Diferenciando a Eq. 5 em relação a $\mathbf{v}_1$, tem-se:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{v}_1} = 2 \cdot \mathbf{X}^T \cdot \mathbf{X} \cdot \mathbf{v}_1 - 2\lambda_1 \mathbf{v}_1 \quad (6)$$

Igualando a Eq. 6 à zero:

$$\mathbf{X}^T \cdot \mathbf{X} \cdot \mathbf{v}_1 - \lambda_1 \mathbf{v}_1 = 0 \quad (7)$$

A Eq. 7 indica que $\mathbf{v}_1$ é um autovetor de $\mathbf{X}^T \cdot \mathbf{X}$ e λ_1 é o autovalor associado a $\mathbf{v}_1$. Como $\mathbf{X}^T \cdot \mathbf{X}$ é simétrica e real, ela possui autovetores ortogonais, ou seja:

$$\mathbf{v}_i^T \cdot \mathbf{v}_j = \delta_{ij} \quad (8)$$

onde $\mathbf{v}_i$ e $\mathbf{v}_j$ são autovetores de $\mathbf{X}^T \cdot \mathbf{X}$ e δ_{ij} é o delta de Kronecker¹.

Logo, multiplicando-se a Eq. 7 por $\mathbf{v}_1^T$ obtém-se:

$$\mathbf{v}_1^T \cdot \mathbf{X}^T \cdot \mathbf{X} \cdot \mathbf{v}_1 = \lambda_1 \quad (9)$$

Comparando-se a Eq. 9 com a Eq. 4, tem-se que a solução da Eq. 4 será o maior autovalor de $\mathbf{X}^T \cdot \mathbf{X}$ e $\mathbf{v}_1$ será o seu autovetor associado.

Analogamente, encontra-se a i -ésima componente principal através de:

$$\mathbf{Z}_i = \mathbf{X} \cdot \mathbf{v}_i \quad (10)$$

onde $\mathbf{v}_i$ é dado por:

$$\mathbf{X}^T \cdot \mathbf{X} \cdot \mathbf{v}_i - \lambda_i \mathbf{v}_i = 0 \quad (11)$$

Assim, para obter-se as componentes principais deve-se encontrar os autovetores $\mathbf{v}_i$, $i = 1, 2, \dots, s$; onde s é o posto de $\mathbf{X}^T \cdot \mathbf{X}$.

Desse modo, a ACP é realizada de acordo com o algoritmo 1.

Algorithm 1 Análise de Componentes Principais

Entrada: Matriz de dados ($\mathbf{X}$)

Saida: Matriz das componentes principais (ζ), matriz dos autovetores associado as componentes ($\mathbf{V}$), vetor dos autovalores (Λ).

início: Calcule a matriz $\frac{1}{n} \mathbf{X}^T \cdot \mathbf{X}$;

Obtenha os autovalores e autovetores $(\lambda_i, \mathbf{v}_i)$ da matriz $\frac{1}{n} \mathbf{X}^T \cdot \mathbf{X}$;

Ordene os autovalores e autovetores associados, na ordem em que $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_p$;

$\Lambda = [\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_p]$;

$\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2 \dots \mathbf{v}_p]$;

$\zeta = \mathbf{X} \cdot \mathbf{V}$

fim

Assume-se, sem perda de generalidade, que os s autovalores λ_i são ordenados do maior para o menor, isto é, $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_s$ e que os autovetores associados são $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_s$, respectivamente. Logo, a componente principal que possui a maior variância é aquela associada a $\mathbf{v}_1$, a componente principal com a segunda maior variância é associada a $\mathbf{v}_2$ e assim sucessivamente.

2.2 Escolha do Número de Componentes Principais.

Uma vez que as primeiras componentes possuem mais informações do que os dados originais, torna-se desnecessário a utilização de todas as componentes. Ou seja, pode-se escolher apenas as r primeiras componentes das s componentes geradas pela ACP para analisar os dados originais. Usa-se essa idéia, por exemplo, para a compreensão de imagens e músicas.

Observa-se que se forem utilizadas todas as componentes nenhuma informação será perdida, porém, dependendo da aplicação da ACP, a utilização de todas elas será custosa e excessiva. Logo, surge a questão de quantas componentes deve-se reter. Conforme mostrado em Jobson (1992) e Rencher (2002), existem técnicas que buscam responder a esta questão. Na sequência do texto são apresentadas três dessas técnicas.

¹ $\delta_{ij} = 1$ se $i = j$, $\delta_{ij} = 0$ se $i \neq j$

Reter um número aceitável

Com cada autovetor $\mathbf{v}$ da matriz $\mathbf{X}^T \cdot \mathbf{X}$ está uma proporção da informação total. Segundo Jobson (1992) e Rencher (2002), a porcentagem desta proporção é dada pela seguinte equação:

$$\text{Proporção Associada} = \frac{\lambda}{\sum_{k=1}^s \lambda_k} \quad (12)$$

onde λ é um autovalor de $\mathbf{X}^T \cdot \mathbf{X}$.

Empregando-se as r primeiras componentes tem-se que a porcentagem da proporção acumulada é dada por:

$$\text{Proporção Acumulada Associada} = \frac{\sum_{i=1}^r \lambda_i}{\sum_{k=1}^s \lambda_k}, \quad \text{onde } r \leq s \quad (13)$$

Deve-se, então, escolher uma porcentagem mínima e reter r componentes tal que esse percentual seja alcançado. Esse percentual mínimo varia de acordo com a aplicação. Rencher (2002) recomenda que esse mínimo seja 80% ou 90%, entretanto, taxas menores podem ser suficientes para analisar os dados.

Para a escolha da porcentagem mínima torna-se necessário o conhecimento prévio dos seus dados, experimento envolvido e resultados esperados. Apesar dessas dificuldades, as equações 12 e 13 oferecem uma forma de mensurar a informação associada a cada componente principal e a um conjunto delas, respectivamente.

Gráfico *scree*

“O gráfico *scree* é um gráfico dos autovalores λ_i por i onde procura-se por uma quebra natural entre os maiores autovalores e menores autovalores” (Rench, 2002). As linhas entre os primeiros λ do gráfico *scree* formam um declive, e depois elas “quebram” e formam uma ou mais linhas retas entre os menores autovalores.

A intenção é utilizar somente as componentes principais associadas aos autovalores que formam o declive, isto é, encontrar a primeira linha reta e utilizar os λ anteriores ao primeiro dessa linha.

Jackson (1991) aborda o fato que esse método vem sendo utilizado popularmente e que ocorrerá um problema se os autovalores tiverem magnitudes muito afastadas. Se a magnitude dos primeiros autovalores tiverem uma grande discrepância em relação aos outros, pode ser difícil identificar a “quebra” no gráfico e as linhas retas. Neste caso, Jackson (1991) sugere utilizar a escala logarítmica no eixo dos autovalores. “Esse gráfico é chamado de gráfico log-autovalor” (Jackson, 1991).

2.3 Critério da média

A Eq. 12 indica a proporção de cada componente principal e $\sum_{k=1}^s \lambda_k$ corresponde ao total de informação dos dados originais.

Pode-se utilizar um valor médio dos autovalores $\bar{\lambda}$ dado por:

$$\bar{\lambda} = \frac{\sum_{k=1}^s \lambda_k}{s} \quad (14)$$

para decidir se uma componente deve ou não ser retida.

Nesse critério deve-se reter as componentes cujos os autovalores associados sejam maiores que $\bar{\lambda}$. Segundo Jackson (1991) o valor de $\bar{\lambda}$ pode ser alto e levar a perda de informações relevantes. Sugere-se então a utilização de 70% de $\bar{\lambda}$.

3 EXPERIMENTOS COMPUTACIONAIS E RESULTADOS

Nesta seção apresentam-se os experimentos, onde emprega-se a ACP, e seus resultados.

O experimento relatado na seção 3.1 pode ser considerado um problema inverso, no qual busca-se encontrar as frequências naturais e os modos de vibração a partir do histórico do deslocamento em alguns pontos de uma viga. A idéia, neste caso, é mostrar que, com a aplicação da ACP ao histórico dos deslocamentos, é possível determinar algumas propriedades dinâmicas de estruturas sem o conhecimento das matrizes de massa ou de rigidez.

O experimento relatado na seção 3.2 visa a obtenção dos coeficientes aerodinâmicos de um perfil retangular sob escoamento de um fluido e, para isso, utiliza-se o histórico de pressões que o fluido gera no contorno do corpo. Busca-se ainda, neste segundo experimento, reconhecer os padrões do escoamento ao redor do perfil, associado ao desprendimento ou recolamento do fluido na superfície do corpo.

3.1 Análise da Resposta Dinâmica de uma Viga para a Obtenção das Frequências e Modos de Vibração

Para a obtenção dos dados que serão avaliados pela ACP, o modelo discreto do sistema apresentado na Fig. 1 é utilizado. A força P é aleatória², variando a cada instante de tempo.

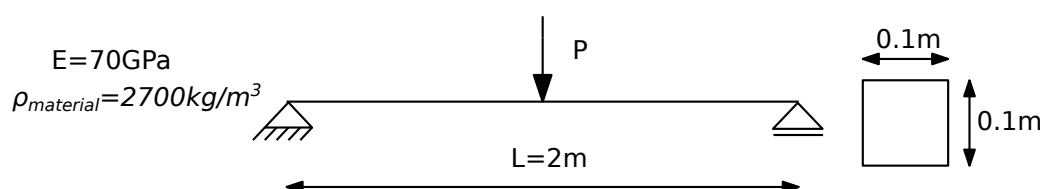


Figura 1: Sistema dinâmico utilizado para a obtenção de dados

São realizadas 3 simulações, cada um com taxas de amortecimento (ξ) de 1%, 5% e 10%. Deseja-se averiguar o fato exposto por Feeny & Kappagantu (1998) de que o erro obtido nos modos e nas frequências tende a aumentar para taxas de amortecimento maiores.

Em cada simulação são escolhidos 5 pontos igualmente espaçados ao longo do comprimento, e, através de simulação numérica, são obtidos os deslocamentos verticais ao longo do tempo nesses pontos. Na simulação, usa-se o elemento de pórtico plano para a montagem das matrizes de rigidez, de massa e de amortecimento, como apresentado em Clough & Penzien (2003). Utiliza-se o método das diferenças centrais para a solução da equação de equilíbrio dinâmico, com o passo de tempo de $10^{-5}s$ e para 300000 iterações e o método da superposição modal para compor a resposta final do sistema. Com isso, obtém-se uma matriz com dimensão

²Foi utilizada a função *randn* do software *Octave*, que usa uma distribuição normal com média zero e variância um.

de 300001 por 5, onde cada coluna representa o histórico de deslocamento de cada um dos pontos.

Aplica-se o Algoritmo 1 na matriz do histórico de deslocamentos, obtendo-se os autovaleores e autovetores da matriz de correlação e a matriz onde cada coluna é uma componente principal. Conforme Feeny & Kappagantu (1998), os autovetores da matriz de correlação são os modos de vibração da viga. Cada componente principal pode ser vista como o histórico de uma nova dimensão que se relaciona exclusivamente com um modo de vibração. A frequência natural associada a um modo será a frequência dominante no histórico dessa nova dimensão. Para a obtenção dessa frequência utiliza-se a transformada de Fourier.

Os resultados obtidos em termos de frequências naturais, para as três taxas de amortecimento, estão sintetizados na Tabela 1. Nestas, os resultados são comparados com os contínuos extraídos da literatura (Clough & Penzien, 2003) e com os discretos, obtidos com o programa em elementos finitos com o qual foi gerado o sinal analisado. Afere-se o erro das frequências obtidas através do cálculo do erro relativo em relação as frequências obtidas dos dois modelos, quais sejam o contínuo e o discreto.

Tabela 1: Frequências naturais.

ξ (%)	Modo	ACP (rad/s)	Contínuo (rad/s)	Discreto (rad/s)	Erro _{continuo} (%)	Erro _{discreto} (%)
1	1 ^o	365,61	362,67	362,64	0,783	0,791
	2 ^o	1448,89	1450,67	1452,21	0,122	0,228
	3 ^o	3280,08	3264,0	3277,0	0,492	0,0939
5	1 ^o	357,12	362,67	362,64	1,53	1,52
	2 ^o	1453,68	1450,67	1452,21	0,207	0,101
	3 ^o	3330,41	3264,0	3277,0	2,03	1,62
10	1 ^o	354,73	362,67	362,64	2,18	2,18
	2 ^o	1385,37	1450,67	1452,21	4,5	4,6
	3 ^o	3097,92	3264,0	3277,0	5,08	5,46

Para comparar graficamente e determinar os erros dos modos obtidos via ACP, os modos do modelo discreto, contínuo e da ACP são normalizados. Cria-se dois vetores de erro, subtraindo-se os modos obtidos dos modos dos modelos e, então, usa-se a norma quadrática dos vetores de erros para estimar o erro associado a cada modo. Esses erros estão apresentados na Tabela 2, para as três taxas de amortecimento. A título de ilustração, a Fig. 2 mostra a comparação dos três primeiros modos e para $\xi = 10\%$.

As frequências naturais tendem a aumentar o erro quando se aumenta a taxa de amortecimento, fato este destacado pelas Tabelas 1. O único valor que não atende a essa característica é o erro do segundo modo, quando se aumenta a taxa de amortecimento de 1% para 5%

Por sua vez, pela análise da Tabela 2 é possível constatar que os erros dos modos obtidos

Tabela 2: Erros associados aos modos de vibração.

ξ	Modo	Erro _{contínuo}	Erro _{discreto}
1%	1 ^o	5,83e-03	6,80e-05
	2 ^o	5,79e-03	6,97e-03
	3 ^o	9,44e-03	6,64e-03
5%	1 ^o	5,81e-03	1,06e-05
	2 ^o	5,69e-03	9,85e-03
	3 ^o	9,42e-03	6,71e-03
10%	1 ^o	5,82e-03	1,89e-05
	2 ^o	7,69e-03	1,23e-02
	3 ^o	9,43e-03	6,68e-03

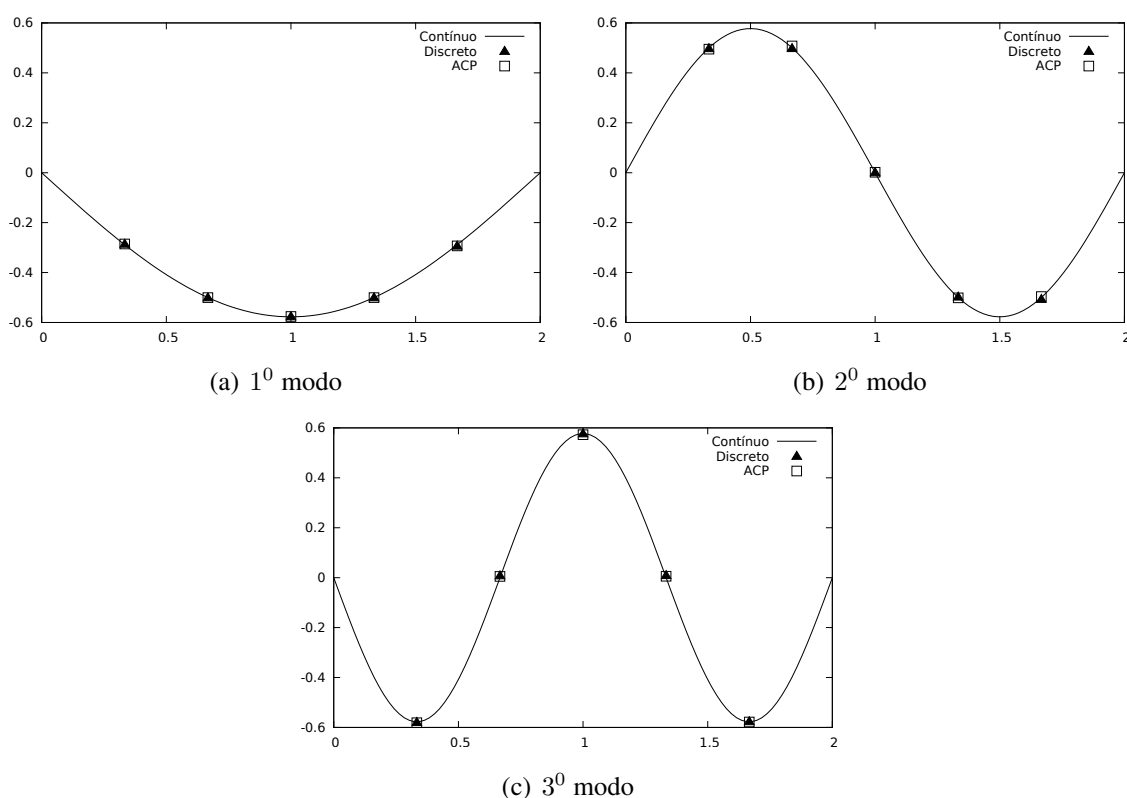


Figura 2: Modos de vibração de uma viga com taxa de amortecimento de 10%

em relação ao modelo contínuo permanecem praticamente constantes para as diferentes taxas de amortecimento, enquanto os erros comparados ao modelo discreto apresentam variações entre as taxas de amortecimento.

3.2 Obtenção de Características Aerodinâmicas de um Perfil Retangular.

O estudo em questão se refere ao escoamento ao redor de um perfil retangular com relação entre a superfície paralela ao escoamento do fluido e a superfície perpendicular ao escoamento do fluido (largura/altura do perfil) igual a 2. A Fig. 3 apresenta o domínio computacional do problema.

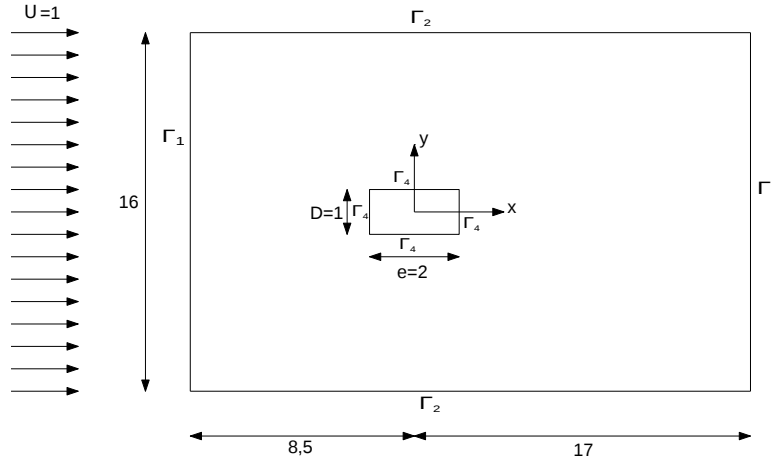


Figura 3: Esquema de um perfil retangular sob escoamento de um fluido.

O tempo adimensional da simulação é de 145 e o tamanho mínimo dos elementos próximos ao cilindro foi de $0,01D$, onde D é a altura do cilindro. A malha resultante possui 47218 elementos. As demais dimensões do modelo estão apresentadas na Fig. 3.

As condições de contorno do problema foram:

- velocidade horizontal igual a 1 em Γ_1
- velocidade vertical igual a 0 em Γ_2
- pressão igual a 0 em Γ_3
- velocidade horizontal e vertical igual a 0 em Γ_4

Aplica-se a ACP (Algoritmo 1) ao histórico de pressões no contorno do corpo, obtendo-se os autovalores e autovetores da matriz de autocorrelação e uma matriz onde cada coluna é uma componente principal. Segundo Hemón & Santi (2002), os coeficientes aerodinâmicos são dados pela seguinte equação:

$$C_{\eta}(t) = \sum_i C_{\eta_i}(t) = \frac{\mathbf{Z}_i(t)(\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{r}_{\eta})}{\frac{1}{2}\rho U^2} \quad (15)$$

onde:

- C_{η} representa algum dos coeficientes aerodinâmicos, quais sejam: coeficiente de arrasto C_a , coeficiente de sustentação C_s ou coeficiente de momento C_m ,
- C_{η_i} a contribuição da i -ésima componente principal $\mathbf{Z}_i$ cujo autovetor associado é $\mathbf{v}_i$,
- ρ a densidade do fluido,
- U a velocidade do fluido e

- $\mathbf{r}_\eta$ o vetor formado pelas componentes na direção η dos vetores normais unitários em cada ponto do contorno do perfil. No caso do momento $\mathbf{r}_\eta$, este é formado pela multiplicação entre essas componentes e a distância do eixo dos vetores normal ao centróide do corpo imerso.

Como os coeficientes aerodinâmicos serão dependentes do tempo, usa-se a média e o desvio-padrão dos coeficientes, que são representados respectivamente por $\overline{C_\eta}$ e C'_η , para comparar o modelo estudado.

Os autovalores podem ser considerados indicadores do nível de energia associado a cada componente principal da energia total (Hemón & Santi, 2002). Pela Eq. 13, os autovalores também são indicadores da eficiência da ACP. Hemón & Santi (2002) associam as formas dos autovetores com as frequências de desprendimentos de vórtices, além disso, provêm uma forma de caracterizar o descolamento do vórtice principal³ e o recolamento de vórtices ao longo do perfil, de acordo com a forma dos autovetores.

A simulação computacional foi realizada com a ferramenta em CFD desenvolvida por De Sampaio *et al* (2004). Tendo em vista que o valor do número de Reynolds é de 6000, e que o escoamento é classificado como turbulento, esta ferramenta computacional utiliza o modelo de turbulência conhecido como simulação das grandes escalas (*Large Eddy Simulation - LES*). Detalhes sobre esse modelo de turbulência podem ser encontrados nesta referência.

Da simulação computacional obteve-se uma matriz de dados com dimensão de 27400 por 600. Com isso, tem-se uma matriz de correlação com dimensão de 600 por 600, obtendo-se 600 autovalores e 600 autovetores. Como a ACP busca as dimensões com maiores quantidade de informação associada, não se faz necessário a utilização de todos as 600 componentes principais. Para determinar o número de componentes a serem utilizadas, usa-se os critérios discutidos na seção 2.2.

Avalia-se a proporção associada e acumulada a cada componente usando-se as equações 12 e 13. A Tabela 3 apresenta essas proporções para os 25 maiores autovalores. Escolhe-se então o mínimo de informação que se deseja ter, para conhecer o número de componentes que será utilizado.

Pode-se usar o gráfico *scree*, exibido na Fig. 4, para auxiliar nessa escolha. Por este gráfico, observa-se que a partir do 10º autovalor uma reta é formada. Com isso, deve-se utilizar 9 componentes principais, o que seria correspondente, de acordo com a Tabela 3, à 95,1% de informação.

Outro critério para avaliar a quantidade de componentes a serem usadas é o critério da média, e com a Eq. 14 obtém-se $\bar{\lambda} = 0.41488$. Com isso deve-se pegar os autovalores maiores que $\bar{\lambda}$ que, como mostrado na Tabela 3, são os 19 primeiros. Logo, deve-se usar 19 componentes principais e com isso 99% de informação.

Claramente, há divergência entre os critérios sobre o número de componentes, porém não se pode indicar qual é o melhor. O critério da média fornece um valor maior de informação, mas usa um número maior que o dobro do número de componentes indicado pelo gráfico *scree*. Observa-se que as 19 componentes indicariam 3,9% a mais de informação do que as 9 componentes. Deve-se então avaliar o quão relevante essa diferença é para a análise do sistema.

³Primeiro vórtice a se descolar nos cantos de incidência do vento de forma alternada

Tabela 3: Proporção associada e proporção acumulada a cada autovalor - 25 maiores

N ^o do autovalor	Autovalor	Proporção associada	Proporção acumulada
1	172,841	0,694	0,694
2	24,242	0,097	0,792
3	8,665	0,035	0,827
4	8,049	0,032	0,859
5	6,566	0,026	0,885
6	6,017	0,024	0,909
7	4,026	0,016	0,926
8	3,306	0,013	0,939
9	2,970	0,012	0,951
10	1,700	0,007	0,958
11	1,468	0,006	0,964
12	1,197	0,005	0,968
13	1,082	0,004	0,973
14	1,030	0,004	0,977
15	0,857	0,003	0,980
16	0,807	0,003	0,984
17	0,679	0,003	0,986
18	0,563	0,002	0,989
19	0,436	0,002	0,990
20	0,383	0,002	0,992
21	0,332	0,001	0,993
22	0,275	0,001	0,994
23	0,214	0,001	0,995
24	0,210	0,001	0,996
25	0,180	0,001	0,997

Para verificar a relevância dessa informação, calcula-se os coeficientes aerodinâmicos utilizando a Eq. 15 e obtém-se as suas médias e os seus desvios-padrão. Esses resultados são exibidos na Tabela 4, com os resultados obtidos por Hemón & Santi (2002) e outros da literatura. Nesta Tabela, St é o número de Strouhal.

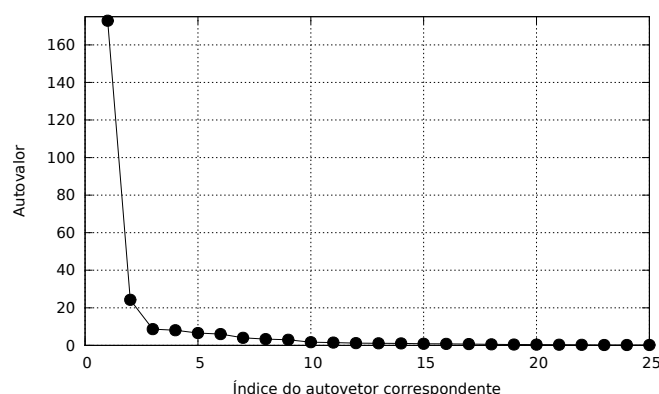


Figura 4: Gráfico scree com os 25 maiores autovalores.

Tabela 4: Coeficientes aerodinâmicos obtidos via ACP e de Hemón & Santi (2002)

Coeficiente	Hemón & Santi (2002)	ACP - 9 componentes	ACP - 19 componentes
$\overline{C}_s$	0	-0,16	-0,16
C'_s	0,6	0,68	0,7
$\overline{C}_a$	0,82 / 1,3*	1,12	1,12
C'_a	0,056	0,144	0,17
$\overline{C}_m$	-0,014	0,085	0,084
C'_m	0,036	0,28	0,3
St	0,086	0,089	0,089

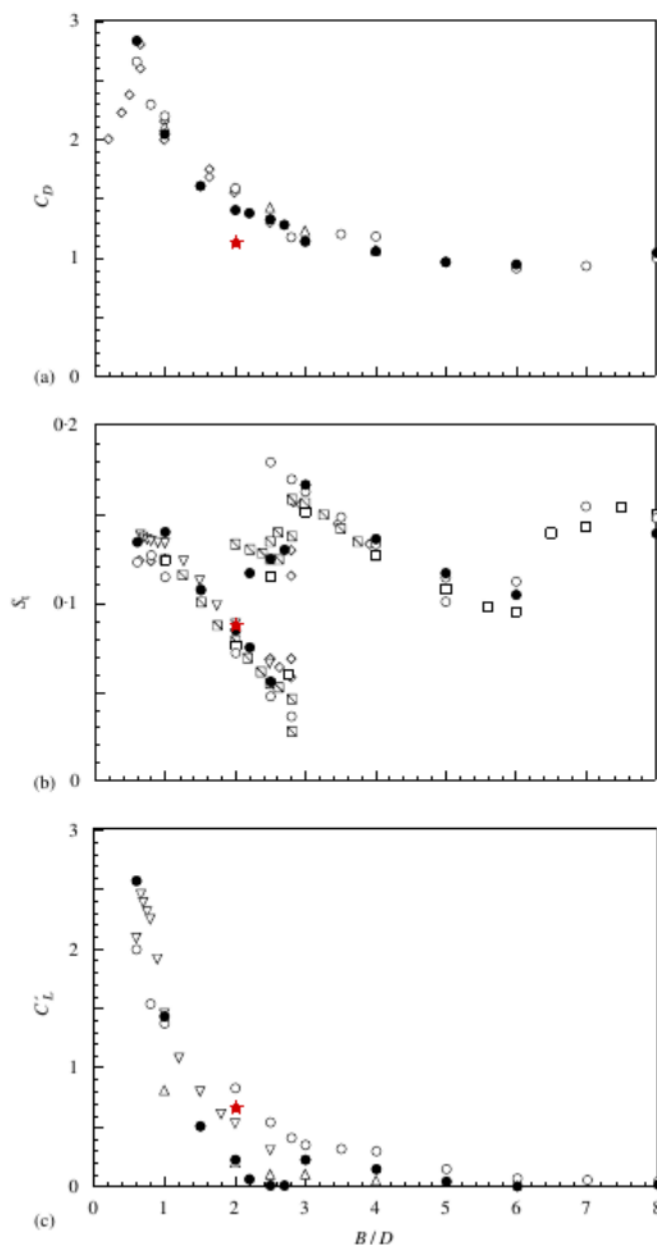
* Resultado obtido por outros autores Shimada & Ishihara (2002).

Constata-se que há diferenças entre os valores obtidos por Hemón & Santi (2002) e os encontrados pela ACP, porém entre os valores com 9 e 19 componentes há pouca variação. Assim, pode-se considerar somente o resultado obtido através das 9 componentes, sendo que a perda de 3,9% não parece afetar os resultados drasticamente.

Os resultados considerados são comparados com dados retirados de Shimada & Ishihara (2002) na Figura 5, onde C_d é a média do coeficiente de arrasto, C'_l o desvio-padrão do coeficiente de sustentação e B/D a relação largura e altura do perfil.

Hemón & Santi (2002) propõem que os autovetores da matriz de correlação podem ser usados para avaliar o desprendimento e recolamento de vórtices e que, como cada componente principal é associada a cada autovetor, pode-se realizar a análise no domínio da frequência de uma componente e as frequências dominantes indicariam as frequências de desprendimento e recolamento. Hemón & Santi (2002) apresentam uma lista dos autovetores encontrados, suas interpretações físicas e as frequências associadas às componentes principais.

Na Tabela 5 comparam-se os autovetores obtidos no presente trabalho com os de Hemón & Santi (2002), baseando-se na sua forma, e, além disso, é apresentada a interpretação dada por estes autores às formas dos autovetores. Não foi possível, entretanto, associar todos os 9



Variação das características aerodinâmicas de acordo com a razão B/D : (a) média do coeficiente de arrasto; (b) número de Stouhal; (c) desvio do coeficiente de sustentação. $\diamond$, Nakaguchi et al. (1968), $Re=0.2-0.6 \times 10^5$, $\gamma_b=2-8\%$, $H/D=14$; $\triangle$, Otsuki et al. (1978), $Re=0.65-0.76 \times 10^5$, $l=0.2\%$, $\gamma_b=5.4\%$, $H/D=6.25$; $\square$, Okajima (1983), $Re=0.42 \times 10^5$, $\gamma_b=1\%$, $l=0.4\%$; ∇ , Sakamoto et al. (1989) $Re=0.55 \times 10^5$, $\gamma_b=7\%$, $H/D=9.5$; onde l é a intensidade da turbulência, γ_b a taxa de bloqueio, e H/D a razão do modelo. $\circ$, Tamura & Ito (1996) cálculos 3-D; $\bullet$, cálculos presentes; $\star$ ACP.

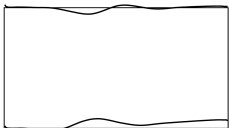
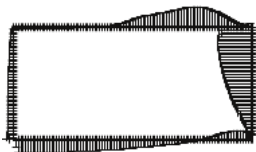
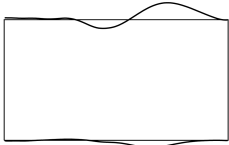
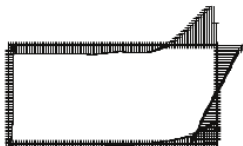
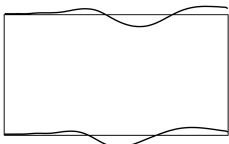
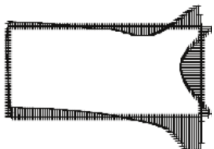
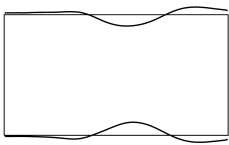
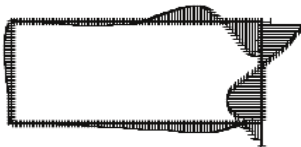
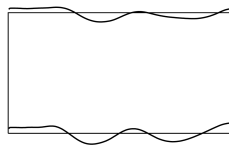
Figura 5: Valores retirados de Shimada & Ishihara (2002).

autovetores encontrados a algum apresentado pelos referidos autores.

Na Tabela 6 é apresentado o espectro de frequência das componentes principais, que são associadas aos modos da Tabela 5, obtidas por Hemón & Santi (2002) e os obtidos da presente simulação.

Da análise desses resultados nota-se que:

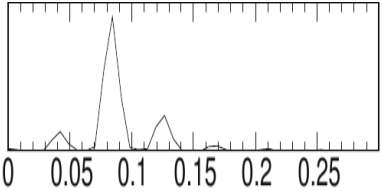
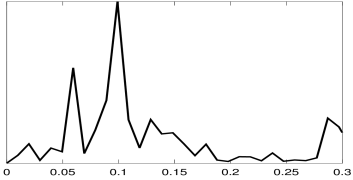
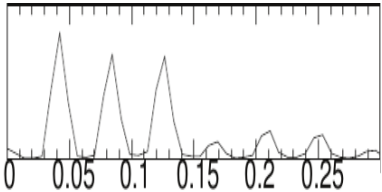
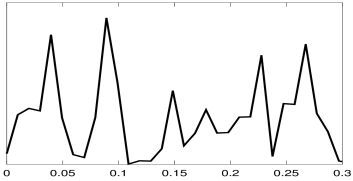
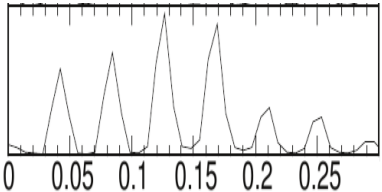
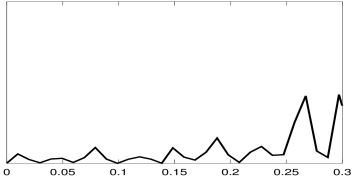
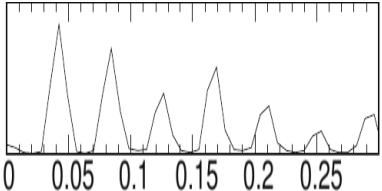
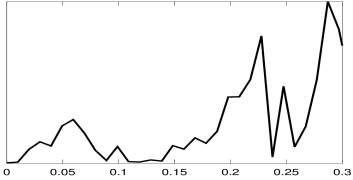
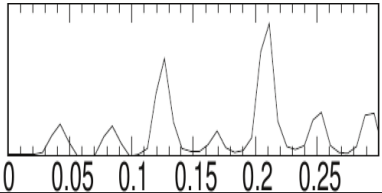
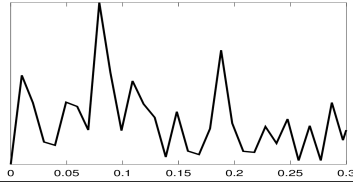
Tabela 5: Autovetores obtidos, autovetores de Hemón & Santi (2002) e suas interpretações

Autovetores retirados de Hemón & Santi (2002)	Autovetores obtidos	Interpretação física
		Descolamento do vórtice principal na borda
		Recolamento em D Anti-simétrico
		Recolamento em $3/2D$ Anti-simétrico
		Recolamento em $3/2D$ Simétrico
		Recolamento em $3/2D$ Anti-simétrico

1. a frequência dominante no espectro de C_s de 0,089, que é a do número de Strouhal, é relacionada aos deslocamentos a barlavento ⁴ dos vórtices dominantes.
2. as frequências harmônicas a metade do número de Strouhal ($n \frac{St}{2}$) estão associadas ao recolamento:

⁴Lado de onde o fluido incide.

Tabela 6: Espectros das frequências associadas aos autovetores e frequência dominante.

Frequência dominante	Frequências retiradas de Hemón & Santi (2002)	Frequências obtidas
St		
$n \text{ St}/2$		
$n \text{ St}/2$		
$n \text{ St}/2$		
$\frac{3}{2} \text{ St } \frac{5}{2} \text{ St}$		

(a) na metade a sotavento⁵ das faces superior e inferior;

(b) a $\frac{3}{4}$ a sotavento das faces superior e inferior e na forma anti-simétrica;

(c) a $\frac{3}{4}$ a sotavento das faces superior e inferior e na forma simétrica.

3. As frequências de $\frac{3}{2} \text{ St } \frac{5}{2} \text{ St}$ estão associadas ao recolamento a $\frac{3}{4}$ a sotavento das faces superior e inferior e na forma anti-simétrica.

⁵Lado para onde o fluido incide.

Observa-se que há algumas divergência dos valores obtidos e os apresentados por Hemón & Santi (2002). Esses contrastes são causados, entre outros motivos, pela utilização de diferentes ferramentas computacionais para a análise do escoamento e, uma vez que o escoamento é considerado turbulento, utiliza-se processos estocásticos para realizar a simulação.

Percebe-se na Fig. 5 que os valores encontrados estão dentro da faixa de dados de outros autores. Nota-se também que para o número de Strouhal há uma variação entre os valores da literatura, evidenciando a dificuldade de se obter a frequência associada ao desprendimento de vórtices. O ACP se apresenta como uma alternativa viável para auxiliar nesse processo.

A avaliação dos autovetores surge como uma possibilidade de se encontrar as frequências de desprendimento e recolamento, e os locais onde ocorrem, de forma mais rápida e eficiente do que através da visualização de vórtices, uma vez que na visualização, pode-se não ter quadros suficientes para notar frequências mais altas e os locais de recolamento.

4 CONCLUSÃO

A análise de componentes principais mostra-se eficiente para a obtenção dos modos e frequências naturais, e também para a obtenção de coeficientes aerodinâmicos. É notável a capacidade da obtenção desses dados baseado nas respostas do sistema, sendo desnecessário o conhecimento de algumas propriedades do sistema.

Para o primeiro exemplo foi observado que o erro associado as frequências naturais aumentam com o aumento da taxa de amortecimento, porém o erro associado aos modos obtidos são praticamente constantes, independente da taxa de amortecimento.

Para a obtenção de coeficientes aerodinâmicos nota-se que poucas componentes são necessárias para se obter resultados aceitáveis. Entretanto, não se pode definir com precisão o número mínimo de componentes necessárias, baseado nas técnicas apresentadas.

A análise de componentes principais facilita a compreensão dos efeitos gerados pelo escoamento turbulento de um fluido em um corpo imerso no fluido e auxilia na compreensão das frequências associadas aos desprendimentos e recolamentos de vórtices e o local onde esses recolamentos ocorrem.

AGRADECIMENTOS

Os autores deste trabalho agradecem à Fapemig (apoio PCE 01337-15) e ao Programa de Pós Graduação em Modelagem Computacional da UFJF pelo apoio à participação no evento. Agradecem novamente ao CNPq pelo apoio financeiro concedido no projeto de pesquisa 305175/2013-0 e à Fapemig pelo apoio financeiro concedido no projeto de pesquisa TEC APQ - 00103-12.

REFERÊNCIAS

- Amondolèse, X. & Crémona, C., 2005, Analysing fluid loadings on moving bluff bodies using proper orthogonal decomposition, *Journal of Fluids and Structures*, 20.
- Battista, R. C. & Pfeil, M.S., Control of wind oscillations of Rio-Niterói bridge, Brazil, 2010, *Proceedings of the ICE - Structures and Buildings*, 163:87-96.
- Buljak, V., 2012, Inverse Analyses with Model Reduction, *Computational Fluid and Solid Mechanics*, Springer Berlin Heidelberg.
- Clough, R.W. & Penzien, J., 2003, *Dynamics of Structures*, Computers and Structures, 3^a edição.
- De Sampaio, P.A.B., Hallak, P.H., Coutinho, A.L.G.A. & Pfeil, M., 2004, A stabilized finite element procedure for turbulent fluid–structure interaction using adaptive time–space refinement, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 44(6):676-693.
- Feeny, B.F. & Kappagantu, R., 1998, On the Physical Interpretation of Proper Orthogonal Modes in Vibrations, *Journal of Sound and Vibration*, 211(4):607-616.
- Hemón, P. & Santi, F., 2002, On the aeroelastic behaviour of rectangular cylinders in cross-flow, *Journal of Fluids and Structures*, 16(7):885-889.
- Jackson, J.E., 1991, *A User's Guide to Principal Component Analysis*, Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics, Wiley-Interscience.
- Jobson, J.D., 1992, *Applied Multivariate Data Analysis*, Springer Texts in Statistics, Springer New York, volume 2.
- Johnson, R. A. & Wichern, D.W., 2007, *Applied Multivariate Statistical Analysis*, Pearson Prentice Hall, 6^a edição.
- Rencher, A.C., 2002, *Methods of Multivariate Analysis*, Wiley Series in Probability and Statistics, Wiley-Interscience.
- Shimada, K. & Ishihara, T., 2002, Application of a modified $\kappa - \epsilon$ model to the prediction of aerodynamic characteristics of rectangular cross-section cylinders, *Journal of Fluids and Structures*, 16:465-485.