



ANÁLISE NÃO LINEAR GEOMÉTRICA DE ESTRUTURAS DE CABOS

Armando Cesar Campos Lavall

Rodrigo Sernizon Costa

lavall@dees.ufmg.br

rsernizon@dees.ufmg.br

Departamento de Engenharia de Estruturas da Universidade Federal de Minas Gerais.

Av. Antônio Carlos, 6627, Pampulha - Belo Horizonte, CEP 31270-901, Minas Gerais, Brasil

Renata Gomes Lanna da Silva

Ricardo Hallal Fakury

rglanna.silva@gmail.com

fakury@dees.ufmg.br

Departamento de Engenharia de Estruturas da Universidade Federal de Minas Gerais.

Av. Antônio Carlos, 6627, Pampulha - Belo Horizonte, CEP 31270-901, Minas Gerais, Brasil

Resumo. Este trabalho tem por objetivo apresentar uma formulação geral, via método dos elementos finitos, visando à realização de uma análise avançada de estruturas de cabos através das implementações das aproximações do cabo parábola e do cabo catenária. Para isso, foi feito o estudo de uma formulação geometricamente exata considerando-se as não linearidades, geométrica e do material. Dessa forma, apresenta-se uma formulação numérica tridimensional para a análise estática de estruturas de cabos através de um desenvolvimento teórico dentro de uma rigorosa formulação Lagrangiana atualizada, que utiliza a técnica corrotacional para a dedução consistente da matriz de rigidez tangente do elemento de cabo exato. Essa teoria é apresentada, definindo-se as tensões e deformações conjugadas e objetivas; os sistemas de coordenadas global e local, o campo de deformações, o equilíbrio do elemento e o equilíbrio estrutural, utilizando a teoria de Bernoulli-Euler. Finalmente, apresentam-se exemplos da literatura onde os resultados obtidos pelo programa desenvolvido são comparados com resultados obtidos por outros autores e programas comerciais, visando demonstrar a consistência e precisão da formulação.

Palavra-chave: Análise avançada, Formulação geometricamente exata, Estruturas de cabos, Cabo parábola, Cabo Catenária.

1 INTRODUÇÃO

Cabos são elementos estruturais que apresentam comportamento geométrico altamente não linear, extremamente flexíveis e capazes de resistir a forças normais de tração. Teoricamente, considera-se que as forças normais de compressão, as forças cortantes, os momentos fletores e os momentos de torção não são resistidos por um cabo ideal.

A análise de estruturas formadas por cabos envolve não apenas o desenvolvimento consistente das relações não lineares entre forças e deslocamentos, mas também a difícil tarefa de se obter a configuração geométrica inicial dessas estruturas.

Este trabalho tem por objetivo apresentar uma formulação geral, via método dos elementos finitos, visando à análise avançada de estruturas de cabos espaciais considerando as não linearidades, geométrica e material, a obtenção da sua configuração inicial através do cabo parábola e do cabo catenária e sua implementação computacional.

2 FORMULAÇÃO ANALÍTICA DO SISTEMA DE CABOS

Numa formulação analítica para o estudo de estruturas formadas por cabos, admitem-se as hipóteses em que o cabo seja perfeitamente flexível e inextensível. Por ser flexível, o cabo não oferece resistência à flexão e, portanto, a força normal de tração atuante será sempre tangente à sua geometria nos pontos ao longo de seu comprimento. Por ser inextensível, o cabo tem o mesmo comprimento antes e depois da aplicação da carga. Dessa forma, uma vez aplicadas as ações externas, a geometria deformada permanece fixa e o cabo ou cada segmento do cabo pode ser tratado como corpo rígido.

As formas assumidas pelo cabo dependem do carregamento atuante, podendo ser através de cargas concentradas, cargas uniformemente distribuídas ao longo do vão do cabo e carga uniformemente distribuída ao longo do comprimento do cabo (peso próprio), sendo que nestas duas últimas situações tem-se as configurações iniciais de equilíbrio parabólica e catenária, respectivamente.

Baseando-se em Barbato (1972), Irvine (1975) e (1981), Süsskind (1987), Leonard (1988), Pereira Júnior (2002), Beer *et al.* (2006) e Hibbeler (2011) e considerando-se as hipóteses citadas, será apresentado a seguir um estudo analítico dos cabos suspensos, visando a implementação computacional para obtenção da sua configuração inicial de equilíbrio, quando submetido ao carregamento uniformemente distribuído ao longo do seu comprimento, denominado de cabo catenária.

2.1 Cabo catenária

A Figura 1 ilustra um cabo fixado em dois pontos A e B , submetido ao carregamento de peso próprio, $p(x)$, cujo vão é identificado por L ; x_v é a distância do ponto A ao vértice da curva do cabo; θ_A é a inclinação do cabo no ponto A ; f_v é a flecha máxima no vértice da curva; θ_B é a inclinação do cabo no ponto B e h o desnível entre os pontos de fixação do cabo.

Através de um elemento infinitesimal do cabo com comprimento, ds_0 , mostrado na Fig. 1, utilizando-se as equações de equilíbrio, integrando-as e aplicando as condições de contorno da estrutura, encontram-se a equação da tangente à curva do cabo (Eq. (1)) e as Eqs. (2) e (3) que definem a configuração de equilíbrio inicial do cabo catenária.

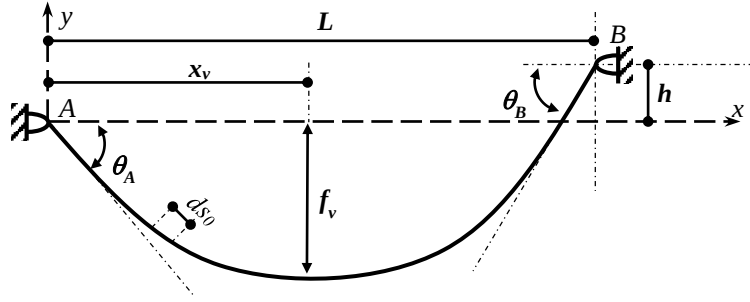


Figura 1. Configuração inicial do cabo sujeito ao peso próprio

$$y' = \sinh \left\{ -\frac{p}{H_0} x + \sinh^{-1}[\tan(\theta_A)] \right\} \quad (1)$$

$$y = -\frac{H_0}{p} \left\{ \cosh \left\{ -\frac{p}{H_0} x + \sinh^{-1}[\tan(\theta_A)] \right\} - \cosh\{\sinh^{-1}[\tan(\theta_A)]\} \right\} \quad (2)$$

$$y = -\frac{H_0}{p} \left\{ \cosh \left\{ -\frac{p}{H_0} x + \sinh^{-1}[\tan(\theta_A)] \right\} - \cosh\{\sinh^{-1}[\tan(\theta_A)]\} \right\} + h \quad (3)$$

Tendo em vista a Fig. 1, na Eq. (2) considera-se $h = 0$ no apoio A e $h \neq 0$ no apoio B e na Eq. (3) $h \neq 0$ no apoio A e $h = 0$ no apoio B.

Nas situações práticas desses problemas são conhecidos alguns valores das variáveis envolvidas nas Eqs. (1), (2) e (3), como por exemplo, o peso próprio (p), o vão (L) e o desnível (h). Dessa maneira, tem-se que determinar as variáveis incógnitas que são a força horizontal (H_0) e a tangente do ângulo θ_A .

Conhecido o ângulo θ_A é necessário determinar a força horizontal (H_0), que é dada pelas seguintes expressões:

$$h = -\frac{H_0}{p} \left\{ \cosh \left\{ -\frac{pL}{H_0} + \sinh^{-1}[\tan(\theta_A)] \right\} - \cosh\{\sinh^{-1}[\tan(\theta_A)]\} \right\} \quad (4)$$

$$h = \frac{H_0}{p} \left\{ \cosh \left\{ -\frac{pL}{H_0} + \sinh^{-1}[\tan(\theta_A)] \right\} - \cosh\{\sinh^{-1}[\tan(\theta_A)]\} \right\} \quad (5)$$

onde considera-se na Eq. (4) $h = 0$ no apoio A e $h \neq 0$ no apoio B, e na Eq. (5) $h \neq 0$ no apoio A e $h = 0$ no apoio B, sendo que a força horizontal (H_0) é determinada por tentativas.

Determinada a força horizontal (H_0) utilizam-se as Eqs. (1), (2) e (3) para se obter a configuração de equilíbrio do cabo catenária.

O comprimento do cabo (S_0) pode ser calculado por:

$$S_0 = -\frac{H_0}{p} \left\{ \sinh \left\{ -\frac{pL}{H_0} + \sinh^{-1}[\tan(\theta_A)] \right\} + \sinh\{\sinh^{-1}[\tan(\theta_A)]\} \right\} \quad (6)$$

A força de tração no cabo (T), que varia continuamente em intensidade e direção ao longo da sua extensão, é dada por:

$$T = H_0 \cosh \left\{ -\frac{p}{H_0} x + \sinh^{-1}[\tan(\theta_A)] \right\} \quad (7)$$

Não se conhecendo o ângulo θ_A , mas conhecidas a abscissa do vértice (x_v) ou a flecha do vértice (f_v) pode-se obter a tangente do ângulo θ_A através das seguintes equações:

$$\tan(\theta_A) = \sinh\left(\frac{p}{H_0} x_v\right) \quad (8)$$

$$\tan(\theta_A) = \frac{p}{H_0} \left(\sqrt{f_v^2 + \frac{2H_0}{p} f_v} \right) \quad (9)$$

$$\tan(\theta_A) = \frac{p}{H_0} \left(\sqrt{(f_v - h)^2 + \frac{2H_0}{p} (f_v - h)} \right) \quad (10)$$

onde consideram-se, nas Eqs. (8) e (9) $h = 0$ no apoio A e $h \neq 0$ o apoio B, e nas Eqs. (8) e (10) $h \neq 0$ no apoio A e $h = 0$ no apoio B.

Determinando-se o ângulo θ_A , pode-se calcular a força horizontal (H_0) por tentativas a partir das Eqs. (4) e (5) e, conseqüentemente, obter a configuração de equilíbrio do cabo pelas Eqs. (2) e (3), o comprimento do cabo (S_0) pela Eq. (6) e a força de tração (T) ao longo do cabo utilizando a Eq. (7).

Se a estrutura de cabo tiver seus apoios A e B nivelados, tem-se $h = 0$, onde se obtém a força horizontal H_0 por:

$$H_0 = \frac{pL^2}{2 \sinh^{-1}[\tan(\theta_A)]} \quad (11)$$

3 FORMULAÇÃO NUMÉRICA DO SISTEMA DE CABOS

A teoria é desenvolvida através de uma rigorosa formulação Lagrangiana atualizada que utiliza a técnica corrotacional para a dedução consistente das matrizes de rigidez dos elementos de cabo espacial. A formulação, baseada em Lavall (1996) tem como objetivo ser a mais geral possível, permitindo que os nós sofram grandes deslocamentos e os elementos de cabos sofram grandes alongamentos e, além disto, que esses elementos possam ser constituídos de material elastoplástico e considerar tanto o comportamento não linear geométrico (NLG) quanto não linear material (NLM).

3.1 Deformações e tensões

Para uma análise teórica consistente em mecânica dos sólidos e estruturas, as medidas de tensões e deformações devem ser conjugadas e objetivas, segundo Bathe (1982, 1996) e Pai e Nayfeh (1994). Neste trabalho são adotadas as deformações de engenharia que são conjugadas com as tensões de engenharia ou nominal formando-se um par conjugado. Adotando-se um sistema local de coordenadas corrotacionais no desenvolvimento da formulação, pode-se garantir que as tensões e deformações de engenharia são, também, pares de medidas objetivas. Dessa forma, essas medidas de tensões e deformações são utilizadas, sendo designadas por:

$$\sigma_N = \frac{N}{A_r} \quad (12)$$

$$\varepsilon = \frac{l_c - l_r}{l_r} \quad (13)$$

onde N é a força normal, A_r é a área da seção transversal da fibra e l_r é o comprimento do elemento na configuração de referência, l_c é o comprimento do elemento na configuração corrigida.

3.2 Sistema de coordenadas e graus de liberdade

O desenvolvimento teórico é baseado em uma formulação Lagrangiana, onde o sistema de referência global adotado é o sistema de coordenadas cartesiano (X, Y, Z). O sistema local é o sistema de coordenadas corrotacional (x, y, z) diferente do sistema global de referência. Esse sistema está ligado ao elemento, no qual os deslocamentos generalizados são medidos em relação a uma configuração deformada. Trata-se, portanto, de um sistema de referência móvel que acompanha a estrutura deformada, conforme a Fig. 2.

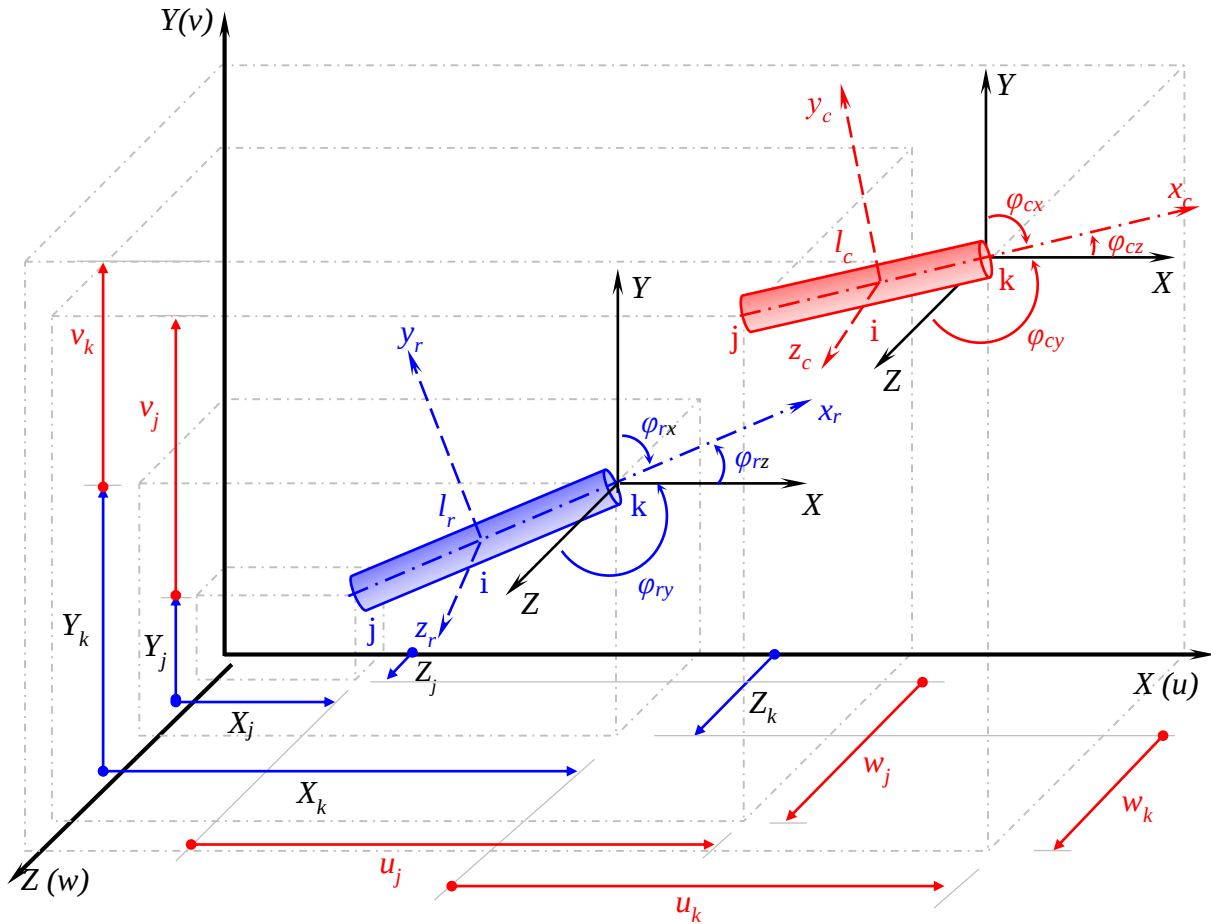


Figura 2. Elemento de cabo nas configurações de referência e corrigidas

As coordenadas corrotacional (x_r, y_r, z_r) têm origem no centro do elemento, os ângulos ϕ_{rx} , ϕ_{ry} e ϕ_{rz} são formados entre eixos os globais (X, Y, Z) e o eixo do elemento, respectivamente. Após qualquer carregamento o elemento passa para uma nova posição contendo coordenadas corrotacional corrigidas (x_c, y_c, z_c), formando-se novos ângulos ϕ_{cx} , ϕ_{cy} e ϕ_{cz} entre os eixos de referência global e o eixo do elemento de cabo.

Um elemento de cabo apresenta somente deslocamento ao longo do seu próprio eixo, assim o grau de liberdade natural ou corrotacional (q_a) pode ser definido por:

$$q_1 = l_c - l_r \quad (14)$$

Os graus de liberdade cartesianos p_n ($n = 1$ a 6) podem ser definidos pelo vetor de deslocamentos nodais do elemento de extremidade j e k , dado por:

$$\mathbf{p}_n^T = \{u_j \quad v_j \quad w_j \quad u_k \quad v_k \quad w_k\} \quad (15)$$

Derivando-se as coordenadas locais corrotacionais, $\mathbf{q}_\alpha$, em relação às coordenadas globais cartesianas, $\mathbf{p}_n$, obtém-se a matriz $\mathbf{B}_{1 \times 6}$, ou seja, $\partial \mathbf{q}_\alpha / \partial \mathbf{p}_n$, que pode ser escrita também na forma indicial por $\mathbf{q}_{\alpha,n}$.

$$\mathbf{B} = \mathbf{q}_{\alpha,n} = [-\cos \varphi_{cz} \quad -\cos \varphi_{cx} \quad -\cos \varphi_{cy} \quad \cos \varphi_{cz} \quad \cos \varphi_{cx} \quad \cos \varphi_{cy}] \quad (16)$$

onde $\mathbf{B}$ é uma matriz de mudança de coordenadas que relaciona as taxas de deslocamentos nas coordenadas locais corrotacionais com as taxas de deslocamentos nas coordenadas globais cartesianas.

Derivadas de segunda ordem de $\mathbf{q}_\alpha$ em relação a $\mathbf{p}_n$, ou seja, $\partial^2 \mathbf{q}_\alpha / \partial \mathbf{p}_n \partial \mathbf{p}_m$, ($\alpha = 1$, $n = m = 1$ a 6) ou $\mathbf{q}_{\alpha,nm}$, são também necessárias e podem ser reunidas em uma matriz simétrica $\mathbf{G}_{\alpha(6 \times 6)}$, dada por:

$$\mathbf{G}_\alpha = \frac{1}{l_c} \begin{bmatrix} \sin^2 \varphi_{cz} & -\cos \varphi_{cz} \cos \varphi_{cx} & -\cos \varphi_{cz} \cos \varphi_{cy} & -\sin^2 \varphi_{cz} & \cos \varphi_{cz} \cos \varphi_{cx} & \cos \varphi_{cz} \cos \varphi_{cy} \\ & \sin^2 \varphi_{cx} & -\cos \varphi_{cx} \cos \varphi_{cy} & \cos \varphi_{cz} \cos \varphi_{cx} & -\sin^2 \varphi_{cx} & \cos \varphi_{cx} \cos \varphi_{cy} \\ & & \sin^2 \varphi_{cy} & \cos \varphi_{cz} \cos \varphi_{cy} & \cos \varphi_{cx} \cos \varphi_{cy} & -\sin^2 \varphi_{cy} \\ & & & \sin^2 \varphi_{cz} & -\cos \varphi_{cz} \cos \varphi_{cx} & -\cos \varphi_{cz} \cos \varphi_{cy} \\ & & & & \sin^2 \varphi_{cx} & -\cos \varphi_{cx} \cos \varphi_{cy} \\ & & & & & \sin^2 \varphi_{cy} \end{bmatrix} \quad (17)$$

SIMÉTRICA

3.3 Equilíbrio do elemento

A teoria estrutural utilizada neste trabalho parte da hipótese cinemática atribuída a Bernoulli-Euler, onde se afirma que as seções transversais planas e ortogonais ao eixo da barra permanecem planas, indeformáveis e ortogonais ao eixo, após a deformação.

A partir do Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV), o trabalho virtual interno de um elemento resulta em:

$$\delta w_{int} = \int_{V_r} \sigma \delta \varepsilon dV_r \quad (18)$$

Conhecendo-se o campo de deformação descrito por:

$$\varepsilon = f[q_\alpha(p_n)] \quad (19)$$

Encontra-se a equação de equilíbrio do elemento que, escrita em forma matricial, dada por:

$$\mathbf{P} = \mathbf{B}^T \mathbf{Q} \quad (20)$$

onde $\mathbf{P}$ são as forças nodais internas e $\mathbf{Q}$ são os esforços internos nas coordenadas corrotacionais.

3.4 Matriz de rigidez tangente do elemento

Através de uma formulação incremental de equilíbrio, onde $P = P(\sigma, p)$, a derivada no tempo de P pode ser dada por:

$$\frac{dP}{dt} = \frac{\partial P}{\partial p} \frac{dp}{dt} \quad (21)$$

A matriz de rigidez tangente do elemento, $\mathbf{k}_t$, nas coordenadas cartesianas, definida pela derivada dos esforços nodais internos P_n em relação aos deslocamentos nodais do elemento p_m , é dada por:

$$\mathbf{k}_t = \frac{\partial P_n}{\partial p_m} \quad (22)$$

A Eq. (21) pode ser escrita em notação matricial, como:

$$\dot{\mathbf{P}} = \mathbf{k}_t \dot{\mathbf{p}} \quad (23)$$

Realizando as devidas operações matemáticas obtém-se a matriz de rigidez tangente do elemento dada pela seguinte expressão:

$$k_{nm} = q_{\alpha,n} D_{\alpha\beta} q_{\beta,m} + q_{\alpha,n} H_{\alpha\beta} q_{\beta,m} + Q_\alpha q_{\alpha,nm} \quad (24)$$

A forma matricial da Eq. (24) é dada por:

$$\mathbf{k}_t = \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} + \mathbf{B}^T \mathbf{H} \mathbf{B} + Q_\alpha \mathbf{G}_\alpha \quad (25)$$

sendo,

$$\mathbf{k}_M = \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \quad (26)$$

$$\mathbf{k}_G = \mathbf{B}^T \mathbf{H} \mathbf{B} + Q_\alpha \mathbf{G}_\alpha \quad (27)$$

onde $\mathbf{k}_M$ é a matriz de rigidez constitutiva ou do material e $\mathbf{k}_G$ matriz de rigidez geométrica.

3.5 Equilíbrio estrutural

Os graus de liberdade cartesianos locais $\mathbf{p}$ de um elemento são relacionados com os graus de liberdade globais $\mathbf{r}$ da estrutura, através da matriz de incidência cinemática, $\mathbf{A}$, responsável pela compatibilidade dos deslocamentos nodais dos elementos $\mathbf{p}$ com os deslocamentos nodais da estrutura $\mathbf{r}$, conforme a expressão matricial:

$$\mathbf{p} = \mathbf{A} \mathbf{r} \quad (28)$$

O trabalho virtual interno da estrutura é dado pelo somatório dos trabalhos virtuais internos dos seus elementos. Dessa maneira, com o auxílio da Eq. (28) tem-se:

$$\delta W_{int} = \mathbf{S}^T \delta \mathbf{r} \quad (29)$$

onde $\mathbf{S}$ é o vetor dos esforços internos da estrutura, obtido somando-se a contribuição de todos os elementos.

O trabalho virtual externo, supondo-se somente forças externas concentradas aplicadas nos nós da estrutura, representadas pelo vetor $\mathbf{R}$, é dado por:

$$\delta W_{ext} = \mathbf{R}^T \delta \mathbf{r} \quad (30)$$

Igualando o trabalho virtual interno, Eq. (29), ao trabalho virtual externo, Eq. (30), pelo PTV, resulta na equação de equilíbrio da estrutura dada por:

$$\mathbf{R} = \mathbf{S} \quad (31)$$

3.6 Equilíbrio incremental da estrutura

As equações incrementais do equilíbrio da estrutura são obtidas ao se derivar a Eq. (31) no tempo, portanto, tem-se:

$$\dot{\mathbf{S}} = \mathbf{K}_t \dot{\mathbf{r}} \quad (32)$$

onde $\mathbf{K}_t$ é a matriz de rigidez tangente da estrutura, obtida pela contribuição das matrizes de rigidez de cada elemento ($\mathbf{k}_t$), através da matriz de incidência cinemática ($\mathbf{A}$).

$$\mathbf{K}_t = \sum \mathbf{A}^T \mathbf{k}_t \mathbf{A} \quad (33)$$

Dessa maneira, a equação do equilíbrio incremental da estrutura, pode ser escrita da seguinte forma, com o auxílio da Eq. (32):

$$\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{K}_t \dot{\mathbf{r}} \quad (34)$$

Dessa forma, tem-se:

$$\dot{\mathbf{R}} = \dot{\mathbf{S}} \quad (35)$$

4 ASPECTOS DA IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL

O programa desenvolvido em Costa (2014) é escrito na linguagem *FORTRAN 90* utilizando a plataforma *Microsoft Visual Studio 2008*. Este programa, nomeado **Advanced STRuctural Analysis System (ASTRAS)**, amplia o programa PPLANLEP desenvolvido por Lavall (1996), Ferreira (1999), Almeida (2006), Araújo (2010) e Silva (2010). O ASTRAS permite realizar análises não lineares, material e geométrica de estruturas como pórticos, treliça e cabos planos e espaciais, além de estruturas conjugadas como torre estaiadas planas e espaciais.

Visando a solução de problemas não lineares de estruturas, foi utilizado o Método de Newton Raphson que considera incrementos de cargas com iterações de equilíbrio realizadas dentro de cada passo.

Um processo iterativo se encerra indicando uma nova posição de equilíbrio para a estrutura em análise, quando a solução numérica converge para uma tolerância adequada previamente estabelecida, ou seja, quando um determinado critério de convergência é atendido. Neste trabalho foram implementados os critérios de convergência em deslocamento e forças, simultaneamente, podendo também verificar a convergência somente no deslocamento ou na força, sendo o fator de tolerância igual a 0,1%.

4.1 Implementação da configuração inicial de equilíbrio do cabo

Para geração dos nós e elementos das estruturas de cabos é necessária a implementação da configuração inicial de equilíbrio do cabo. No programa desenvolvido, o ASTRAS, foram implementadas as configurações iniciais de equilíbrio do cabo sujeito a carga uniformemente distribuída (cabo parábola) e do cabo sujeito ao peso próprio (cabo catenária). Para atingir o objetivo deste estudo será demonstrada a implementação do cabo catenária.

A configuração inicial de equilíbrio do cabo é dada pelas Eqs. (2) e (3), que depende do cálculo da força horizontal, H_0 , para geração dos nós e elementos da estrutura. No estudo desenvolvido no item 2.1, a força horizontal (H_0) do cabo catenária é obtida somente por

tentativas pelas Eqs. (4) e (5). Dessa forma, utiliza-se o método incremental-iterativo de Newton-Raphson para a determinação da força horizontal (H_0) através do algoritmo dado por:

$$H_0^i = H_0^{i-1} - \frac{f(H_0^i)}{f'(H_0^i)} \quad (36)$$

onde H_0^i é a aproximação da força horizontal da curva da catenária na iteração corrente, H_0^{i-1} é a aproximação da força horizontal na iteração anterior, $f(H_0^i)$ é a função resíduo da força horizontal da catenária e $f'(H_0^i)$ a sua derivada. A convergência ocorre quando o fator de tolerância for menor que $1,0 \times 10^{-10}$.

Então, conhecidos o desnível (h) e o ângulo (θ_A) utilizam-se as Eqs. (4) ou (5), para se obter o valor de H_0 e a configuração inicial do cabo catenária. Quando se conhecem o desnível (h) e a distância do vértice (x_v) ou a flecha do vértice (f_v), é necessário calcular primeiramente o ângulo (θ_A) pela Eq. (8) para o caso que se tenha x_v e pelas Eqs. (9) ou (10) para o caso que se tenha f_v . Com esses valores e com a força horizontal (H_0) obtém-se a configuração inicial do cabo catenária pelas Eqs. (2) ou (3).

5 APLICAÇÕES EM EXEMPLOS NUMÉRICOS

Nessa seção serão apresentados dois exemplos numéricos com objetivo demonstrar a eficiência da formulação estudada bem como a precisão dos resultados obtidos pelo programa desenvolvido, quando comparados com resultados teóricos da literatura e de programas existentes.

5.1 Cabo suspenso sujeito ao peso próprio e à força concentrada

Este exemplo foi originalmente apresentado por Michalos e Birnstiel (1962) e analisado por O'Brien e Francis (1964), Saafan (1970), Jayaraman e Knudson (1981), Tibert (1999), Andreu *et al.* (2006), Yang and Tsay (2007), Thai e Kim (2011), Abad *et al.* (2013), além de se utilizar os programas SAP 2000 e ASTRAS (Costa, 2014), onde se procurou estudar o comportamento do cabo livremente suspenso, no plano xy , com o vão $L = 30.480$ cm, sob ação do peso próprio e de uma força concentrada $P = 35,586$ kN aplicada a $L_1 = 12.192$ cm do apoio A, conforme ilustra a Fig. 3.

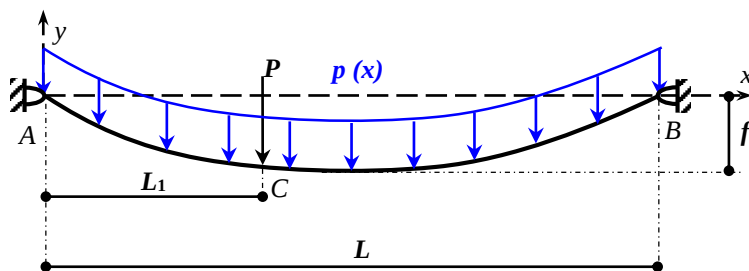


Figura 3. Cabo suspenso sujeito ao peso próprio e à força concentrada

O cabo apresenta uma seção transversal circular com uma área metálica $A = 5,4839$ cm², correspondendo a um diâmetro $d = 2,6424$ cm e módulo de elasticidade longitudinal $E = 131.000$ MPa. Dados uma flecha inicial $f = 3.048$ cm e o peso próprio $p(x) = 0,46117$ N/cm, as configurações iniciais de equilíbrio foram obtidas através das equações da catenária e da

parábola. O cabo AB foi dividido nos trechos AC e CB contendo 4 e 6 elementos, respectivamente, totalizando 10 elementos e 11 nós, cujo o peso próprio foi transformado em forças equivalentes concentradas nos nós.

A Tabela 1 apresenta os resultados dos deslocamentos horizontais (δ_{Cx}) e verticais (δ_{Cy}) do ponto C e os tipos de elementos utilizados nos trabalhos de Michalos e Birnstiel (1962), O'Brien e Francis (1964), Saafan (1970), Jayaraman e Knudson (1981), Tibert (1999), Andreu *et al* (2006), Yang e Tsay (2007), Thai e Kim (2011), Abad *et al* (2013) e pelos programas SAP 2000 e ASTRAS.

Observa-se na Tabela 1 uma excelente correlação entre os diversos resultados, podendo-se notar uma pequena diferença dependendo do tipo de elemento adotado para a estrutura de cabos. Verifica-se também que o conjunto de elementos do tipo de catenária mostram um comportamento mais flexível do que os tipos treliça e parabólico.

Tabela 1. Resultados dos deslocamentos horizontais (δ_{Cx}) e verticais (δ_{Cy}) do ponto C

Pesquisadores/ Programa	Tipo de Elemento	δ_{Cx} (cm)	δ_{Cy} (cm)
Michalos e Birnstiel (1962)	Treliça	-84,521	-547,207
O'Brien e Francis (1964)	Catenária	-85,954	-562,661
Saafan (1970)	Treliça	-84,552	-547,238
Jayaraman e Knudson (1981)	Treliça	-84,491	-547,146
Jayaraman e Knudson (1981)	Catenária	-85,923	-562,600
Tibert (1999)	Parábola	-86,624	-560,131
Tibert (1999)	Catenária	-85,923	-562,569
Andreu <i>et al</i> (2006)	Catenária	-86,000	-562,600
Yang e Tsay (2007)	Catenária	-85,900	-562,600
Thai e Kim (2011)	Catenária	-85,900	-562,600
Abad <i>et al</i> (2013)	Catenária	-85,500	-559,200
SAP 2000	Catenária	-86,000	-562,600
ASTRAS	Parábola	-85,776	-557,949
ASTRAS	Catenária	-85,984	-563,676

A Figura 4 apresenta a configuração inicial do cabo catenária com 10 elementos e a configuração final considerando os carregamentos devidos ao peso próprio e à força concentrada. Pode se observar nessa figura que, mesmo quando se considerou o peso próprio para geração da configuração inicial do cabo e em sua análise, o que definiu a configuração final do cabo foi o carregamento devido a força concentrada por ter um valor muito alto. Neste caso, os trechos AC e BC se tornaram elementos praticamente retos.

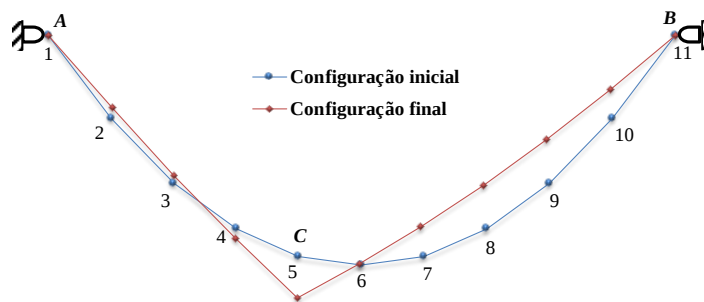


Figura 4. Configurações inicial e final do cabo após carga de peso próprio e força concentrada

5.2 Cabo suspenso desnivelado sujeito ao peso próprio e a forças concentradas

A estrutura de cabo suspenso de comprimento $L = 800$ cm, com o apoio A desnivelado, sendo a distância $d_A = 200$ cm, apresentada na Fig. 5, é solicitada por três forças verticais concentradas $P_C = 4$ kN, $P_D = 6$ kN e $P_E = 4$ kN, situadas a $L_1 = 200$ cm, $L_2 = 400$ cm e $L_3 = 600$ cm, do apoio A, respectivamente.

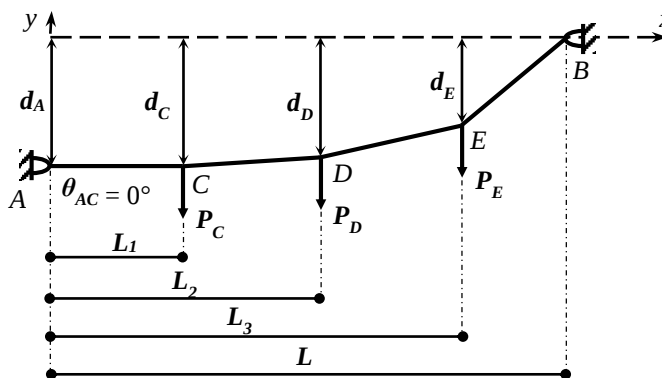


Figura 5. Cabo suspenso sujeito ao peso próprio e a forças concentradas

Utilizando-se os programas *SAP 2000* e *ASTRAS*, calculam-se as reações de apoio e as distâncias d_C , d_D e d_E , em relação ao eixo das abscissas, dos pontos de aplicação das forças concentradas, as forças de tração nos elementos de cabo, sabendo-se que $E = 200.000$ MPa e os elementos de cabos possuem áreas iguais a $5,0$ cm². Este exemplo foi retirado de Beer e Johnston (1980) e adaptado para realização desta análise.

Para se obter a configuração inicial da estrutura de cabo utilizou-se a equação da catenária considerando o peso específico do cabo igual a 77 kN/m³ e o ângulo $\theta_{AC} = 0^\circ$. Essa estrutura foi dividida em 24 elementos contendo um total de 25 nós, sendo que os trechos AC, CD, DE e EB têm 6 elementos de cabo cada, cujo o peso próprio foi transformado em carregamento equivalente concentrado nos nós.

A Tabela 2 apresenta os resultados das reações de apoio e das distâncias d_C , d_D e d_E nos pontos C, D e E em relação ao eixo das abscissas, respectivamente, obtidos pelos programas *SAP2000* e *ASTRAS*. Observa-se nesta tabela uma boa correlação entre os resultados numéricos dos programas.

Os resultados das forças de tração nos elementos de cabos obtidos pelos programas *SAP2000* e *ASTRAS* são mostrados na Tabela 3, onde se observa uma excelente correlação entre eles, com um erro relativo menor que $0,080\%$.

Tabela 2. Reações de apoio e distâncias dos pontos de aplicação das forças concentradas

Descrição	nomeclatura	SAP 2000 ^[a]	ASTRAS ^[b]	Erro relativo ([a]-[b])/[a] (%)
Reações de Apoio (kN)	$H_A (\leftarrow)$	36,640	36,669	-0,079
	$V_A (\downarrow)$	2,010	2,019	-0,452
	$H_B (\rightarrow)$	36,640	36,669	-0,079
	$V_B (\uparrow)$	16,330	16,340	-0,059
Distâncias (cm)	$d_C (\downarrow)$	186,667	188,763	-1,123
	$d_D (\downarrow)$	153,545	155,166	-1,056
	$d_E (\downarrow)$	88,028	88,903	-0,994

Tabela 3. Força de tração nos elementos de cabo

Elemento	SAP 2000 ^[a] T (kN)	ASTRAS ^[b] T (kN)	Erro relativo ([a]-[b])/[a](%)
1	36,697	36,725	-0,076
2	36,698	36,726	-0,075
3	36,699	36,726	-0,074
4	36,699	36,727	-0,076
5	36,700	36,728	-0,075
6	36,701	36,729	-0,075
7	37,145	37,173	-0,076
8	37,147	37,175	-0,076
9	37,149	37,178	-0,077
10	37,151	37,180	-0,077
11	37,153	37,182	-0,078
12	37,155	37,184	-0,078
13	38,610	38,639	-0,076
14	38,614	38,644	-0,076
15	38,618	38,648	-0,077
16	38,622	38,652	-0,077
17	38,627	38,656	-0,076
18	38,631	38,661	-0,076
19	40,083	40,113	-0,075
20	40,089	40,119	-0,074
21	40,094	40,125	-0,076
22	40,100	40,130	-0,075
23	40,106	40,136	-0,075
24	40,112	40,142	-0,074

6 CONCLUSÕES

O objetivo deste trabalho foi apresentar uma formulação teórica consistente e sua implementação computacional para a análise não linear geométrica, para estruturas de cabos suspensos com configuração inicial de catenária, através do método dos elementos finitos.

Na formulação do elemento finito, as equações de equilíbrio foram obtidas a partir do princípio dos trabalhos virtuais, considerando-se o equilíbrio do elemento na posição deslocada, tanto na fase elástica quanto na fase elastoplástica.

O método de resolução das equações não lineares, via método de Newton-Raphson, mostrou-se eficiente tanto nos casos de grandes deslocamentos quanto naqueles com grande número de incógnitas.

A adoção da equação da catenária para a definição da configuração inicial de equilíbrio da estrutura mostrou-se eficiente na geração da malha de elementos finitos e na determinação da força horizontal, do ângulo máximo e da força de tração máxima no cabo, a qual é responsável pela eliminação da hipostaticidade inicial deste tipo de estrutura.

O exemplo da seção 5.1, onde se procurou estudar o comportamento de um cabo plano suspenso sob ação do peso próprio e de uma força concentrada, foi apresentado porque trata-se de um exemplo clássico que foi analisado por diversos autores e pelo programa *SAP 2000*. Neste exemplo vários tipos de elementos foram considerados para representar o cabo (treliça, parábola ou catenária) e, mais uma vez, observou-se que o programa *ASTRAS* obteve uma excelente correlação entre os diversos resultados.

Também para o exemplo da seção 5.1, quando se observou as configurações inicial e final do cabo suspenso, ficou evidente o efeito das forças concentradas na configuração final, tornando os trechos *AC* e *CB* praticamente retos.

No exemplo de cabo suspenso sujeito ao peso próprio e forças concentradas com os apoios desnivelados que foi apresentado na seção 5.2, utilizou-se os programas *SAP 2000* e *ASTRAS*, para comparação dos resultados das reações de apoio, das distâncias nos pontos de aplicação das forças concentradas e das forças de tração em cada elemento de cabo. Observou-se uma ótima correlação entre todos os resultados numéricos dos programas, principalmente, os resultados das forças de tração em cada elemento, apresentando um erro relativo menor que 0,080%.

Finalmente, a aplicação do programa *ASTRAS* na análise das estruturas de cabos, confirma a validade e potencialidade da formulação desenvolvida e sua eficiência e aplicabilidade na solução de problemas em casos práticos.

AGRADECIMENTO

Os autores são gratos à CAPES – Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior, ao CNPq – Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico e à FAPEMIG - Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais pelo apoio recebido para a realização deste trabalho de pesquisa.

REFERÊNCIAS

- Abad, M. S. A.; Shooshtari, A.; Esmaeili, V.; Riabi, A. N. Nonlinear analysis of cable structures under general loadings. *Finite Elements in Analysis and Design*, v.73, p.11-19, 2013.
- Almeida, A. C. B., 2006. *Análise Inelástica de Pórticos Planos Considerando a Plasticidade Distribuída e o Efeito das Tensões Residuais nos Perfis Estruturais de Aço*. 165 p. Dissertação de Mestrado. Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia, Universidade Federal de Minas Gerais. Belo Horizonte.
- Andreu, A.; Gil, L.; Roca, P. A new deformable catenary element for the analysis of cable net structures. *Computers and Structures*, v. 84, p. 1882–1890, 2006.
- Araújo, R. E., 2010. *Estudo da Influência do Encruamento do Aço e das Tensões Residuais no Comportamento Inelástico de Pórticos Planos via Análise Avançada*. 121 p. Dissertação de Mestrado. Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia, Universidade Federal de Minas Gerais. Belo Horizonte.
- Barbato, R. L. A., 1972. *Sobre o Comportamento Estático dos Cabos de Coberturas Pênseis*. Dissertação de Mestrado. Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo. São Paulo.
- Bathe, K. J. *Finite element procedures in engineering analysis*. New Jersey, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, 1982.
- Beer, F.P.; Johnston, JR. E. R. *Mecânica Vetorial para Engenheiros*. Vol. I, 3ª ed. São Paulo. Mc-Graw-Hill do Brasil, 1980.
- Beer, F. P.; Johnston, E. R; Elliot R. E., 2006. *Mecânica Vetorial para Engenheiros - Estática*. 7ªed. Rio de Janeiro. Mac Graw-Hill Interamericana do Brasil.
- Costa, R. S., 2014. *Formulação para a Análise Avançada de Sistemas Estruturais Formados por Cabos e Treliças Espaciais Visando à Aplicação em Torres Estaiadas para Linhas de Transmissão*. Tese de Doutorado. Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte.
- Ferreira, R. P., 1999. *Uma Formulação Consistente para Análise Elastoplástica de Estruturas de Aço*. Dissertação de Mestrado. Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia, Universidade Federal de Minas Gerais. Belo Horizonte.
- Hibbeler, R. C., 2011. *Estática: Mecânica para Engenharia*. 12ª ed. São Paulo. Pearson Prentice Hall.
- Irvine, H. M., 1975. Statics of suspend cables. *Journal of the Engineering Mechanics Division*, v. 101, nº 3, pp. 187-205.
- Irvine, H. M., 1981. *Cable structures*. Cambridge Ma./London, The MIT Press.
- Jayaraman, H. B., Knudson, W. C. A curved element for analysis of cable structures. *Computers and Structures*, v. 14, nº. 3-4, p. 325-333, 1981.
- Lavall, A. C. C., 1996. *Uma Formulação Teórica Consistente para a Análise Não linear de Pórticos Planos pelo Método dos Elementos Finitos Considerando Barras com Imperfeições Iniciais e Tensões Residuais nas Seções Transversais*. Tese de Doutorado. Escola de Engenharia de São Carlos. Universidade de São Paulo.

- Leonard, J.W., 1988. *Tension Structures: behavior and analisys of cable structures*. New York. McGraw Hill.
- Michalos, J.; Birnstiel, C. Movements of a cable due to changes in loading. *ASCE Transactions*, v. 127, nº. 3368, p. 267-303, 1962.
- O'brien, W. T., Francis, A. J. Cable movements under two-dimensional loading, *Journal of Structural Division*, ASCE, v. 90, nº3, p. 89-124, 1964.
- Pai, P. F., Nayfeh, A. H. A new method for the modeling of geometric nonlinearities in structures. *Computer and Structures*, v. 53, n ° 4, p. 877-895, 1994.
- Pereira Júnior, E. J., 2002. *Uma Formulação Consistente para Análise Não-Linear de Estruturas de Cabos Suspensos*. Dissertação de Mestrado. Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte.
- Saafan S. A. Theoretical analysis of suspension roofs. *Journal of the Structural Division ASCE*; v. 96, nº2, p. 393-404, 1970.
- Silva, R. G. L., 2010. *Análise Inelástica Avançada de Pórticos Planos de Aço Considerando as Influências do Cisalhamento e de Ligações Semirrígidas*. Tese de Doutorado. p. 292. Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte.
- Süssekind, J. C., 1987. *Curso de analise estrutural*. 8°. ed. Rio de Janeiro: Globo.
- Tibert, G. *Numerical analyses of cable roof structures*. Doctoral Thesis. Royal Institute of Technology, Department of Structural Engineering, SE- 100 44 Stockholm, Sweden, 1999.
- Thai, H-T.; Kim, S-E. Nonlinear inelastic time-history analysis of truss structures. *Journal of Constructional Steel Research*, v. 67, nº 12, p. 1966-1972, 2011.
- Yang, Y. B.; Tsay, J. Y. Geometric nonlinear analysis of cable structures with a two-node cable element by generalized displacement control method. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, v. 7, nº 4, p. 571-588, 2007.