



SÍNTESE DE MECANISMOS FLEXÍVEIS COM RESTRIÇÃO EM TENSÃO UTILIZANDO O CONCEITO DE DERIVADA TOPOLÓGICA

Cinthia Gomes Lopes

Antonio André Novotny

cinthia@lncc.br

novotny@lncc.br

Laboratório Nacional de Computação Científica - LNCC

Avenida Getúlio Vargas, 333, 25652-075, Petrópolis, RJ, Brasil

Abstract. *Um mecanismo flexível é uma estrutura mecânica composta por apenas uma peça capaz de transformar uma dada força de entrada em um movimento de saída, ampliando e modificando sua direção de acordo com a resposta desejada. Devido à facilidade de produção em escalas milimétricas, o design deste tipo de mecanismo tem sido utilizado em diferentes aplicações em micro ou até mesmo nanoescala, tais como microcirurgia, manipulação de células e circuitos microeletrônicos. Uma abordagem clássica para esse problema utilizando otimização topológica consiste na maximização do deslocamento de saída, em uma direção preestabelecida, para uma força de entrada dada. No entanto, essa formulação tende a produzir mecanismos com juntas extremamente flexíveis, em que as tensões em geral ultrapassam o limite de resistência do material. Sendo assim, nesse trabalho é proposta uma nova formulação utilizando o conceito de derivada topológica que consiste em introduzir uma restrição de falha local baseada na tensão de von Mises ao problema, o que alivia o surgimento das tais juntas flexíveis, conduzindo a mecanismos que atendem simultaneamente aos critérios de resistência mecânica e funcionalidade.*

Keywords: *Otimização Topológica; Mecanismos Flexíveis; von Mises; Derivada Topológica*

1 INTRODUÇÃO

Mecanismos são dispositivos mecânicos capazes de transformar ou transferir uma dada força, deslocamento ou energia de entrada em um movimento de saída, ampliando e modificando sua direção de acordo com a resposta desejada. De um modo geral, os mecanismos rígidos tradicionais são formados por um conjunto de partes rígidas conectadas por pinos ou juntas móveis que permitem o movimento de corpo rígido. Por sua vez, os mecanismos flexíveis são formados por uma única peça e são capazes de realizar o movimento desejado a partir da própria flexibilidade de seus membros. Logo, são fáceis de serem fabricados e miniaturizados, sendo menos suscetíveis a desgaste, atrito e folga, além de não necessitarem de lubrificação.

Embora o conceito de mecanismo flexível não seja novo (Burns and Crossley (1964)) este tipo de estrutura elástica tem recebido bastante atenção nos últimos anos devido à facilidade de fabricação em escalas cada vez menores, à introdução de materiais com propriedades superiores e ao rápido desenvolvimento dos sistemas microeletromecânicos (MEMS). Além disso, de um modo geral, os mecanismos flexíveis são capazes de exercer movimentos precisos, o que os tornam aplicáveis em diferentes áreas: medicina, em microcirurgias; biologia, na manipulação de células; indústrias espacial e eletrônica, no desenvolvimento de sensores; dentre outras.

Assim como vantagens, existem dificuldades e desafios na síntese de mecanismos flexíveis. Um mecanismo flexível precisa ser elástico o suficiente para exercer o movimento desejado e ao mesmo tempo resistente o suficiente para suportar os carregamentos aplicados. Além destes objetivos conflitantes, existe uma tendência de formação de articulações ou rótulas no mecanismo resultante. Estas articulações tornam o mecanismo flexível análogo ao mecanismo rígido, devido à deformação que é principalmente concentrada em torno das articulações, onde o mecanismo é propenso à concentração de tensão e ruptura por fadiga (Luo et al. (2008), Sigmund (1997)). Neste sentido, obter um mecanismo flexível ótimo sem a presença de juntas tem sido uma tarefa desafiadora e um potencial objeto de aplicação dos métodos de otimização topológica.

A otimização topológica é um campo de pesquisa que vem sendo aplicado com sucesso em diferentes problemas da engenharia com o auxílio das técnicas e análise de elementos finitos (o leitor interessado pode consultar os trabalhos de Eschenauer and Olhoff (2001) e Sigmund and Maute (2013) para uma visão geral dos métodos de otimização topológica). Na otimização topológica, uma determinada quantidade de material é distribuída em um domínio inicial, sujeito a certas restrições e condições de contorno, via um processo numérico iterativo até que uma função custo preestabelecida seja otimizada. Uma abordagem relativamente nova para este tipo de problema é baseada no conceito de derivada topológica (Sokołowski and Zochowski, 1999). A derivada topológica é um campo escalar que mede a sensibilidade de um funcional de forma quando o domínio sobre o qual ele está definido é submetido a uma perturbação infinitesimal, seja ela singular, como a inserção de furos, ou regular, como a inclusão de termos fonte. Tal ferramenta tem sido aplicada em diversos contextos como: problemas inversos (Amstutz et al., 2005), processamento de imagem (Hintermüller, 2005), otimização topológica (Amstutz et al. (2012)), modelagem constitutiva multiescala (Amstutz et al. (2010); Novotny et al. (2010)), análise de sensibilidade a fratura mecânica (Van Goethem and Novotny, 2010) e modelagem de evolução de dano (Allaire et al., 2011). Em relação ao desenvolvimento teórico da análise assintótica topológica pode-se citar os trabalhos de Amstutz (2006, 2010) e Novotny and Sokołowski (2013). No presente trabalho, a derivada topológica é aplicada no contexto de

otimização topológica de mecanismos flexíveis com restrição em tensão.

A maioria do desenvolvimento da otimização topológica está concentrada no problema de complacência, embora a tensão seja uma das considerações mais importantes. E no contexto de mecanismos flexíveis não é diferente. Segundo Le et al. (2010), isto provavelmente ocorre por que existem desafios nos problemas de otimização baseados em tensão que precisam ser superados tais como a natureza local da restrição e seu comportamento não linear. Uma abordagem clássica para a otimização topológica de mecanismos flexíveis consiste na maximização do deslocamento de saída, em uma direção preestabelecida, para uma força de entrada dada. Outra abordagem consiste em maximizar a chamada vantagem mecânica, que é o resultado da divisão da força de saída pela força de entrada, sujeita a restrições nos deslocamentos de entrada e saída. No entanto, estas formulações tendem a produzir mecanismos com juntas extremamente flexíveis, em que as tensões em geral ultrapassam o limite de resistência do material. Por conta disto uma série de pesquisas foram desenvolvidas, em sua maioria no contexto do método SIMP (*Solid Isotropic Material with Penalization*) para eliminar o surgimento de tais juntas (Lenz and Fonseca, 2004; Luo et al., 2008; Meneghelli and Cardoso, 2013).

Sendo assim, neste trabalho propõe-se uma nova abordagem para o problema de otimização topológica de mecanismos flexíveis baseada no conceito de derivada topológica que consiste em introduzir uma restrição na tensão de von Mises ao problema. Com isto, é possível eliminar o surgimento de juntas extremamente flexíveis, conduzindo a mecanismos que atendam simultaneamente aos critérios de resistência e funcionalidade. Para tanto, serão utilizados o algoritmo de otimização topológica proposto por Amstutz and Andrä (2006) e uma abordagem diferente para a restrição em tensão proposta por Amstutz and Novotny (2010).

O presente trabalho está organizado da seguinte forma: a Seção 2 apresenta a formulação do problema; a Seção 3 apresenta a fórmula analítica para a derivada topológica do problema em questão; a Seção 4 descreve resumidamente o algoritmo utilizado; a Seção 5 apresenta alguns exemplos numéricos e por fim a Seção 6 apresenta as considerações finais.

2 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

Deseja-se encontrar a topologia ótima de um mecanismo flexível com restrição em tensão de von Mises - sob as hipóteses da Elasticidade Linear. Então, o correspondente problema de otimização é matematicamente apresentado a seguir.

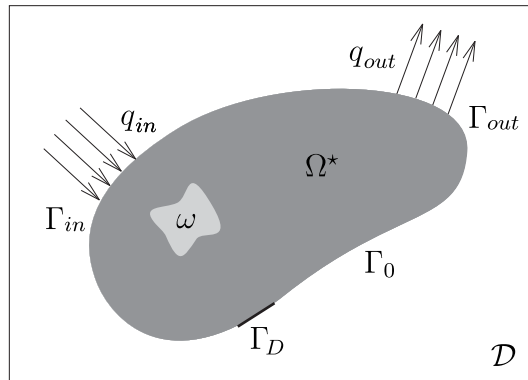


Figura 1: Representação do domínio.

Considere um domínio aberto e limitado $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ e um subdomínio $\Omega \subset \mathcal{D}$ com fronteira Lipschitz Γ , veja a Fig. 1. A fronteira Γ é dividida em dois conjuntos disjuntos $\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N$, onde $\Gamma_N = \Gamma_{in} \cup \Gamma_{out} \cup \Gamma_0$ são subconjuntos disjuntos de Γ_N . As trações de entrada, saída e nulas são prescritas em Γ_N enquanto os deslocamentos são prescritos em Γ_D . Então, dado o domínio $\mathcal{D}$ e um subdomínio Ω^* , o problema de otimização consiste em encontrar um subdomínio $\Omega \subset \mathcal{D}$, $\Omega = \Omega^* \cup \omega \subset \mathcal{D}$ com ω usado para denotar a parte de Ω onde não há restrição em tensão, que satisfaz o seguinte problema de minimização:

$$\underset{\Omega \subset \mathcal{D}}{\text{Minimizar}} \mathcal{F}_\Omega(u) \quad (1)$$

sujeito a uma restrição do von Mises no tensor tensão σ :

$$\sigma_M(u) \leq \bar{\sigma} \quad \text{a.e. in } \Omega^* \subset \Omega \quad (2)$$

com u solução do problema variacional: Encontrar $u \in \mathcal{U}$, tal que

$$\int_{\mathcal{D}} \sigma(u) \cdot \varepsilon(\eta) = \int_{\Gamma_{in}} q_{in} \cdot \eta + \int_{\Gamma_{out}} q_{out} \cdot \eta \quad \forall \eta \in \mathcal{U}, \quad (3)$$

sendo $\mathcal{U}$ o espaço definido por

$$\mathcal{U} := \{\varphi \in H^1(\mathcal{D}; \mathbb{R}^2) : \varphi|_{\Gamma_D} = 0\}. \quad (4)$$

O funcional objetivo $\mathcal{F}_\Omega$ é dado por

$$\mathcal{F}_\Omega(u) := \beta|\Omega| + \mathcal{J}(u) \quad (5)$$

onde $\beta = \beta^* \setminus |\mathcal{D}|$, $|\cdot|$ é a medida de Lebesgue, e $\mathcal{J}$ é escrito como (Amstutz and Andrä, 2006; Lopes et al., 2014)

$$\mathcal{J}(u) = \int_{\Gamma_{in}} q_{in} \cdot u + \kappa \int_{\Gamma_{out}} q_{out} \cdot u, \quad (6)$$

com $\kappa > 0$ um coeficiente de penalização. A tensão de von Misses σ_M é dada por

$$\sigma_M(u) := \sqrt{\frac{1}{2} \mathbb{B} \sigma(u) \cdot \sigma(u)} \quad (7)$$

onde

$$\mathbb{B} = 3\mathbb{I} - \mathbf{I} \otimes \mathbf{I}. \quad (8)$$

O tensor tensão Cauchy $\sigma(u)$ e o tensor de deformação de Green linearizado ε são definidos como

$$\sigma(u) = \mathbb{C} \varepsilon(u), \quad \varepsilon(u) = \frac{1}{2} (\nabla u + (\nabla u)^\top), \quad (9)$$

com o tensor constitutivo $\mathbb{C}$ dado por

$$\mathbb{C} = 2\mu \mathbb{I} + \lambda (\mathbf{I} \otimes \mathbf{I}). \quad (10)$$

onde $\mathbb{I}$ e I são os tensores identidade de quarta e segunda ordens, respectivamente, e μ e λ denotam os coeficiente de Lamé, ambos considerados constantes. Particularmente, em estado plano de tensões tem-se

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad \text{and} \quad \lambda = \frac{\nu E}{1-\nu^2}, \quad (11)$$

onde E é o módulo de Young e ν o coeficiente de Poisson.

A fim de simplificar a implementação numérica, considera-se que o domínio $\mathcal{D}$ é decomposto em dois subdomínios Ω e $\mathcal{D} \setminus \Omega$. O domínio Ω representa a parte elástica enquanto que $\mathcal{D} \setminus \Omega$ é preenchido com um material muito complacente, utilizado para representar furos. Este procedimento permite trabalhar em um domínio computacionalmente fixo. Desta forma, introduz-se uma função constante por partes $\rho = \rho(x)$, tal que

$$\rho = \rho(x) := \begin{cases} 1, & \text{se } x \in \Omega, \\ \rho_0 \ll 1, & \text{se } x \in \mathcal{D} \setminus \Omega, \end{cases} \quad (12)$$

onde $\rho_0 \in \mathbb{R}^+$ é utilizado para representar os vazios. Isto é, o problema de otimização, onde a estrutura em si consiste no domínio Ω de propriedades elásticas conhecidas e na parte vazia restante $\mathcal{D} \setminus \Omega$, é aproximado por meio da distribuição de material bifásico dado por (12) sobre Ω . Assim, a região vazia $\mathcal{D} \setminus \Omega$ é preenchida por um material (the soft phase) com módulo de Young, $\rho_0 E$, muito menor que o módulo de Young, E , do material elástico (the hard phase).

2.1 O problema de otimização penalizado

A presença de uma restrição local em tensão dificulta tratar o problema de otimização diretamente. Esta questão foi discutida em detalhes por Le et al. (2010) no contexto dos métodos SIMP (Bendsøe and Sigmund, 2003). Aqui, será utilizada a abordagem proposta por Amstutz and Novotny (2010) que consiste em aproximar o problema de otimização original por meio de uma função de penalização regularizada para a restrição em tensão. Antes de prosseguir, introduz-se a tensão normalizada, S , definida por

$$S(u) := \frac{\sigma(u)}{\bar{\sigma}}. \quad (13)$$

Então, a restrição em tensão de von Mises em termos das tensões normalizadas escreve-se

$$S_M^2(u) = \frac{1}{2} \mathbb{B} S(u) \cdot S(u) \leq 1. \quad (14)$$

Agora, com o intuito de definir o funcional objetivo penalizado, seja $\Phi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ uma função não decrescente de classe $\mathcal{C}^2$, tal que as derivadas Φ' e Φ'' sejam limitadas. Dito isto, a função de penalização é definida da seguinte maneira:

$$\mathcal{G}(u) := \int_{\Omega^*} \Phi(S_M^2(u)). \quad (15)$$

Com esta função de penalização, define-se o correspondente funcional objetivo penalizado:

$$\mathcal{F}_\Omega^\alpha := \mathcal{F}_\Omega(u) + \alpha \mathcal{G}(u) \quad (16)$$

onde o escalar $\alpha > 0$ é um dado coeficiente de penalização. Em particular, no presente trabalho toma-se a função Φ no seguinte formato (para mais detalhes o leitor interessado pode consultar Amstutz and Novotny (2010); Amstutz et al. (2012)):

$$\Phi(t) \equiv \Phi_q(t) \quad (17)$$

onde $q \geq 1$ é um parâmetro real dado e $\Phi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ é definida como

$$\Phi_q(t) = [1 + (t)^q]^{1/q} - 1. \quad (18)$$

Então, o problema de otimização com restrição em tensão de von Mises original (1-2) pode ser aproximado pelo seguinte problema de otimização penalizado:

$$\text{Minimize } \mathcal{F}_\Omega^\alpha(u) = \beta|\Omega| + \int_{\Gamma_{in}} q_{in} \cdot u + \kappa \int_{\Gamma_{out}} q_{out} \cdot u + \alpha \int_{\Omega^*} \Phi(S_M^2(u)), \quad (19)$$

com u solução de (3).

3 A DERIVADA TOPOLÓGICA

A derivada topológica foi introduzida por Sokołowski and Żochowski (1999) e fornece a sensibilidade de um funcional de forma com respeito a uma perturbação infinitesimal. Esta é definida através da passagem do limite quando o pequeno parâmetro que governa o tamanho da perturbação topológica tende a zero, veja Lopes et al. (2014), e, portanto, pode ser utilizada como uma direção de descida em um processo de otimização, similar a um método baseado no gradiente do funcional custo e tem sido aplicada com sucesso em vários problemas tais como otimização estrutural, mecânica da fratura, problemas inversos, dentre outros. Com o intuito de tornar o trabalho autocontido, a derivada topológica associada ao problema de otimização (19) é apresentada a seguir (Novotny and Sokołowski, 2013; Lopes et al., 2014; Amstutz and Novotny, 2010).

Teorema 1. *A derivada topológica do funcional objetivo (16) com respeito à nucleação de uma pequena inclusão circular com propriedade material diferente do meio, representada por um contraste γ , é dada pela seguinte soma:*

$$D_T \mathcal{F}_\Omega^\alpha(u) = \beta D_T |\Omega| + D_T \mathcal{J}(u) + \alpha D_T \mathcal{G}(u), \quad (20)$$

em que a derivada topológica do volume $D_T |\Omega|$ é dada por

$$D_T |\Omega| = \begin{cases} -1, & \text{em } \Omega, \\ 1, & \text{em } \mathcal{D} \setminus \bar{\Omega} \end{cases} \quad (21)$$

e a derivada topológica do funcional $\mathcal{J}$ é escrita como

$$D_T \mathcal{J}(u) = -\mathbb{P}_\gamma \sigma(u) \cdot \nabla^s v \quad (22)$$

em que o tensor de Polarização $\mathbb{P}_\gamma$ é dado por:

$$\mathbb{P}_\gamma = \frac{1-\gamma}{1+\gamma a_2} \left((1+a_2)\mathbb{I} + \frac{1}{2}(a_1-a_2) \frac{1-\gamma}{1+\gamma a_1} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \right), \quad (23)$$

com as constantes a_1 e a_2 dadas por

$$a_1 = \frac{\lambda + \mu}{\mu}, \quad a_2 = \frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu}, \quad (24)$$

e o contraste γ é tal que

$$\gamma := \begin{cases} \rho_0 & \text{em } \Omega, \\ \frac{1}{\rho_0} & \text{em } \mathcal{D} \setminus \overline{\Omega}. \end{cases} \quad (25)$$

Por fim, a derivada topológica da função de penalização $\mathcal{G}$ lê-se

$$\begin{aligned} D_T \mathcal{G}(u) = & -\mathbb{P}_\gamma \sigma(u) \cdot \nabla^s v + (\gamma - 1) \chi_{\Omega^\star} k_1(u) \mathbb{T}_\gamma \mathbb{B} S(u) \cdot S(u) + \rho_0 \chi_{\Omega^\star} \Upsilon(S(u)) \\ & + \chi_{\Omega^\star} k_1(u) \frac{1}{4} \left(\frac{1 - \gamma}{1 + \gamma a_2} \right)^2 \left(5(2S(u) \cdot S(u) - \text{tr}^2 S(u)) + 3 \left(\frac{1 + \gamma a_2}{1 + \gamma a_1} \right)^2 \text{tr}^2 S(u) \right) \\ & + \chi_{\Omega^\star} \Psi(S(u)) + (\gamma - 1) \chi_{\Omega^\star} \Phi(S_M^2(u)) \end{aligned} \quad (26)$$

onde o tensor de quarta ordem $\mathbb{T}_\gamma$ é definido por

$$\mathbb{T}_\gamma = \frac{1 - \gamma}{1 + \gamma a_2} \left(a_2 \mathbb{I} + \frac{a_1 - a_2}{2(1 + \gamma a_1)} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \right), \quad (27)$$

sendo a_1 e a_2 dadas por (24) e o tensor $\mathbb{B}$ dado por (8). A função $k_1(u)$ é escrita como

$$k_1(u) = \Phi'(S_M^2(u)) \quad (28)$$

e a função característica $\chi_{\Omega^\star}$ é definida como

$$\chi_{\Omega^\star} = \begin{cases} 1 & \text{em } \Omega^\star, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (29)$$

Além disso, a função $\Upsilon(S(u))$ é dada por

$$\begin{aligned} \Upsilon(S(u)) = & \left[\Phi \left(\frac{1}{2} \mathbb{B} S(u) \cdot S(u) + \mathbb{B} S(u) \cdot \mathbb{T}_\gamma S(u) + \frac{1}{2} \mathbb{B} \mathbb{T}_\gamma S(u) \cdot \mathbb{T}_\gamma S(u) \right) \right. \\ & \left. - \Phi \left(\frac{1}{2} \mathbb{B} S(u) \cdot S(u) \right) - \Phi' \left(\frac{1}{2} \mathbb{B} S(u) \cdot S(u) \right) (\mathbb{B} S(u) \cdot \mathbb{T}_\gamma S(u)) \right] \end{aligned} \quad (30)$$

e a função $\Psi(S(u))$ lê-se

$$\Psi(S(u)) = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \int_0^\pi \frac{1}{t^2} [\Phi(S_M^2(u) + \Lambda(t, \theta)) - \Phi(S_M^2(u)) - \Phi'(S_M^2(u)) \Lambda(t, \theta)] d\theta dt \quad (31)$$

onde

$$\begin{aligned} \Lambda(t, \theta) = & -\frac{1 - \gamma}{1 + \gamma a_2} \frac{t}{2} \left[(S_I^2 - S_{II}^2) \left(2 + 3 \frac{1 + \gamma a_2}{1 + \gamma a_1} \right) \cos \theta + 3(S_I - S_{II})^2 (2 - 3t) \cos 2\theta \right] \\ & + \left(\frac{1 - \gamma}{1 + \gamma a_2} \right)^2 \frac{t^2}{4} \left[3(S_I + S_{II})^2 \left(\frac{1 + \gamma a_2}{1 + \gamma a_1} \right)^2 + (S_I - S_{II})^2 (3(2 - 3t)^2 + 4 \cos^2 \theta) \right. \\ & \left. + 6 \frac{1 + \gamma a_2}{1 + \gamma a_1} (S_I^2 - S_{II}^2) (2 - 3t) \cos \theta \right], \end{aligned} \quad (32)$$

com S_I e S_{II} usados para denotar os autovalores de $S(u)$. Finalmente, o campo vetorial v é solução do seguinte problema variacional adjunto: Encontrar $v \in \mathcal{U}$, tal que

$$\int_{\mathcal{D}} \sigma(v) \cdot \varepsilon(\eta) = \int_{\mathcal{D}} \chi_{\Omega^*} k_1(u) \tilde{\mathbb{B}} S(u) \cdot \varepsilon(\eta) - \int_{\Gamma_{in}} q_{in} \cdot \eta - \kappa \int_{\Gamma_{out}} q_{out} \cdot \eta \quad \forall \eta \in \mathcal{U}, \quad (33)$$

sendo $\mathcal{U}$ definido por (4) e o tensor de quarta ordem $\tilde{\mathbb{B}}$ dado por

$$\tilde{\mathbb{B}} = 6\mu \mathbb{I} + (\lambda - 2\mu) \mathbb{I} \otimes \mathbb{I}. \quad (34)$$

4 O ALGORITMO DE OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA

Utiliza-se no presente trabalho o algoritmo proposto por Amstutz and Andrä (2006) que consiste basicamente em encontrar uma condição de otimalidade local para o problema de minimização (19), escrita em termos da derivada topológica e da função level-set, juntamente com uma aproximação por elementos finitos. A eficácia deste algoritmo de otimização topológica é demonstrada em várias aplicações como em problemas de fluxo através de meios porosos (Amstutz and Andrä, 2006), otimização estrutural com restrição em tensão (Amstutz and Novotny, 2010; Amstutz et al., 2012) e otimização de microestruturas elásticas. Aqui, ele será aplicado no contexto de mecanismos flexíveis. Para maiores detalhes sobre o algoritmo o leitor interessado pode consultar Lopes et al. (2015).

5 EXEMPLOS NUMÉRICOS

Primeiramente, introduz-se a seguinte métrica para calcular a eficiência do mecanismo:

$$\mathcal{E} = - \frac{\int_{\Gamma_{out}} q_{out} \cdot u}{\int_{\Gamma_{in}} q_{in} \cdot u} \times 100\%. \quad (35)$$

Além disso, considera-se $\mathcal{D} = \Omega$. Os domínios Ω^* e ω são identificados pelas cores cinza escuro e cinza claro, respectivamente. O domínio ω , representado por pequenos retângulos de tamanho $5 \times 2 \text{ mm}^2$, $2 \times 5 \text{ mm}^2$ e $3 \times 7 \text{ mm}^2$, permanece inalterado durante todo o processo de otimização. Ademais, a linha grossa em preto representa a condição de Dirichlet homogênea, a linha tracejada denota a condição de simetria e quando não especificado considera-se condição de contorno de Neumann homogênea.

O contraste na propriedade material é dado por $\rho_0 = 3 \times 10^{-3}$. Os mecanismos são desenhados utilizando náilon, o qual possui módulo de Young $E = 3 \times 10^3 \text{ MPa}$, coeficiente de Poisson $\nu = 0.4$ e tensão limite $\bar{\sigma} = 40 \text{ MPa}$. Finalmente, os problemas mecânicos são discretizados em elementos finitos triangulares lineares e três refinamentos foram realizados durante o processo de otimização.

Exemplo 1

Neste exemplo, é desenhado um inversor, mecanismo que inverte a força de entrada aplicada gerando um deslocamento de saída na direção oposta. O domínio inicial, caracterizado pela distribuição de material elástico, é representado por um retângulo $100 \times 50 \text{ mm}^2$. O inversor é



Figura 2: Exemplo 1: domínio inicial e condições de contorno.

modelado usando condição de simetria e uma malha de elementos finitos com 3356 elementos e 1764 nós. Além disso, o mecanismo é submetido a dois carregamentos uniformemente distribuídos $q_{in} = 10 \text{ N/mm}^2$ e $q_{out} = 5 \text{ N/mm}^2$ como mostra a Fig. 2. Finalmente, escolhe-se $\beta^* = 100$, $\kappa = 9.0$.

A Fig. 3 apresenta a distribuição de tensão ao fim do processo de otimização. O caso sem restrição em tensão ($\alpha = 0$) foi obtido em 48 iterações e apresenta uma eficiência $\mathcal{E} \approx 23\%$. Nota-se que neste caso a tensão máxima é maior que duas vezes a tensão admissível devido a presença das juntas flexíveis, como pode ser visto na Fig. 3(a). Por outro lado, para o caso com restrição em tensão ($\alpha = 10$) a tensão não ultrapassa a tensão admissível e a topológica ótima obtida não apresenta juntas flexíveis, como observa-se na Fig. 3(b). Este resultado foi obtido após 37 iterações e apresenta uma eficiência $\mathcal{E} \approx 24\%$.

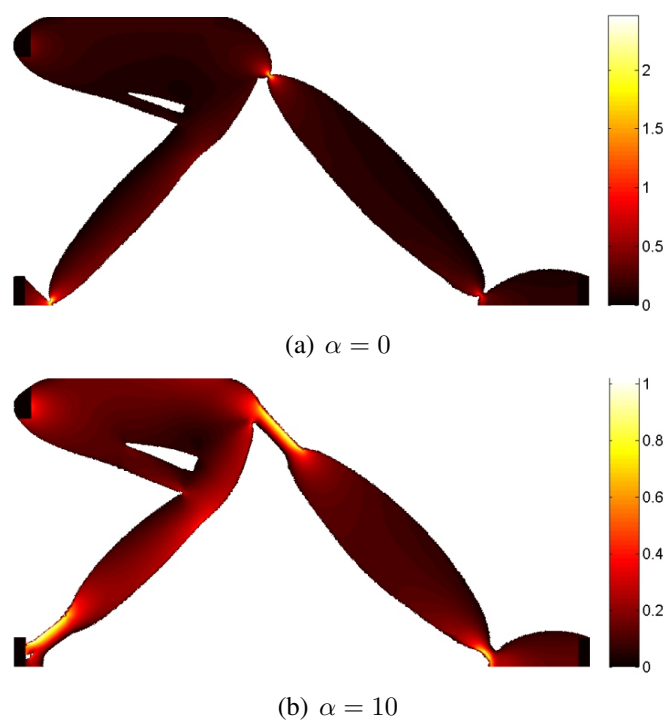


Figura 3: Exemplo 1: distribuição de tensão para os casos sem (a) e com (b) restrição em tensão.

As configurações deformadas são apresentadas nas Figs. 4(a) e 4(b) para os casos com e sem restrição em tensão, respectivamente, onde nota-se que os mecanismos obtidos atendem ao critério de funcionalidade desejado.

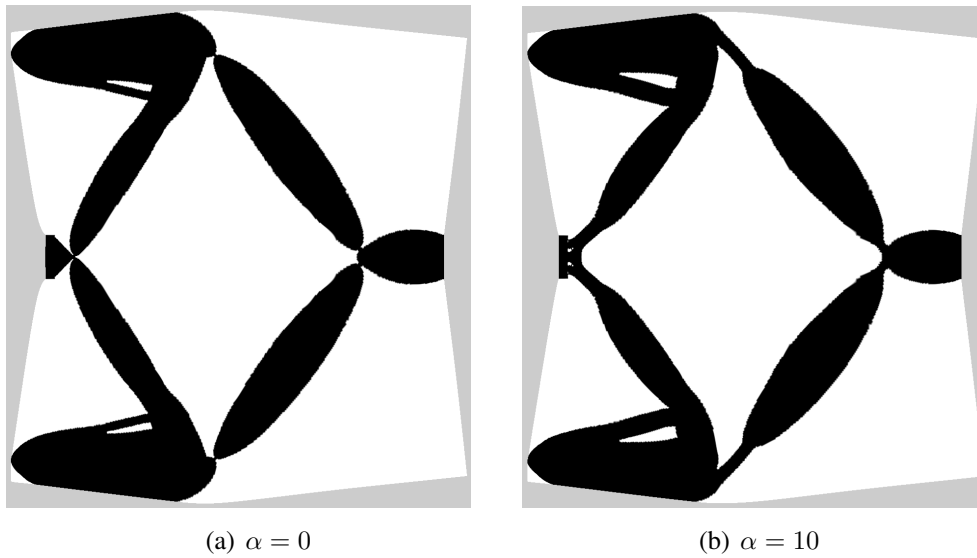


Figura 4: Exemplo 1: configuração deformada para os casos sem 4(a) e com 4(b) restrição em tensão.

Exemplo 2

Agora, desenha-se um mecanismo do tipo alicate. O domínio inicial, caracterizado pela distribuição de material elástico, é representado por um retângulo de dimensões $100 \times 50 \text{ mm}^2$ com uma cavidade, conforme mostrado na Fig. 5. Ele é modelado usando condição de simetria e uma malha de elementos finitos com 2832 elementos e 1489 nós. Ademais, o alicate é submetido a duas forças distribuídas $q_{in} = -40 \text{ N/mm}^2$ e $q_{out} = 8 \text{ N/mm}^2$ e escolhe-se $\beta^* = 100$, $\kappa = 9.0$.

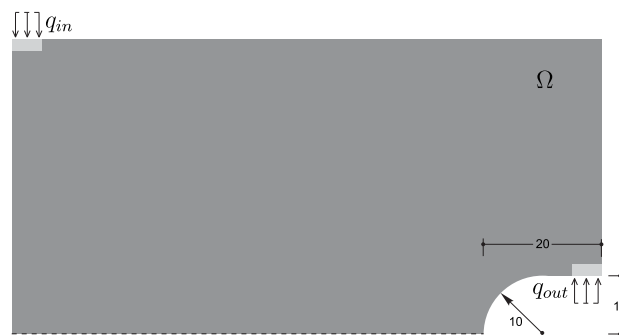


Figura 5: Exemplo 2: domínio inicial e condições de contorno.

A Fig. 6 mostra os resultados obtidos com distribuição de tensão para ambos os casos considerados. Na Fig. 6(a) a topologia ótima foi obtida após 55 iterações e com eficiência $\mathcal{E} \approx 17.5\%$, enquanto que o resultado da Fig. 6(b) foi obtido após 45 iterações e com eficiência

$\mathcal{E} \approx 2.3\%$. Novamente observa-se que no caso sem a restrição em tensão ($\alpha = 0$) a tensão máxima ultrapassa a tensão limite do material e apresenta juntas flexíveis, veja Fig. 6(a), o que não ocorre quando considera-se a restrição em tensão, observe Fig. 6(b).

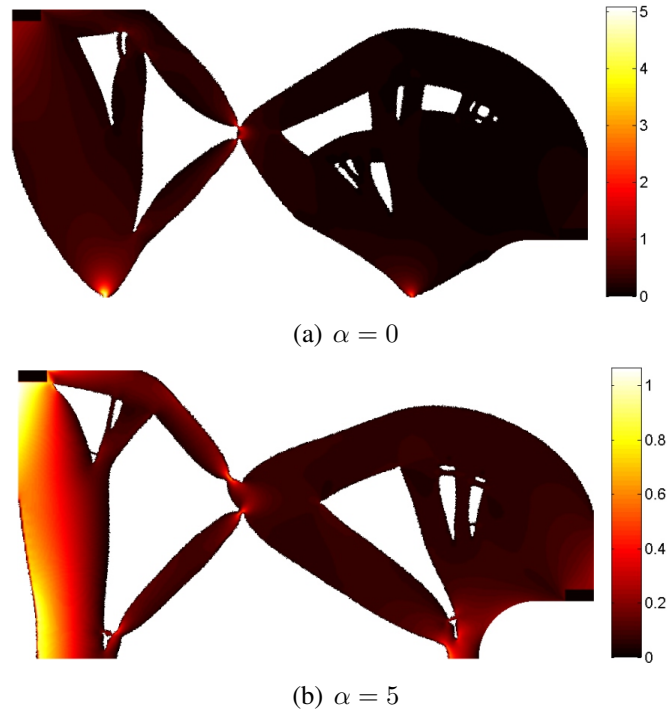


Figura 6: Exemplo 2: distribuição de tensão para os casos sem 6(a) e com 6(b) restrição em tensão.

A configuração deformada do mecanismo obtido, para ambos os casos considerados, é apresentada na Fig. 7 donde nota-se que o critério de funcionalidade é satisfeito.

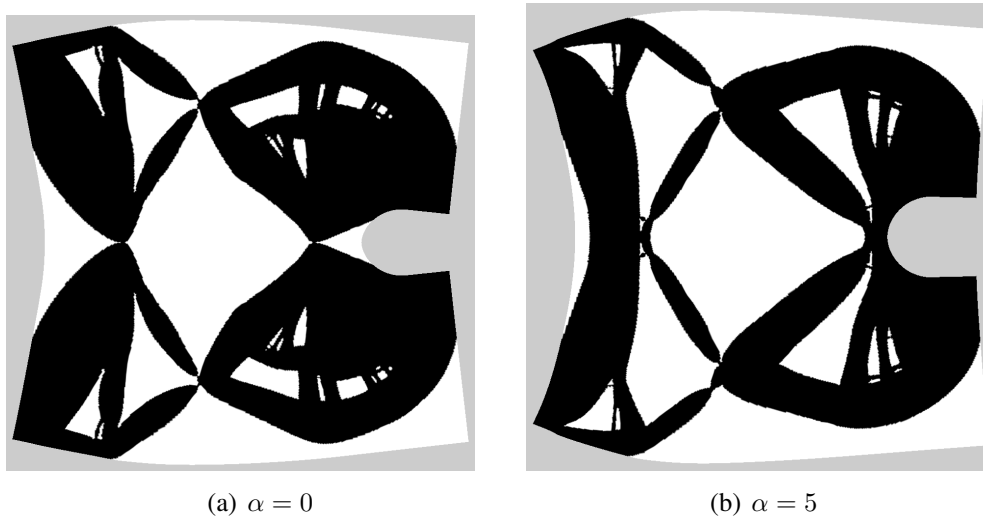


Figura 7: Exemplo 2: configuração deformada para os casos sem 7(a) e com 7(b) restrição em tensão.

6 CONCLUSÕES

Neste trabalho o conceito de derivada topológica foi aplicado no contexto de otimização topológica de mecanismos flexíveis com restrição em tensão de von Mises. Esta abordagem, para o problema de otimização descrito, forneceu uma forma analítica para a sensibilidade topológica que permite obter a topologia ótima em poucas iterações. Assim, o algoritmo de otimização topológica é notavelmente eficiente e de simples implementação computacional. Além disso, a metodologia utilizada para tratar a restrição em tensão permitiu obter resultados satisfatórios no que se refere ao não aparecimento de juntas flexíveis nos mecanismos ótimos obtidos.

AGRADECIMENTOS

Esta pesquisa foi parcialmente financiada pelo CNPq (Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico) e pela CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal do Nível Superior). Agradecemos o apoio.

REFERÊNCIAS

- Allaire, G., Jouve, F., and Van Goethem, N. Damage and fracture evolution in brittle materials by shape optimization methods. *Journal of Computational Physics*, 230(12):5010–5044, 2011.
- Amstutz, S. Sensitivity analysis with respect to a local perturbation of the material property. *Asymptotic Analysis*, 49(1-2):87–108, 2006.
- Amstutz, S. A penalty method for topology optimization subject to a pointwise state constraint. *ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations*, 16(03):523–544, 2010.
- Amstutz, S. and Andrä, H. A new algorithm for topology optimization using a level-set method. *Journal of Computational Physics*, 216(2):573–588, 2006.
- Amstutz, S., Giusti, S. M., Novotny, A. A., and de Souza Neto, E. A. Topological derivative for multi-scale linear elasticity models applied to the synthesis of microstructures. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 84:733–756, 2010.
- Amstutz, S., Horchani, I., and Masmoudi, M. Crack detection by the topological gradient method. *Control and Cybernetics*, 34(1):81–101, 2005.
- Amstutz, S. and Novotny, A. A. Topological optimization of structures subject to von Mises stress constraints. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 41(3):407–420, 2010.
- Amstutz, S., Novotny, A. A., and de Souza Neto, E. A. Topological derivative-based topology optimization of structures subject to Drucker-Prager stress constraints. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 233–236:123–136, 2012.
- Bendsøe, M. P. and Sigmund, O. *Topology optimization. Theory, methods and applications*. Springer-Verlag, Berlin, 2003.
- Burns, R. H. and Crossley, F. R. E. Kinetostatic synthesis of flexible link mechanisms. *ASME-Paper*, 68(36), 1964.

- Eschenauer, H. A. and Olhoff, N. Topology optimization of continuum structures: a review. *Applied Mechanics Reviews*, 54(4):331–390, 2001.
- Hintermüller, M. Fast level set based algorithms using shape and topological sensitivity. *Control and Cybernetics*, 34(1):305–324, 2005.
- Le, C., Norato, J., and Bruns, T. Stress-based topology optimization for continua. *Struct. Multidisc. Optim.*, 41:605–620, 2010.
- Lenz, E. C. and Fonseca, J. S. O. Strain energy maximization approach to the design of fully compliant mechanisms using topology optimization. *Latin American Journal of Solids and Structures*, (1):263–275, 2004.
- Lopes, C. G., dos Santos, R. B., and Novotny, A. A. Topology design of compliant mechanisms based on the topological derivative concept. *Ibero-Latin American Congress on Computational Methods in Engineering*, (XXXVI), 2014.
- Lopes, C. G., dos Santos, R. B., and Novotny, A. A. Topological derivative-based topology optimization of structures subject to multiple load-cases. *Latin American Journal of Solids and Structures*, 12:834–860, 2015.
- Luo, J., Luo, Z., Chen, S., Tong, L., and Wang, M. Y. A new level set method for systematic design of hinge-free compliant mechanisms. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, (198):318–331, 2008.
- Meneghelli, L. R. and Cardoso, E. L. Design of compliant mechanisms with stress constraints using topology optimization. *Optimization of Structures and components, Advanced Structured Materials*, 43, 2013.
- Novotny, A. A. and Sokołowski, J. *Topological derivatives in shape optimization*. Interaction of Mechanics and Mathematics. Springer, 2013.
- Novotny, A. A., Sokołowski, J., and de Souza Neto, E. A. Topological sensitivity analysis of a multi-scale constitutive model considering a cracked microstructure. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 33(5):676–686, 2010.
- Sigmund, O. On the design of compliant mechanisms using topology optimization. *Mechanics of Structures and Machines: An International Journal*, 25(4):493–524, 1997.
- Sigmund, O. and Maute, K. Topology optimization approaches. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 48:1031–1055, 2013.
- Sokołowski, J. and Żochowski, A. On the topological derivative in shape optimization. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 37(4):1251–1272, 1999.
- Sokołowski, J. and Zochowski, A. Topological derivative for optimal control problems. *Control and Cybernetics*, 28(3):611–626, 1999.
- Van Goethem, N. and Novotny, A. A. Crack nucleation sensitivity analysis. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 33(16):197–1994, 2010.