



CONDICIONAMENTO DO PROBLEMA DE AUTOVALORES OBTIDO DO MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS GENERALIZADOS NA DINÂMICA DE ESTRUTURAS

Thamara Petroli

Marcos Arndt

Roberto Dalledone Machado

Paulo de O. Weinhardt

thamarapetroli@gmail.com

arndt.marcos@gmail.com

rdm@ufpr.br

paulo.weinhardt@gmail.com

Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia

Universidade Federal do Paraná (UFPR) - Av. Coronel Francisco Heráclito dos Santos, 210 - 81530-900, Curitiba, Paraná, Brasil

Abstract. *O Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG) é um Método de Galerkin, cujos espaços de aproximações locais consistem de funções, não necessariamente polinomiais, que refletem as informações disponíveis sobre a solução da equação diferencial a ser resolvida e garantem boa aproximação local e global. Nos últimos anos algumas versões do MEFG têm sido desenvolvidas e aplicadas com sucesso na análise dinâmica de estruturas. Ao aplicar métodos numéricos na análise de vibrações livres de estruturas, o problema se reduz a solução numérica de um problema de autovalores e autovetores generalizado. O MEFG tem apresentado excelentes taxas de convergência e soluções mais precisas do que os refinamentos h e p do Método dos Elementos Finitos (MEF). Entretanto, em alguns casos, a análise aproximada no MEFG tem resultado em autovalores negativos dependendo da precisão empregada nas rotinas computacionais. Nesse sentido, o objetivo deste trabalho é fazer uma análise do problema de autovalores generalizado e a perturbação gerada pelas aproximações das matrizes do MEFG.*

Keywords: *Condicionamento, Problema de Autovalores Generalizado, Método de Elementos Finitos Generalizados, Análise dinâmica.*

1 INTRODUÇÃO

O Método dos Elementos Finitos (MEF) foi desenvolvido por volta da segunda metade da década de 50, na área da indústria aeroespacial, como uma forte ferramenta numérica para resolver problemas Físicos e Matemáticos. Ele possibilita encontrar a solução aproximada, algumas vezes exata, de sistemas de Equações Diferenciais, atualmente se tornando uma das principais ferramentas utilizadas. O Método de Elementos Finitos Generalizados (MEFG), por sua vez, é baseado nas ideias do Método da Partição da Unidade (MPU), desenvolvido por Melenk e Babuska(1996).

No MPU, a base do subespaço de aproximações locais é constituída de funções, não necessariamente polinomiais, que refletem informações disponíveis a priori sobre a solução da equação diferencial governante (Arndt et. al., 2010). Esta técnica garante boa aproximação local e global.

O uso de funções trigonométricas em métodos enriquecidos para análise dinâmica de estruturas vem sendo aplicado a alguns anos, como nos trabalhos de Zeng(1998), Ganesan e Engels(1992), Leung e Chan(1998). Arndt(2009) aplica o MPU num conjunto específico de funções trigonométricas, gerando refinamentos h, p e adaptativo do MEFG para análise dinâmica de estruturas do tipo reticulado.

Na aplicação do MEFG proposto por Arndt(2009) em problemas de vibrações livres encontram-se situações de grande sensibilidade do problema, apesar de apresentar bons resultados. Observa-se também que os ajustes feitos na precisão empregada nos cálculos computacionais para determinação das matrizes de massa e rigidez por integração numérica, ou na solução do problema de autovalores, afetam a precisão e a convergência do MEFG. Leung et al., (2004), tentando encontrar uma maneira de avaliar a sensibilidade do problema de vibração, ao utilizar o método p -Fourier e MEF, calcularam o número de condição da matriz de massa, de forma a encontrar uma "medida" de sensibilidade.

O número de condição está diretamente ligado com os autovalores de uma matriz. Entretanto, para calcular os autovalores de grandes sistemas lineares, existem vários algoritmos que permitem encontrá-los com precisão e alta convergência. Considerando o fato que o problema de autovalores é um caso particular da teoria sobre polinômios matriciais, a muito tempo explorada em análise numérica e teoria de controle (Davis(1961) e Davis(1983)), o problema de sensibilidade nesse caso é um tópico ainda em desenvolvimento.

Quando envolvem-se matrizes ou polinômios com coeficientes matriciais o estudo é relativamente recente. Wilkinson(1965) introduziu o número de condição de uma matriz A , fazendo uma discussão sobre sua sensibilidade. Dois anos depois, Smith(1967) publicou uma expressão explícita do número de condição para matrizes reduzidas à forma canônica de Jordan. Por volta dos anos 1970, Stewart(1971) e Wilkinson(1972), usaram o número de condição para limitar o domínio do espectro.

Por definição, o problema de autovalores generalizado é um caso particular de equações polinômiais. Sendo assim o objetivo deste trabalho é fazer uma análise do condicionamento e sensibilidade do problema de autovalores generalizado, gerado pela equação $Ax = \lambda Bx$, do MEFG. Segundo Stewart e Sun (1990), se uma matriz é hermitiana, e recebe uma perturbação, então haverá um incremento nos seus autovalores. Então, o estudo e análise das aproximações das matrizes de massa e rigidez é necessário, para descobrir até que ponto as perturbações

geradas pelas aproximações do método de construção dessas matrizes podem influenciar no desempenho e precisão do MEFG na análise dinâmica de estruturas.

2 PROBLEMA DE AUTOVALORES

Tisseur(2000) define um polinômio matricial, numa variável complexa, como:

$$P_m(\lambda) = A_m\lambda^m + A_{m-1}\lambda^{m-1} + \dots + A_1\lambda + A_0 \quad (1)$$

onde A_i são matrizes $m \times m$, com $m \geq 1$, sendo assim um polinômio que tem por entradas matrizes. Encontrar escalares $\lambda \in \mathbb{C}$, tal que $\det(P(\lambda)) = 0$, é uma das principais dificuldades encontradas nesses problemas. Um exemplo de que essa não é uma tarefa muito simples é o polinômio: $I\lambda^2 + A_0$, já que o Teorema Fundamental da Álgebra não garante a sua existência (Bazán, 2003).

Os escalares λ são chamados de *autovalores do polinômio matricial*. Então para cada autovalor λ associa-se um vetor $x \in \mathbb{C}$, $x \neq 0$ tal que

$$P_m(\lambda)x = 0 \quad (2)$$

chamado *autovetor a direita* de $P_m(\lambda)$ e $\{\lambda, x\}$ é chamado de *auto-par*. De maneira análoga, *autovetor a esquerda* $P_m(\lambda)$, é um vetor $y \in \mathbb{C}$, $y \neq 0$ tal que

$$y^*P_m(\lambda) = 0 \quad (3)$$

onde $*$ denota conjugação complexa. O conjunto de todos os autovalores é chamado de *espectro*.

2.1 Problema de Autovalores Generalizado com Matrizes Hermitianas

Considerando as definições anteriores, segue que um *problema de autovalores generalizado* é um caso particular dos polinômios matriciais, definido pela equação:

$$P(\lambda)x = (A - \lambda B)x = 0 \iff Ax = \lambda Bx \quad (4)$$

E mais, quando a matriz $B = I$, matriz identidade, o problema generalizado é chamado de *problema de autovalores padrão*, ou somente *problema padrão*.

Para este trabalho, é preciso dar ênfase em algumas definições:

- Uma matriz A , é dita *Hermitiana*, se $A = (\bar{A})^T$, onde $\bar{A}$ é a matriz conjugada de A .
- Sejam λ_i 's autovalores da matriz A , então:
 - Se $\lambda_i > 0 \forall i$, então A é *definida positiva*;
 - Se $\lambda_i \geq 0 \forall i$, então A é chamada de *semi-definida positiva*;
 - Se $\lambda_i < 0 \forall i$, então A é *definida negativa*;
 - Se $\lambda_i \leq 0 \forall i$, então A é *semi-definida negativa*;
 - A matriz A é *indefinida* quando existem autovalores positivos e negativos.

Com o objetivo de analisar a sensibilidade da solução do problema de autovalor polinomial matricial a pequenas variações nos dados de entrada, define-se o conceito de condicionamento.

O problema é *bem condicionado* se pequenas perturbações nos dados de entrada resultam em pequenas variações nos dados de saída. Caso contrário, quando pequenas perturbações nos dados de entrada produzem grandes perturbações nos dados de saída, temos um problema *mal condicionado*.

Um problema de autovalor generalizado, Eq.(4), pode ser bem-condicionado ou mal-condicionado. Quando a matriz A é hermitiana e trata-se de um problema padrão, então este é um problema bem-condicionado (Demmel et al., 2000). A situação muda completamente quando o problema é generalizado, que em geral é mal-condicionado, principalmente quando as matrizes não são hermitianas (Bazán, 2003).

Uma vantagem de estar lidando com matrizes hermitianas e definida positivas é que existem algoritmos que facilitam encontrar os autovalores das matrizes, de maneira a ter uma medida de condicionamento. Outra vantagem, é que pode-se transformar um problema de autovalor generalizado em um problema padrão. Se as matrizes A e B são hermitianas e B é definida positiva, então pode-se decompor B como produto de matrizes não singulares, $B = LL^*$, através da Decomposição de Cholesky, por exemplo. Assim o problema se transforma em:

$$(L^{-1}A(L^*)^{-1})\bar{x} = \lambda\bar{x} \quad (5)$$

Como os espaços do domínio são invariantes (Golub e Loan, 1996), as propriedades são preservadas após a transformação, isto é, os autovalores são os mesmos; e se $\bar{x}$ é autovetor da Eq.(5), então $x = (L^*)^{-1}\bar{x}$ satisfaz a Eq.(4). Portanto, quando um problema de autovalores generalizado tem as matrizes A e B hermitianas e B é definida positiva; então este é um problema bem-condicionado, porque pode ser reduzido a um problema padrão, com mesmos autovalores e que por sua vez é bem condicionado.

3 MEDIDA DO CONDICIONAMENTO

A questão que surge então é de como medir o condicionamento de um problema. De um ponto de vista teórico pode-se idealizar o problema tratado como uma função $f : X \rightarrow Y$, onde X, Y são espaços normados, assim para cada $x \in X, \exists y \in Y$, tal que $y = f(x)$.

Com isso, define-se que o *número de condição*, κ , para o caso real, é dado por:

$$\kappa(f)(x) = \begin{cases} |f'(x)|, & \text{erros absolutos} \\ \left| \frac{xf'(x)}{f(x)} \right|, & \text{erros relativos} \end{cases} \quad (6)$$

Este número permite medir o condicionamento do problema. De maneira análoga, quando toma-se $X = \mathbb{R}^m, Y = \mathbb{R}^n$, para m, n arbitrários, o número de condição é dado por Bazán(2003):

$$\|\delta y\|_{\infty} \leq \|\delta x\|_{\infty} \|Jf\|_{\infty} \quad (7)$$

onde Jf é a matriz Jacobiana de f , δx e δy são as perturbações geradas pela aproximação de Taylor, e $\|\cdot\|_{\infty}$ é a norma no infinito.

Assim, tomando $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matriz, e um vetor b , considerando que o sistema de equações lineares é de primeira ordem, $Ax = b$, tem-se $x = f(b) = A^{-1}b$. Consequentemente verifica-se que a Jacobiana (Bazán, 2003), nesse caso, é dada por $Jf(b) = A^{-1}$. Dessa maneira segue que, pelos resultados anteriores, o *número de condição da matriz A*, denotado por $\kappa(A)$, é dado por:

$$\kappa(f)(b) = \frac{\|b\| \|A^{-1}\|}{\|x\|} = \frac{\|b\| \|A^{-1}\|}{\|A^{-1}b\|} \leq \|A\| \|A^{-1}\| \quad (8)$$

onde usualmente a norma utilizada é a euclidiana. De acordo com Wilkinson(1965), o *número de condição de uma matriz* é definido por

$$\kappa(A) = \frac{|\lambda_n|}{|\lambda_1|} \quad (9)$$

se a matriz A for simétrica; e λ_1, λ_n são os autovalores de A , o menor e o maior autovalor respectivamente.

Papathanasiou e Psarrakos(2010), definem o *número de condição de autovalores* como sendo:

$$\kappa(P, \lambda) = \frac{w(\|\chi_0\| \|\psi_0\|)}{\|\chi_0\| \|\psi_0\|} \kappa(C_p, \lambda) \quad (10)$$

onde $\chi_0 \in \mathbb{C}^n$ é autovetor a direita e $\psi_0 \in \mathbb{C}^n$ é autovetor a esquerda, do polinômio matricial $P_m(\lambda)$; e sendo λ , também, autovalor da matriz companheira C_p , sendo

$$\kappa(C_p, \lambda) = \frac{\|\chi_0\| \|\psi_0\|}{|\psi_0^* \chi_0|} \quad (11)$$

onde $*$ denota conjugação complexa, $\|\cdot\|$ a norma euclidiana do vetor, e a matriz companheira do polinômio $P_m(\lambda)$ de ordem $nm \times nm$ é definida como:

$$C_p = \begin{bmatrix} 0 & Id & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & Id \\ -A_m^{-1}A_0 & -A_m^{-1}A_1 & \cdots & -A_m^{-1}A_{m-1} \end{bmatrix} \quad (12)$$

4 ANÁLISE DINÂMICA DE ESTRUTURAS

A análise de vibrações livres em estruturas não amortecidas recai no problema (Chopra, 2012):

$$K\phi = \omega^2 M\phi \quad (13)$$

onde K é a matriz de rigidez, M a matriz de massa, ω a frequência natural e ϕ o vetor de modo de vibração natural.

As matrizes K e M quando provem da forma fraca de Galerkin referente ao equilíbrio dinâmico do sistema para vibrações de barras, são dadas na forma:

$$K = [k_{ij}] = \int_{\Omega} \frac{\partial \Phi_i}{\partial x} \frac{\partial \Phi_j}{\partial x} d\Omega \quad (14)$$

$$M = [m_{ij}] = \int_{\Omega} \Phi_i \Phi_j d\Omega \quad (15)$$

onde as Φ 's são funções de interpolação e Ω o domínio global do problema. A escolha das funções de interpolação depende do método aproximado a ser empregado.

4.1 Aproximações pelo MEFG

O MEFG surgiu a partir do Método dos Elementos Finitos da Partição da Unidade, onde o enriquecimento local do subespaço de aproximação é incorporado através do MPU (Arndt, 2009).

As funções de aproximação, além de representarem uma boa aproximação local, devem ser densas no conjunto de soluções da equação diferencial a ser resolvida. Como a escolha não é única, então ela depende de aspectos como custo da construção das matrizes e otimalidade do sistema.

O MPU permite construir um espaço de aproximação com a regularidade desejada, independente dos espaços de aproximação locais, preservando as propriedades destes espaços. A aproximação da solução proposta pelo MEFG no domínio do elemento mestre pode ser escrito como combinação das componentes (Arndt et al., 2014):

$$u = u_{MEF} + u_{ENRIQUECIMENTO} \quad (16)$$

onde u_{MEF} é a componente do MEF baseada nos graus de liberdade nodais e $u_{ENRIQUECIMENTO}$ é a componente de enriquecimento gerada pela partição da unidade e baseada nos graus de liberdade de campo.

O enriquecimento trigonométrico reproduz alguns modos de vibração fundamentais na estrutura, permitindo uma grande acurácia dos resultados obtidos. Assim a aproximação trigonométrica do MEFG é dada por:

$$u(\xi) = \sum_{i=1}^2 \eta_i(\xi) + \eta_1(\xi) \left[\sum_{j=1}^{n_l} (f_{1j}^S(\xi) + f_{1j}^C(\xi)) \right] + \eta_2(\xi) \left[\sum_{j=1}^{n_l} (f_{2j}^S(\xi) + f_{2j}^C(\xi)) \right] \quad (17)$$

Neste trabalho utilizam-se as funções de enriquecimento, baseadas em Arndt(2009) e Torii et al.(2015), dadas por:

$$\begin{cases} f_{1j}^S = \sin(\beta_j(1 + \xi)) \\ f_{1j}^C = \cos(\beta_j(1 + \xi)) - 1 \\ f_{2j}^S = \sin(\beta_j(\xi - 1)) \\ f_{2j}^C = \cos(\beta_j(\xi - 1)) - 1 \end{cases} \quad (18)$$

para $j = 1, 2, \dots, n_l$, sendo n_l o número de níveis de enriquecimento.

E as funções da partição da unidade utilizadas foram:

$$\begin{cases} \eta_1 = \frac{(1 - \xi)}{2} \\ \eta_2 = \frac{(1 + \xi)}{2} \end{cases} \quad (19)$$

Para este trabalho considerou-se $\xi \in (-1, 1)$ e $\beta_j = j\frac{3}{4}\pi, \forall j = 1, 2, \dots, n_l$.

Por construção do método, como apresentado por Arndt(2009), sabe-se que as matrizes K e M são matrizes hermitianas. Sendo M definida positiva (Inman, 1996), então pode-se aplicar a decomposição em M , transformando o problema de autovalor generalizado em um padrão bem-condicionado. E se $\bar{x}$ é autovetor da Eq.(5), então $x = (L^*)^{-1}\bar{x}$ satisfaz a Eq.(13); logo pelas definições anteriores segue que os autovalores são reais e positivos, ou seja, $\omega^2 \in \mathbb{R}$.

Como a matriz de massa é por definição definida positiva nos problemas de vibração livre não haveriam motivos para medir o condicionamento do sistema, pois sabe-se que o problema é bem-condicionado e os autovalores são reais e positivos. Porém, dependendo da precisão empregada no cálculo das matrizes de massa e rigidez observa-se que o problema continua mal-condicionado numericamente, sendo então necessário verificar a sensibilidade numérica da matriz de massa, pois o bom condicionamento do problema depende desta ser numericamente definida positiva.

5 ANÁLISE DA SENSIBILIDADE DA MATRIZ DE MASSA

Uma primeira análise foi feita, variando o número de dígitos significativos (precisão) para a aproximação numérica (integração numérica) das matrizes de massa e rigidez, calculando-se o erro absoluto das aproximações em relação aos valores exatos (integração exata). As matrizes geradas, no software Maple, tem 5 níveis de enriquecimento ($n_l = 5$), variando o número de dígitos significativos (17, 19 e 22). Para determinação das matrizes aproximadas foi empregada a quadratura de Gauss.

As figuras 1 a 3 a seguir apresentam, a título de ilustração, a distribuição do erro nas matrizes de massa e rigidez para uma precisão de 17, 19 e 22 dígitos significativos, respectivamente.

Observa-se que a parte central das matrizes de massa e rigidez, é a que contém os erros mais altos na matriz, embora sejam bastante pequenos. Nessa região estão as funções de enriquecimento dos níveis mais altos (no caso, nível 5).

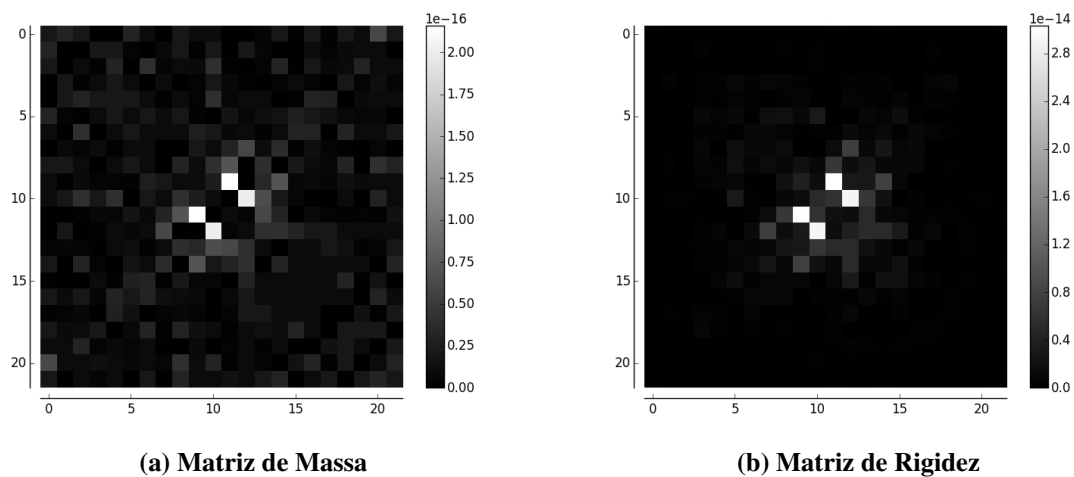


Figura 1: 17 dígitos

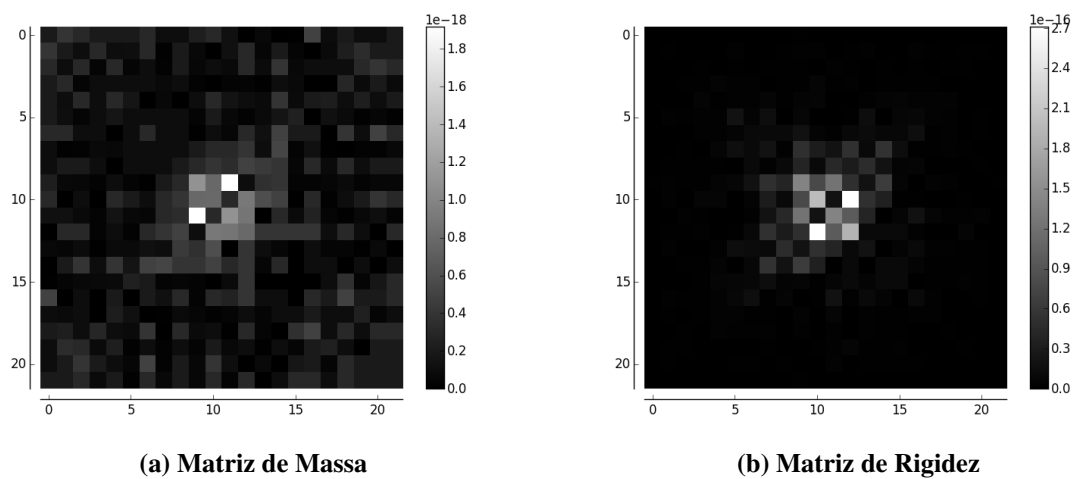


Figura 2: 19 dígitos

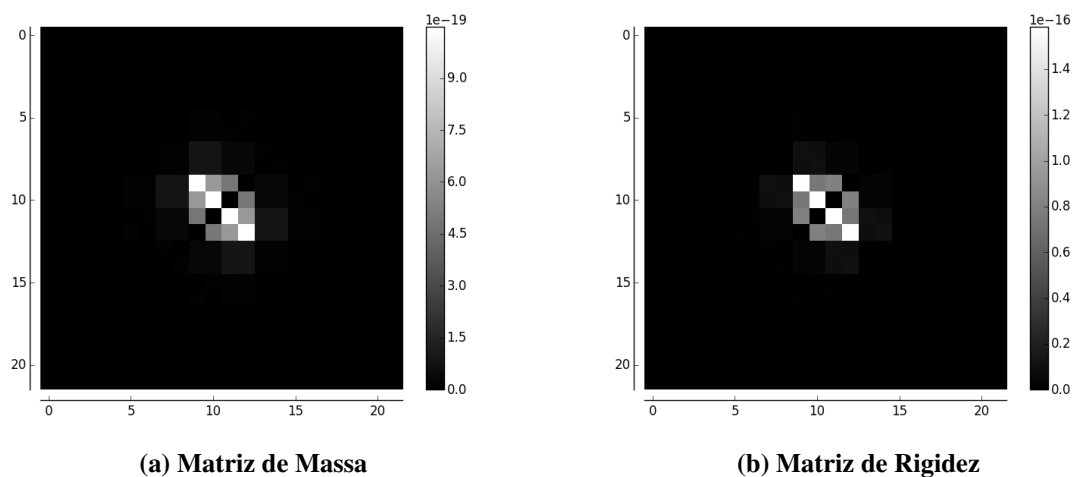


Figura 3: 22 dígitos

Considerando o erro das aproximações, uma segunda análise foi feita, mas agora observando a partir de qual precisão a matriz de massa torna-se definida positiva e a ordem do número de condição dessa matriz (Tabela 1 a seguir).

Tabela 1: Precisão a partir do qual M se estabiliza como definida positiva e ordem do número de condição

Número de Níveis	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Número de dígitos significativos	4	6	10	17	21	25	28	34	36	43
Ordem do número de condição	10^4	10^8	10^{12}	10^{17}	10^{21}	10^{25}	10^{29}	10^{33}	10^{38}	10^{42}

Observa-se que a potência da ordem do número de condição se aproxima da precisão necessária para que a matriz M torne-se definida positiva. Por exemplo, com 6 níveis de enriquecimento a matriz é definida positiva a partir de 25 dígitos de precisão e a ordem do número de condição é 10^{25} .

6 CONCLUSÃO

O objetivo deste trabalho foi fazer uma análise do problema de autovalores generalizado e a perturbação gerada pelas aproximações das matrizes do Método de Elementos Finitos Generalizados (MEFG). Mesmo com toda a base teórica matemática garantindo que o problema de autovalores generalizado da vibração livre de barras é bem condicionado, ainda assim encontra-se grande sensibilidade no problema da Eq.(13). Essa sensibilidade está diretamente ligada com os erros de aproximação gerados pelo MEFG, na construção das matrizes de massa e rigidez, que por fim provocam perturbações nos autovalores.

Para a análise de vibrações livres de barras pelo MEFG observa-se uma correlação direta entre a potência da ordem do número de condição da matriz de massa e a quantidade de dígitos significativos (precisão) necessária para que a matriz de massa torne-se numericamente definida-positiva, ou seja, quando a mesma satisfaz as hipóteses para o bom condicionamento. Logo, a ordem de grandeza do número de condição da matriz de massa pode ser utilizado para estimar a precisão necessária na construção da matriz de massa e portanto ser também empregada na comparação de estabilidade de diferentes propostas de funções de enriquecimento para o MEFG.

Pesquisas em andamento pretendem verificar se esta correlação também ocorre nos problemas de vibração livre de vigas, estado plano e outros.

Agradecimentos

Ao Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia (PPGMNE), à Universidade Federal do Paraná (UFPR) e à CAPES pelo apoio e oportunidade.

REFERÊNCIAS

- Arndt, M., 2009. O Método dos Elementos Finitos Generalizados Aplicado à Análise de Vibrações Livres de Estruturas Reticuladas. Tese de Doutorado, Universidade Federal do Paraná.
- Arndt, M., Machado, R.M., & Natume, P.M. 2014. Generalized finite element method using bessel functions in vibration analysis. CILAMCE, Fortaleza.
- Arndt, M., Machado, R.M., & Scremin, A. 2010. O Método dos Elementos Finitos Generalizados Adaptativo Aplicado à Análise de Vibrações Livres de Eixos. CONEM. Paraíba.
- Bazán, F.S.V., 2003. Autovalores de Polinômios Matriciais: Sensibilidade, Computação e Aplicações .Notas de Minicurso: 24ºCBM, Florianópolis.
- Chopra, A. K., 2012. Dynamics of structures: theory and applications to earthquake engineering. New Jersey: Prentice Hall.
- Davis, G.J., 2(1961). Numerical solution of a quadratic matrix equation. *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing.*, pp. 164-175.
- Davis, G.J., 9(1983). Algorithm 598: An algorithm to compute solvents of the matrix equation $AX^2 + Bx + C = 0$. *ACM Transactions on Mathematical Software*, pp. 246-254.
- Demmel, J., Bai, Z., Dongarra, J., Ruhe, A., & Vorst, H.v.d., 2000. Templates for the Solution of Algebraic Eigenvalue Problems. *Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics - SIAM*.
- Ganesan, N.; & Engels, R. C., 1992. Hierarchical Bernoulli-Euler beam finite elements. *Computers & Structures*, vol. 43, n. 2, pp. 297-304.
- Golub, G.H., & Loan, C.F.V., 1996. Matrix Computations. Baltimore and London: The Johns Hopking University Press.
- Inman, D. J., 1996. *Engineering vibration*. New Jersey: Prentice-Hall.
- Leung, A. Y. T. & Chan, J. K. W., 1998. Fourier p-element for the analysis of beams and plates. *Journal of Sound and Vibration*, vol. 212, n. 1, p. 179 - 185.
- Leung, A.Y.T, Zhu, B., Zheng, J., & Yang, H., 2004. Analytic trapezoidal Fourier p-element for vibrating plane problems. *Journal of Sound and Vibration*, vol.271, pp. 67 - 81.
- Melenk, J. M.; & Babuska, I., 1996. The partition of unity finite element method: basic theory and applications. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 139, n. 1-4, pp. 289 - 314.
- Papathanasiou, N., & Psarrakos, P., 2010. On condition numbers of polynomial eigenvalue problems. *Applied Mathematics and Computation*, vol. 216, pp. 1194 - 1205.
- Smith, R.A., 1967. The condition numbers of the matrix eigenvalue problem. *Numerische Mathematik*, vol.10, pp. 232 - 240.
- Stewart, G.W., 1971. Error bounds for approximate invariant subspaces of closed linear operators. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, vol.8, pp. 796 - 808.
- Stewart, G.W., & Sun, J., 1990. Matrix Perturbation Theory. Boston: Academic Press.
- Tisseur, F., 2000. Backward error and condition of polynomial eigenvalue problems. *Linear*

Algebra and its Applications, vol.309, pp. 339 - 361.

Torii, A.J, Arndt, M., & Machado, R.M. 2015. GFEM for modal analysis of 2D wave equation. *Engineering Computations*, vol. 32, n. 6, pp. 1779 - 1801

Wilkinson, J.H., 1965. *The Algebraic Eigenvalue Problem*. Oxford: Claredon Press.

Wilkinson, J.H., 1972. Note on matrices with a very ill-conditioned eigenproblem. *Numerische Mathematik*, vol. 19, pp. 175 - 178.

Zeng, P., 1998. Composite element method for vibration analysis of structures, part I: principle and C0 element (bar). *Journal of Sound and Vibration*, vol. 218, n. 4, p. 619 - 658.