



## ALGORITMO DE VAGA-LUMES APLICADO À OTIMIZAÇÃO DA CARGA DE FLAMBAGEM DE PLACAS COMPÓSITAS LAMINADAS

**Rubem Matimoto Koide**

**Adriano Gonçalves dos Passos**

**Ana Paula C. S. Ferreira**

**Marco Antônio Luersen**

rubemkoide@hotmail.com

adriano.utfpr@gmail.com

apaula@utfpr.edu.br

luersen@utfpr.edu.br

Laboratório de Mecânica Estrutural - LaMEs

Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR

Av. Sete de Setembro, 3165, Rebouças, CEP 80230-901, Curitiba, PR, Brasil

**Resumo:** *Materiais compósitos laminados de alto desempenho são formados pelo empilhamento de lâminas constituídas por uma matriz polimérica e fibras orientadas em direções específicas. Tais materiais são utilizados em aplicações estruturais onde a redução de peso é importante, pois apresentam excelentes relações rigidez-peso e resistência-peso. O projeto de estruturas de materiais compósitos laminados normalmente envolve um processo de otimização na busca da melhor sequência de empilhamento. Técnicas heurísticas têm sido desenvolvidas para solucionar este tipo de problema. O algoritmo de vaga-lumes é um dos algoritmos dessa classe, e foi inspirado no comportamento social dos vaga-lumes. Os vaga-lumes irradiam luzes com determinados ritmos (“flashes”). Esse tipo de iluminação atua como um sinal para atrair parceiros e potenciais presas. A atratividade entre os vaga-lumes é proporcional ao brilho ou intensidade luminosa e está relacionada com a distância entre os vaga-lumes. Fazendo analogia com otimização, a intensidade luminosa do vaga-lume é afetada ou determinada pela função objetivo. A forma discreta do algoritmo de vaga-lumes foi adaptada para a maximização da carga de flambagem de placas laminadas com o objetivo de se obter a sequência de orientação ótima das lâminas. Foram analisados casos de placas sob carregamento biaxial e diferentes relações entre comprimento e largura. Os resultados da otimização foram comparados com outros trabalhos encontrados na literatura.*

**Palavras-chave:** *Otimização, Algoritmo de vaga-lumes, Compósitos laminados, Flambagem*

## 1 INTRODUÇÃO

A inteligência do comportamento coletivo, em inglês *swarm intelligence*, de determinados animais como formigas, abelhas, vaga-lumes, aves, peixes, etc. inspiraram a criação de certos algoritmos de otimização. Estes foram desenvolvidos propondo-se uma inteligência artificial simulada a partir da auto-organização coletiva observada nestas espécies. Dentre as várias meta-heurísticas desenvolvidas com esta idéia tem-se, por exemplo: algoritmo de colônia de formigas, algoritmo de enxame de abelhas, *particle swarm optimization*. Uma revisão de alguns métodos de otimização utilizados na engenharia estrutural pode ser encontrado em Hare et al. (2013).

Estruturas compósitas laminadas são atualmente utilizadas, principalmente, nas indústrias aeronáutica, espacial e automobilística, devido à alta relação resistência/peso. Entretanto, por se tratarem de estruturas finas, o comportamento à flambagem deve ser estudado para se obter um projeto seguro e confiável quanto à sua estabilidade. Portanto, a determinação da carga crítica de flambagem é essencial. Estudos clássicos de flambagem de compósitos laminados podem ser encontrados em Arnold e Mayers (1984) e Leissa (1993). Sundaresan et al. (1996) investigaram a flambagem e a pós-flambagem de placas laminadas retangulares utilizando a teoria de primeira ordem de deformação cisalhante associado com a relação não linear de deformação-deslocamento e análise por elementos finitos.

A carga de flambagem altera-se com as diferentes condições de contorno, com a sequência de empilhamento do laminado e com os diferentes tipos de cargas (compressivas ou cisalhantes). A influência das condições de contorno da carga de flambagem para uma placa retangular foi analisada por Baba (2007). Utilizando valores discretos para os ângulos das orientações das lâminas, a determinação da sequência ótima de empilhamento recai em um problema combinatório onde normalmente há uma grande quantidade de possíveis soluções. Portanto, métodos de otimização vêm sendo adotados para a obtenção das melhores respostas da carga de flambagem em função da sequência de empilhamento, principalmente baseado nos ângulos discretos ( $0^\circ, \pm 45^\circ, 90^\circ$ ). Na década de 1990, Le Riche e Haftka (1993) utilizaram algoritmos genéticos na maximização da carga de flambagem tendo como variáveis de projetos os ângulos discretos. O método de otimização de arrefecimento simulado (*simulated annealing*) foi a meta-heurística adotada por Erdal e Sonmez (2005) na obtenção da sequência ótima de empilhamento das camadas de compósitos laminado. A meta-heurística baseada em colônias de formigas foi aplicada na otimização da sequência de empilhamento para a máxima carga de flambagem por Aymerich e Serra (2008) e Koide et al. (2013). Lakshmi e Rao (2015) pesquisaram a sequência de empilhamento para carga de flambagem considerando diferentes cargas biaxiais compressivas utilizando o algoritmo *Harmony Search*.

Um algoritmo baseado no comportamento dos vaga-lumes, denominado algoritmo de vaga-lumes (*Firefly Algorithm*) é um dos recentes métodos proposto por Yang, em 2007 (Yang, 2010a). Trata-se de um algoritmo estocástico, uma heurística, inspirado na natureza, em uma população de indivíduos, e aplicado para resolver difíceis problemas de otimização. Os vaga-lumes emitem luzes ritmadas e com certa intensidade (*flashes*) que são utilizadas para se comunicarem ou usadas como forma de proteção contra seus predadores. Estas características dos vaga-lumes reais foram utilizadas na idealização do algoritmo. A atratividade é proporcional ao brilho ou intensidade luminosa e está relacionada com a distância entre os vaga-lumes. A intensidade luminosa do vaga-lume é afetada ou determinada pela função objetivo. A busca local ou global na otimização se dá pelo movimento dos vaga-lumes em função da intensidade luminosa. Em uma busca bibliográfica, os autores não

encontraram aplicação deste algoritmo para a solução de problema de empilhamento ótimo de estruturas.

O presente trabalho trata o problema de maximização da carga de flambagem de placas de material compósito laminado utilizando o algoritmo de vaga-lumes. O mesmo foi adaptado para variáveis discretas e aplicado a placa simplesmente suportada com diferentes cargas compressivas biaxiais e diferentes larguras do laminado.

## 2 FLAMBAGEM DE PLACA COMPÓSITA LAMINADA

O fator de flambagem  $\lambda_{cf}(m, n)$  para cada modo de flambagem de uma placa retangular simplesmente suportada e sob carga biaxial conforme esquematizado na Figura 1 e definido pelo número de meia-ondas  $(m, n)$  na direção longitudinal  $(x)$  e na direção transversal  $(y)$ , é dado por (Jones, 1999)

$$\lambda_{cf}(m, n) = \pi^2 \frac{D_{11} \left(\frac{m}{a}\right)^4 + 2(D_{12} + 2D_{66}) \left(\frac{m}{a}\right)^2 \left(\frac{n}{b}\right)^2 + D_{22} \left(\frac{n}{b}\right)^4}{\left(\frac{m}{a}\right)^2 N_x + \left(\frac{n}{b}\right)^2 N_y}, \quad (1)$$

onde  $N_x$  e  $N_y$  são as forças por unidade de comprimento nas direções longitudinais e transversais respectivamente,  $a$  é o comprimento e  $b$  a largura da placa, e  $D_{11}$ ,  $D_{12}$ ,  $D_{66}$  e  $D_{22}$  são os termos da matriz de rigidez de flexão do laminado. O modo crítico de flambagem é o modo do mínimo fator  $\lambda_{cf}$ , o qual representa a relação entre a carga de flambagem e a carga aplicada.

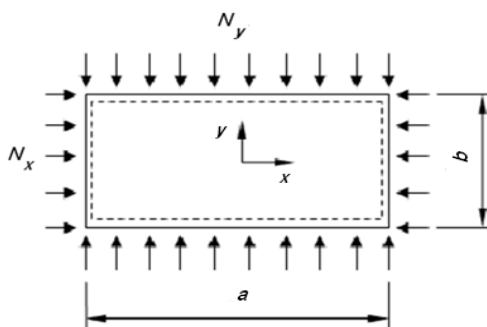


Figura 1. Placa retangular sob carregamento biaxial

## 3 ALGORITMO DE VAGA-LUMES (AV)

### 3.1 Comportamento dos vaga-lumes

Os vaga-lumes produzem pequenas e ritmadas luzes (*flashes*). O padrão das luzes é frequentemente único para cada espécie em particular. A intermitência luminosa é produzida por um processo de bioluminescência a partir de um processo bioquímico. Os organismos luminescentes produzem só lentos flashes modulados ou brilhos. Entretanto, vaga-lumes adultos em muitas espécies são capazes de controlar sua bioluminescência de modo a emitir flashes intensos e discretos (Fister et al., 2013). Considera-se a emissão intermitente de luz ou *flashes* como um meio de atração de parceiros ou a atração de potenciais presas. Adicionalmente pode ser também um mecanismo de proteção contra predadores de vaga-

lumes. Alguns vaga-lumes tropicais podem sincronizar seus *flashes*, formando um comportamento biológico auto-organizado (Yang (2009), Yang (2010a)). As decisões coletivas são altamente conectadas com o comportamento das emissões de luzes dos flashes que servem como fundamento principal no desenvolvimento do algoritmo de vaga-lumes (Fister et al., 2013).

### 3.2 Formulação do algoritmo de vaga-lumes

A intensidade da luz,  $I$ , está relacionada com o quadrado do inverso da distância,  $r$ , ou seja,  $I \propto 1/r^2$ . Isto significa que a intensidade luminosa diminui com o aumento da distância entre dois vaga-lumes. Devido à absorção da luz pelo ar, a intensidade também enfraquece com o aumento da distância. Considerando as características da irradiação luminosa do vaga-lume, Yang, em 2007 (Yang, 2010a), formulou um algoritmo baseado no comportamento dos vaga-lumes. Os procedimentos básicos de um pseudo-código do algoritmo de vaga-lumes do inglês *Firefly Algorithm*, é apresentado na Figura 2. A variável  $nv$  representa o número de variáveis de projeto,  $nr\_vl$  a quantidade de vaga-lumes,  $\beta$  a atratividade e  $\alpha$  um parâmetro de busca global.

```

Entrada:  $f(x), x = (x_1, x_2, \dots, x_{nv})$ ; // função objetivo
           $nr\_vl, I_0, \gamma, \alpha$ ; // definição das constantes iniciais
Saída:  $x^{min}$ ; // mínimo valor da função objetivo

Para  $i \leftarrow 1$  até  $nr\_vl$  faça
     $x^i \leftarrow \text{Solução\_Inicial}()$ ;
Fim
Enquanto critério de fim não terminar faça;
     $min \leftarrow \arg_{i \in \{1, \dots, m\}} \min (f(x^i))$ ;
    Para  $i \leftarrow 1$  até  $nr\_vl$  faça
        Para  $j \leftarrow 1$  até  $nr\_vl$  faça
            Se  $f(x^i) < f(x^j)$  então // move  $x^i$  para  $x^j$ 
                 $r_{i,j} \leftarrow \text{Distância}(x^i, x^j)$ ;
                 $\beta \leftarrow \text{Atratividade}(I_0, \gamma, r_{i,j})$ ;
                 $x^i \leftarrow (1 - \beta)x^i + \beta x^j + \alpha (rand - \frac{1}{2})$ ; // movimento
            Fim
        Fim
    Fim
     $x^{min} \leftarrow x^{min} + \alpha (rand - \frac{1}{2})$ ; //move o melhor vaga-lume randomicamente
Fim

```

Figura 2. Pseudo-código do algoritmo de vaga-lumes. Fonte: Durkota (2011)

Na idealização do algoritmo, assume-se algumas simplificações e o algoritmo inspirado nos vaga-lumes é baseado em 3 regras:

- Os vaga-lumes são unisex e os mesmos são atraídos uns pelos outros independentemente do sexo;

- A atratividade é proporcional ao brilho e ambos diminuem com a distância. Para dois vaga-lumes quaisquer o de menor brilho mover-se-á em direção ao de maior brilho. Se um vaga-lume em particular não brilhar ou não emitir *flashes* o seu movimento dar-se-á aleatoriamente.
- O brilho de um vaga-lume é afetado ou determinado avaliando-se a função objetivo. O brilho é proporcional à função objetivo no algoritmo de otimização inspirado nos vaga-lumes.

### 3.3 Intensidade luminosa e atratividade

No algoritmo de vaga-lume a atratividade de um vaga-lume é determinada pelo brilho dos *flashes* ou pela intensidade luminosa emitida e está relacionada com a avaliação da função objetivo ( $I(x) \propto f(x)$ ). A atratividade é representada por  $\beta$  e é relativa, pois depende de quem as vê ou da avaliação realizada pelos outros vaga-lumes. Está variará com a distância  $r_{ij}$  entre o vaga-lume  $i$  e o vaga-lume  $j$ . A intensidade da luz diminui com o aumento da distância em relação à fonte emissora e a luz também é absorvida, portanto, a atratividade também varia com o grau de absorção (Yang, 2010a).

A relação da intensidade luminosa varia de acordo com o inverso do quadrado da distância como

$$I(r) = \frac{I_f}{r^2}, \quad (2)$$

onde  $I_f$  é a intensidade da fonte. Para um determinado meio com um coeficiente fixo de absorção de luz,  $\gamma$ , a intensidade da luz  $I$  varia com a distância  $r$  e corresponde a

$$I = I_0 e^{-\gamma r}, \quad (3)$$

onde  $I_0$  é a luminosidade inicial. De modo a permitir a singularidade em  $r = 0$  na expressão  $I_f/r^2$ , o efeito combinado da lei do inverso do quadrado e a absorção podem ser aproximados na forma de Gauss como

$$I(r) = I_0 e^{-\gamma r^2}. \quad (4)$$

Como a atratividade de um vaga-lume é proporcional a intensidade da luz vista pelos vaga-lumes adjacentes, a atratividade é definida por

$$\beta = \beta_0 e^{-\gamma r^2}, \quad (5)$$

onde  $\beta_0$  é a atratividade em  $r = 0$ . Como a relação  $1/(1 + r^2)$  é mais rápida para calcular do que uma função exponencial, a atratividade pode ser formulada por

$$\beta = \frac{\beta_0}{1 + \gamma r^2}. \quad (6)$$

Se a atratividade  $\beta = 0$  ( $\gamma = \infty$ ) os vaga-lumes não vêem uns aos outros devido a uma aparente nebulosidade ou absorção alta de luz, e se  $\beta = \beta_0$  ( $\gamma = 0$ ) os vaga-lumes também vêem com dificuldade devido à luz intensa a qualquer distância, pois não há absorção de luz. A distância característica,  $\Gamma = 1/\sqrt{\gamma}$ , muda a atratividade de  $\beta_0$  para  $\beta_0 e^{-1}$  para a Eq. (5) ou  $\beta_0/2$  para a Eq. (6). A função de atratividade  $\beta(r)$  pode ser formulada como

$$\beta(r) = \beta_0 e^{-\gamma r^m}, \quad (m \geq 1). \quad (7)$$

Para um valor fixo de  $\gamma$ , a distância característica torna-se

$$\Gamma = \gamma^{-\frac{1}{m}} \rightarrow 1, \quad m \rightarrow \infty. \quad (8)$$

Para um dado comprimento  $\Gamma$  em um problema de otimização, o parâmetro  $\gamma$  pode ser inicializado a partir da equação

$$\gamma = \frac{1}{\Gamma^m}. \quad (9)$$

A distância cartesiana é obtida com a distância de  $x_i$  e  $x_j$  entre dois vaga-lumes  $i$  e  $j$ , e formulada como

$$r_{ij} = \|x_i - x_j\| = \sqrt{\sum_{k=1}^d (x_{i,k} - x_{j,k})^2}, \quad (10)$$

onde  $x_{i,k}$  é a  $k$ -ésima componente da coordenada espacial  $x_i$  do  $i$ -ésimo vaga-lume.

O movimento do vaga-lume  $i$  é em função do brilho de outro vaga-lume  $j$  de maior brilho e é determinado por

$$x_i = x_i + \beta_0 e^{-\gamma r_{ij}^2} (x_j - x_i) + \alpha \epsilon_i, \quad (11)$$

onde o segundo termo é devido a atração entre os vaga-lumes e corresponde a uma intensificação por melhores resultados na busca local. O terceiro termo é uma randomização em função do parâmetro randômico  $\alpha$  e do vetor de números randômicos  $\epsilon_i$  da distribuição de Gauss ou distribuição uniforme.  $\epsilon_i$  pode ser substituído por *rand*, que corresponde a geração de números randômicos uniformemente distribuído entre  $[0,1]$ . Esta etapa do movimento corresponde a uma diversificação por melhores resultados na busca global. Para a maioria das implementações adota-se  $\beta_0 = 1$  e  $\alpha \in [0,1]$  (Yang, 2010a).

O parâmetro de absorção  $\gamma$  impõe uma variação da atratividade, e seu valor é crucialmente importante na determinação da velocidade de convergência e como o algoritmo de vaga-lume se comporta (Yang, 2010a). Em teoria,  $\gamma \in [0, \infty]$ , mas na prática o valor de  $\gamma$  varia para a maioria das aplicações entre 0,1 a 10.

Uma revisão sobre o algoritmo de vaga-lumes pode ser encontrado em Yang, 2009 e Fister et. al., 2013. Yang (2009) analisou as similaridades e diferenças com o *Particle Swarm Optimization* (PSO) e apresentou resultados comparativos com o PSO e o algoritmo genético para otimização multimodal. O AV foi utilizado por Yang (2010b) em testes de funções e na solução de projetos não lineares. Yang (2010c) combinou as características dos vãos de Lévy com a estratégia de busca do algoritmo de vaga-lume no desenvolvimento de uma nova meta-heurística. Gomes e Rodrigues (2013) aplicaram o algoritmo de vaga-lume para a otimização estrutural em tamanho e forma de treliças com restrições de frequências naturais. Os recentes avanços e as aplicações do AV são apresentados por Yang e He (2013).

Algoritmos híbridos da meta-heurística baseada nos vaga-lumes têm sido desenvolvidos com intuito de melhorar a performance do algoritmo. Azad e Azad (2011) propuseram uma modificação na rotina de movimento dos vaga-lumes como meio de melhorar a meta-heurística na otimização de projeto de treliças. Gandomi et. al. (2013) propuseram uma variante do AV com a inclusão do caos nos procedimentos de otimização. Kavousi-Fard (2013) aplicaram um algoritmo de vaga-lume híbrido e regressão de vetores de suporte na previsão de carga elétrica de curto prazo. Srivatsava et al. (2013) apresentaram uma abordagem baseada no algoritmo de vaga-lume com controle de fluxo de grafos para gerar uma sequência ótima para testes de softwares. Um algoritmo híbrido com o algoritmo de colônia de formigas e algoritmo de vaga-lumes foi proposto por Rizk-Allah et al. (2013) para problemas de otimização sem restrições. Tuba e Bacanin (2014) também apresentaram um algoritmo de busca melhorado e híbrido com algoritmo de vaga-lume para problemas de otimização com restrições.

Variantes do algoritmo de vaga-lume também têm sido propostos para o caso de variáveis discretas. Durkota (2011) foi o primeiro a apresentar em seu trabalho de dissertação, os procedimentos da construção do algoritmo de vaga-lume, como a atratividade, a distância e o movimento dos vaga-lumes considerando funções discretas ou para variáveis discretas, denominado de *Discrete Firefly Algorithm* (DFA). Este algoritmo foi implementado por Sayadi et al. (2013) na formação de células de manufatura e por Poursalehi et al. (2013) na maximização do ciclo de energia e minimização do fator de pico de potência devido a restrições de segurança e otimizando assim o padrão de carga. Kumbharana e Pandey (2013) utilizaram o algoritmo de vaga-lumes discreto no problema do caixeiro viajante.

### 3.4 Algoritmo de vaga-lumes discreto (AVD)

O AV foi inicialmente desenvolvido para variáveis contínuas. Entretanto, muitos problemas requerem soluções aplicando variáveis discretas, como por exemplo o problema do caixeiro viajante (do inglês *Travelling Salesman Problem* – TSP) e o problema quadrático de alocação (do inglês *Quadratic Assignment Problem* – QAP). Para esses casos a meta-heurística necessita ser adaptada do algoritmo na forma contínua. Assim, o algoritmo de vaga-lume na forma discreta, foi desenvolvido por Durkota (2011) particularmente para QAP.

Conforme mostrado na Figura 2, os procedimentos do algoritmo de vaga-lume compreendem as populações iniciais de vaga-lumes, a função atratividade, a distância e o movimento. Dessa forma, para a versão discreta é necessário redefinir estas funções. Durkota (2011), considerou o espaço de busca como  $S_{np}$ , com todas as permutações possíveis de  $(1, 2, \dots, np)$ . A equação do movimento em função da atratividade pode ser escrita como

$$x_i \leftarrow (1 - \beta)x_i + \beta x_j + \alpha \left( rand - \frac{1}{2} \right), \quad (12)$$

a qual foi redefinida por

$$x_i \leftarrow atratividade(x_i, x_j, \alpha, \beta). \quad (13)$$

O movimento dos vaga-lumes em função da atratividade, Eq. (12), para variáveis discretas requer soluções representadas por permutações e suas operações (Durkota, 2011).

#### **Vaga-lumes iniciais**

O conjunto de população de vaga-lumes iniciais,  $S_{np}$ , são produzidas de forma randômica com as permutações de  $(1, 2, \dots, np)$ .

### **Função distância**

A medida da distância para o caso de variáveis discretas pode ser realizada com a distância de Hamming ou por um determinado número de troca das posições das variáveis da primeira solução para obter-se a segunda solução. Outras possibilidades são as distâncias de edição dadas pelos métodos de Levenshtein, Damerau e outros (Viana e Moura (2010), Hirschberg (1977)). Entretanto, foi utilizado o método de Hamming pois este apresenta implementação mais simples para o caso aqui estudado, visto que não são analisadas transformações de palavras, correções ortográficas, verificação de padrões complexos, além do comprimento da sequência ser fixo.

A distância de Hamming entre duas permutações é o número de elementos não correspondentes em uma sequência. Para as permutações  $\pi_1, \pi_2, \pi_3 \in S_{np}$ ,

$$\begin{aligned}\pi_1 &= [1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6], \\ \pi_2 &= [1 \ 2 \ 4 \ 3 \ 6 \ 5], \\ \pi_3 &= [1 \ 2 \ 4 \ 5 \ 6 \ 3].\end{aligned}\tag{14}$$

A distância de Hamming( $\pi_1, \pi_2$ ) entre  $\pi_1$  e  $\pi_2$  é 4, pois somente as duas primeiras posições tem os mesmos elementos.

### **Atração**

O movimento como observado pela Eq. (12) para variáveis contínuas e pela Eq. (13) para variáveis discretas são dependentes de  $\beta$  e  $\alpha$ . Esta dependência pode ser reescrita computando primeiramente o movimento em função de  $\beta$  e somente então em função de  $\alpha$ . Esta ordem deve ser respeitada para evitar que a influência do valor de  $\alpha$ , acarrete no movimento muito próximo ou muito distante do vaga-lume comparado. A Eq. (12) pode ser reformulada como

$$\begin{aligned}x_i &\leftarrow (1 - \beta)x_i + \beta x_j, \\ x_i &\leftarrow x_i + \alpha \left( rand - \frac{1}{2} \right).\end{aligned}\tag{15}$$

### **Passo $\beta$**

No decorrer das iterações do algoritmo as distâncias dos vaga-lumes em relação a outros vaga-lumes tendem a uma aproximação, ou seja, suas distâncias diminuem em relação às anteriores. Como para variáveis discretas utiliza-se a distância de Hamming, as quantidades de elementos comuns devem aumentar para obterem-se as menores distâncias entre dois vaga-lumes. O passo- $\beta$ , inicia-se então, com a checagem dos elementos comuns entre as permutações. Considerando que a permutação  $\pi_1 = [4 \ 9 \ 3 \ 7 \ 6 \ 8 \ 2 \ 1 \ 5]$  atrai a permutação  $\pi_2 = [4 \ 1 \ 3 \ 2 \ 6 \ 5 \ 9 \ 7 \ 8]$ , onde nesta primeira etapa resulta em  $\pi_{1 \rightarrow 2}$  como

$$\begin{aligned}\pi_1 &= [4 \ 9 \ 3 \ 7 \ 6 \ 8 \ 2 \ 1 \ 5] \\ \pi_2 &= [4 \ 1 \ 3 \ 2 \ 6 \ 5 \ 9 \ 7 \ 8] \\ \pi_{1 \rightarrow 2} &= [4 \ \_ \ 3 \ \_ \ 6 \ \_ \ \_ \ \_ \ \_].\end{aligned}\tag{16}$$

Os espaços vazios em  $\pi_{1 \rightarrow 2}$  são completados considerando as permutações anteriores. Para a probabilidade  $\beta = \frac{1}{1 + \gamma \cdot r_{\pi_1, \pi_2}^2}$  onde  $r_{\pi_1, \pi_2} = \text{distânciaHamming}(\pi_1, \pi_2)$ , insere-se na permutação  $\pi_{1 \rightarrow 2}$  um elemento de  $\pi_2$ , ou mantém um elemento de  $\pi_1$ . Neste processo os elementos não devem se repetir, caso isto ocorra deixa-se o espaço vazio, e continua o preenchimento no próximo vazio seguindo o mesmo procedimento. Se mesmo após esta etapa houver espaços vazios, estes são então preenchidos randomicamente com os elementos não usados ainda. Supondo a probabilidade  $\beta = 0,21739$  o exemplo acima poderia ser preenchido como na Eq. (17).

Finalmente completar o último vazio com o elemento não usado. No exemplo acima o elemento correspondente é o número 9, portanto  $\pi_{1 \rightarrow 2} = [4 \ 1 \ 3 \ 7 \ 6 \ 8 \ 2 \ 9 \ 5]$ . Resumindo, a  $r_{\pi_1, \pi_2} = \text{distânciaHamming}(\pi_1, \pi_2) = 6$ , a  $r_{\pi_{1 \rightarrow 2}, \pi_2} = \text{distânciaHamming}(\pi_{1 \rightarrow 2}, \pi_2) = 5$ , assim em relação a  $\pi_2$  há uma diferença na distância de uma unidade.

$$\begin{aligned}
 \pi_1 &= [4 \ 9 \ 3 \ 7 \ 6 \ 8 \ 2 \ 1 \ 5] \\
 \pi_2 &= [4 \ 1 \ 3 \ 2 \ 6 \ 5 \ 9 \ 7 \ 8] \\
 \text{início } \pi_{1 \rightarrow 2} &= [4 \ _ \ 3 \ _ \ 6 \ _ \ _ \ _ \ _] \\
 \text{posição } 6 \ \pi_{1 \rightarrow 2} &= [4 \ _ \ 3 \ _ \ 6 \ 8 \ _ \ _ \ _] \\
 \text{posição } 2 \ \pi_{1 \rightarrow 2} &= [4 \ 1 \ 3 \ _ \ 6 \ 8 \ _ \ _ \ _] \\
 \text{posição } 9 \ \pi_{1 \rightarrow 2} &= [4 \ 1 \ 3 \ _ \ 6 \ 8 \ _ \ _ \ 5] \\
 \text{posição } 4 \ \pi_{1 \rightarrow 2} &= [4 \ 1 \ 3 \ 7 \ 6 \ 8 \ _ \ _ \ 5] \\
 \text{posição } 8 \ \pi_{1 \rightarrow 2} &= [4 \ 1 \ 3 \ 7 \ 6 \ 8 \ _ \ _ \ 5], \text{ permanece vazia, 1 e 7 já usados} \\
 \text{posição } 7 \ \pi_{1 \rightarrow 2} &= [4 \ 1 \ 3 \ 7 \ 6 \ 8 \ 2 \ _ \ 5].
 \end{aligned} \tag{17}$$

### **Passo $\alpha$**

O passo- $\alpha$  consiste em permutar dois elementos vizinhos. Esta permuta pode ocorrer de duas maneiras, ou pela troca randômica ( $\alpha \cdot \text{rand}$ ) de dois elementos ou escolher randomicamente muitos elementos ( $\alpha \cdot \text{rand}$ ) e embaralhar suas posições. A primeira opção é mais fácil de implementar, mas resulta em menos soluções que a segunda. Pois, realizando duas trocas a distância resultante pode aumentar as permutações em 4, e para 3 trocas aumentar em 6 as permutações, etc... A segunda opção permite então soluções com maiores variabilidades, portanto esta foi a opção considerada por Durkota (2011), na variante discreta do algoritmo de vaga-lumes.

## **4 ALGORITMO DE VAGA-LUMES APLICADO À BUSCA DE ORIENTAÇÕES ÓTIMAS DE LÂMINAS EM MATERIAL COMPÓSITO**

A metaheurística de vaga-lumes discreta é aplicável a material compósito considerando que o empilhamento é um problema de otimização combinatória. A sequência das orientações de cada lâmina determina a sequência de empilhamento do laminado. Este empilhamento é dito simétrico se apresentar simetria em geometria e propriedades em relação ao seu eixo médio ao longo da espessura. O laminado é balanceado se para cada lâmina com orientação  $-\theta$  tem-se uma lâmina correspondente de mesmo material com orientação  $+\theta$ . O empilhamento ótimo é a melhor solução de empilhamento encontrada para a função objetivo

especificada. Esta sequência é discreta, pois suas variáveis são discretas e normalmente as lâminas têm as seguintes orientações  $0^\circ, \pm 45^\circ, 90^\circ$ .

A Figura 3 apresenta um diagrama esquemático do algoritmo de vaga-lumes aplicado a material compósito laminado. A função objetivo é a carga de flambagem e os procedimentos do algoritmo são descritos e correlacionados com uma aplicação a material compósito. Inicialmente, necessita-se definir os parâmetros iniciais do algoritmo ( $nr_{vl}, I_0, \beta_0, \gamma$  e  $\alpha$ ). Respectivamente, estes equivalem ao número de soluções iniciais, a intensidade inicial de luminosidade que diminui com o aumento da distância entre dois vaga-lumes, a atratividade inicial, o coeficiente de absorção de luz e o parâmetro que auxilia na busca global.

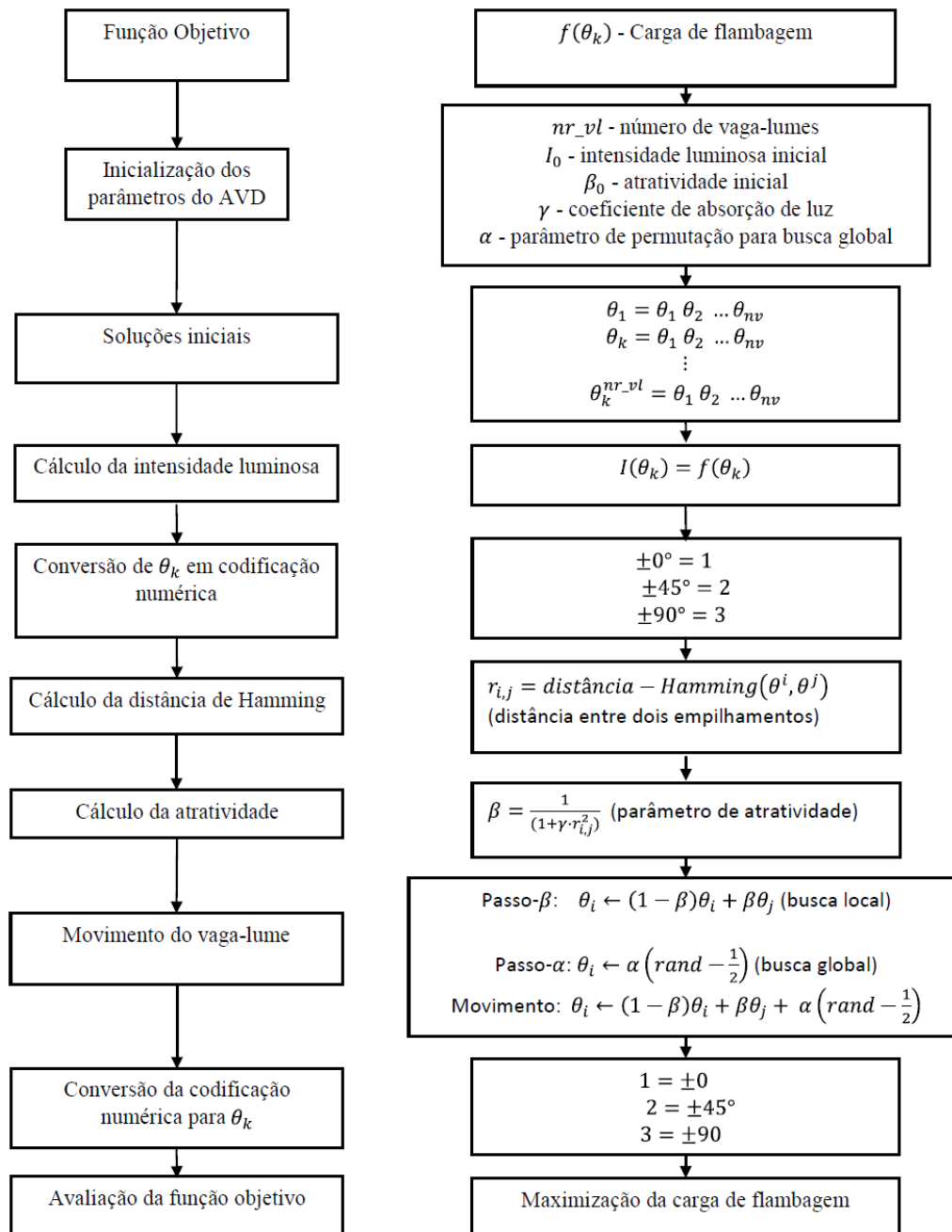


Figura 3- Procedimentos do algoritmo de vaga-lume discreto aplicado a compósito

O conjunto de soluções iniciais é gerado randomicamente para um determinado laminado. Calcula-se a intensidade luminosa para cada uma destas soluções o que equivale a calcular a função objetivo para as sequências de empilhamento obtidas. Para a implementação do algoritmo de vaga-lume as funções atratividade, distância e movimento foram considerados como expostos na Seção 3. A distância de Hamming, do passo- $\beta$  e o passo- $\alpha$  são difíceis de serem implementadas diretamente considerando as variáveis discretas  $\{0_2, \pm 45, 90_2\}$ . Como se observa na Eq. (18), não é possível calcular a distância de Hamming para a permutação  $\pi_{\theta_1 \rightarrow \theta_2}$ , pois o primeiro elemento é 0 em  $\pi_{\theta_1}$  e 4 para  $\pi_{\theta_2}$ , para o segundo elemento 0 para  $\pi_{\theta_1}$  e 5 para  $\pi_{\theta_2}$ . Entretanto os valores dos ângulos do primeiro elemento deveriam ser 0 em  $\pi_{\theta_1}$  e 45 para  $\pi_{\theta_2}$  ou para o último elemento 90 para  $\pi_{\theta_1}$  e 0 para  $\pi_{\theta_2}$  como descritos a seguir

$$\begin{aligned}\pi_{\theta_1} &= [0 \ 0 \ 45 \ -45 \ 90 \ 90] \\ \pi_{\theta_2} &= [45 \ -45 \ 90 \ 90 \ 0 \ 0] \\ \pi_{\theta_1 \rightarrow \theta_2} &= [- \ - \ - \ - \ - \ -].\end{aligned}\tag{18}$$

Para o cálculo da distância de Hamming adotou-se então a seguinte codificação numérica para os ângulos:  $0^\circ = 1$ ,  $45^\circ = 2$ ,  $90^\circ = 3$ . O conjunto de vaga-lumes iniciais representados pelos empilhamentos das orientações foram convertidos em 1, 2 e 3 e calcula-se a distância de Hamming,  $r_{\pi_{\theta_1 \rightarrow \theta_2}} = \text{distânciaHamming}(\pi_{\theta_1}, \pi_{\theta_2}) = 6$  onde observa-se que todos os valores divergem como representado abaixo

$$\begin{aligned}\pi_{\theta_1} &= [1 \ 1 \ 2 \ 2 \ 3 \ 3] \\ \pi_{\theta_2} &= [2 \ 2 \ 3 \ 3 \ 1 \ 1] \\ \pi_{\theta_1 \rightarrow \theta_2} &= [- \ - \ - \ - \ - \ -].\end{aligned}\tag{19}$$

A partir da distância de Hamming calcula-se a atratividade entre os vaga-lumes em função de suas distâncias. O índice de atratividade possibilita realizar uma busca local e determina também o movimento que o vaga-lume fará formulado pelo passo- $\beta$ . Na sequência realiza-se o passo- $\alpha$ , ou seja, uma perturbação randômica no resultado caracterizando uma busca global. A soma destes dois procedimentos completa o movimento de uma iteração do algoritmo. A sequência de empilhamento é reconvertida em ângulos 0, 45 e 90 para a avaliação da função objetivo. A melhor solução encontrada é armazenada e reavaliada a cada ciclo do algoritmo até que um critério de parada seja atingido.

## 5 PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO E RESULTADOS NUMÉRICOS

O problema de otimização aqui estudado pode ser formulado como

$$\begin{aligned}\text{Obter:} \quad & \theta_k, \theta_k \in \{0_2, \pm 45, 90_2\}, k = 1, \dots, n \\ \text{Maximizar:} \quad & \lambda_{cf} \text{ (fator de carga de flambagem)} \\ \text{Sujeito a:} \quad & \text{Simétrico e balanceado;} \\ & \text{máximo 4 lâminas contíguas com mesma orientação}\end{aligned}\tag{20}$$

onde  $\theta_k$  representam as orientações de duas lâminas contíguas, uma positiva e outra negativa, garantindo assim o balanceamento,  $k$  é o índice da sequência do empilhamento das lâminas,  $n$

a metade do número total de lâminas e  $\lambda_{cf}$  o fator de carga de flambagem dada pela Eq. (1). A espessura total do laminado  $h$  é considerada constante, ou seja, o número total de lâminas também permanece constante.

O algoritmo foi programado em linguagem Python e os resultados numéricos apresentados são para uma placa retangular, conforme a Figura 1 com 48 lâminas (caso 1) e 64 lâminas (caso 2). Como o algoritmo de vaga-lumes depende dos parâmetros  $\alpha$  e  $\gamma$ , foram realizados testes iniciais para a determinação destes. Os parâmetros foram testados variando  $\alpha$  com 0,1; 0,5; 0,75; 1 e  $\gamma$  com 0; 0,2; 0,4; 0,6; 0,8; 1; 2; 4; 6; 8; 10 e por tentativas e erros foram selecionados os que apresentaram os melhores resultados da função objetivo. Assim,  $\alpha = 1$  e  $\gamma = 0,8$  foram estabelecidos para as otimizações dos casos 1 e 2 apresentados a seguir. Valores iniciais para a intensidade luminosa  $I_0 = 0$ , para a atratividade inicial  $\beta_0 = 1$  e o número de vaga-lumes  $nr_{vl} = 25$  também foram inicialmente parametrizados no algoritmo.

## 5.1 Caso 1 – Placa retangular com 48 lâminas

Para as avaliações numéricas os valores das propriedades do material, geometria e carregamentos são apresentadas nas Tabela 1, Tabela 2, e Tabela 3, respectivamente. Estes valores foram baseados no trabalho de Aymerich e Serra (2008).

**Tabela 1. Propriedades da lâmina de grafite/epoxy para o caso 1**

| Propriedades elásticas do material |             |                |            | Densidade                   |
|------------------------------------|-------------|----------------|------------|-----------------------------|
| $E_1$ (GPa)                        | $E_2$ (GPa) | $G_{12}$ (GPa) | $\nu_{12}$ | $\rho$ (kg/m <sup>3</sup> ) |
| 127,59                             | 13,03       | 6,41           | 0,3        | 1600                        |

**Tabela 2. Geometria do laminado de 48 lâminas**

| Geometria da lâmina/laminado (mm) |                     |             |         |
|-----------------------------------|---------------------|-------------|---------|
| Quantidade de lâminas             | Espessura da lâmina | Comprimento | Largura |
| $nl$                              | $t$                 | $a$         | $b$     |
| 48                                | 0,127               | 508         | 127     |

**Tabela 3. Carregamentos do laminado de 48 lâminas**

| Carregamentos |         |               |         |               |         |
|---------------|---------|---------------|---------|---------------|---------|
| Carga 1 (N/m) |         | Carga 2 (N/m) |         | Carga 3 (N/m) |         |
| $N_x$         | $N_y$   | $N_x$         | $N_y$   | $N_x$         | $N_y$   |
| 175           | $N_x/8$ | 175           | $N_x/4$ | 175           | $N_x/2$ |

A Tabela 4 mostra os resultados do fator crítico de flambagem obtidos com o algoritmo de vaga-lumes para as três diferentes cargas após a otimização. Também são apresentados os correspondentes valores obtidos por Aymerich e Serra (2008) com o algoritmo de colônia de formigas. Pode-se observar que os valores para a carga de flambagem do presente trabalho são próximos aos obtidos por Aymerich e Serra (2008) apesar dos empilhamentos não serem os mesmos.

**Tabela 4. Resultados do fator crítico de flambagem para o caso 1 (48 lâminas)**

| Fator crítico de flambagem |                                                                                             |                |
|----------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------|----------------|
| Tipos                      | Sequência de empilhamento                                                                   | $\lambda_{cf}$ |
| Carga 1                    | $\left[ \pm 45_5 0_4 \pm 45_5 0_4 90_2 0_2 \right]_S$                                       | 14659,58       |
|                            | $\left[ \pm 45_5 0_4 90_2 0_4 \pm 45_5 0_2 \right]_S$                                       | 14610,85       |
|                            | $\left[ \pm 45_2 90_2 \pm 45_5 0_4 (\pm 45_5 0_4)_2 \pm 45_5 0_2 \right]_S$                 | 14421,31       |
|                            | $\left[ 0_2 \pm 45_5 0_4 90_2 \pm 45_3 90_2 0_4 \pm 45_5 \right]_S$                         | 14958,17       |
|                            | $\left[ \pm 45_5 0_2 \pm 45_5 90_2 \pm 45_5 90_4 \pm 45_5 90_4 \pm 45_5 \right]_S$          | 14626,92       |
|                            | $\left[ 90_2 \pm 45_5 90_2 0_2 \pm 45_5 90_2 \pm 45_5 0_2 \pm 45_5 90_4 \pm 45_5 \right]_S$ | 14469,00       |
| Carga 2                    | $\left[ \pm 45_2 90_2 \pm 45_3 0_2 \pm 45_5 0_4 \pm 45_5 0_2 \right]_S$                     | 12743,45       |
|                            | $\left[ \pm 45_5 90_2 \pm 45_4 (0_2 \pm 45_5 0_2)_2 \right]_S$                              | 12725,26       |
|                            | $\left[ 90_2 \pm 45_5 (0_2 \pm 45_5 0_2)_2 \right]_S$                                       | 12674,85       |
|                            | $\left[ \pm 45_5 90_2 \pm 45_5 0_4 \pm 45_5 90_2 0_2 90_2 \pm 45_2 (90_2 0_2)_2 \right]_S$  | 13110,26       |
|                            | $\left[ 0_2 \pm 45_5 0_2 \pm 45_3 90_2 \pm 45_2 0_4 \pm 45_5 \right]_S$                     | 13081,00       |
|                            | $\left[ 90_2 0_2 \pm 45_5 90_4 \pm 45_2 0_2 90_2 \pm 45_2 0_2 \right]_S$                    | 12929,04       |
| Carga 3                    | $\left[ 90_2 \pm 45_2 (90_2 \pm 45_5)_2 \pm 45_5 \right]_S$                                 | 9998,20        |
|                            | $\left[ 90_2 \pm 45_2 (90_2 \pm 45_5)_2 \pm 45_4 90_2 \right]_S$                            | 9997,61        |
|                            | $\left[ (90_2 \pm 45_2)_2 (90_2 \pm 45_5)_2 \pm 45_2 \right]_S$                             | 9997,61        |
|                            | $\left[ 0_2 \pm 45_5 90_2 \pm 45_5 0_2 \pm 45_4 90_2 \pm 45_5 0_2 \right]_S$                | 10000,23       |
|                            | $\left[ 0_4 90_2 0_2 \pm 45_5 0_2 0_4 \pm 45_5 0_4 \pm 45_2 90_2 \right]_S$                 | 9934,65        |
|                            | $\left[ 0_2 90_2 0_2 90_4 0_2 90_2 \pm 45_5 0_2 \pm 45_2 0_2 \right]_S$                     | 9914,77        |

## 5.2 Caso 2 – Placa retangular com 64 lâminas

Neste caso a placa apresenta 64 lâminas e os resultados das cargas de flambagem e sequências de empilhamento obtidos com o algoritmo de vaga-lumes foram comparados com aqueles do estudo de Lakshmi e Rao (2015) com o algoritmo *Harmony Search*. As relações do comprimento e largura foram variadas nas razões 2, 1 e 1/2 e os carregamentos testados são apresentados na Tabela 6. O material do laminado é o grafite/epóxi e tem os valores das propriedades apresentadas na Tabela 5.

**Tabela 5. Propriedades da lâmina de grafite/epoxy (caso 2)**

| Propriedades elásticas do material |             |                |            | Densidade                   |
|------------------------------------|-------------|----------------|------------|-----------------------------|
| $E_1$ (GPa)                        | $E_2$ (GPa) | $G_{12}$ (GPa) | $\nu_{12}$ | $\rho$ (kg/m <sup>3</sup> ) |
| 181,00                             | 10,30       | 7,17           | 0,28       | 1600                        |

**Tabela 6- Geometria e carregamentos para o laminado de 64 lâminas (caso 2)**

| Geometria da lâmina/laminado |                          |       |                  |              | Carregamentos |       |
|------------------------------|--------------------------|-------|------------------|--------------|---------------|-------|
| Quantidade de lâminas        | Espessura da lâmina (mm) | Tipos | Comprimento (mm) | Largura (mm) | Cargas (N/m)  |       |
| $nl$                         | $t$                      |       | $a$              | $b$          | $N_x$         | $N_y$ |
| 64                           | 0,127                    | LC1   | 508              | 254          | 1             | 1     |
|                              |                          | LC2   | 508              | 508          | 1             | 1     |
|                              |                          | LC3   | 508              | 1016         | 1             | 1     |
|                              |                          | LC4   | 508              | 254          | 1             | 0,5   |
|                              |                          | LC5   | 508              | 508          | 1             | 0,5   |
|                              |                          | LC6   | 508              | 1016         | 1             | 0,5   |
|                              |                          | LC7   | 508              | 254          | 1             | 2     |
|                              |                          | LC8   | 508              | 508          | 1             | 2     |
|                              |                          | LC9   | 508              | 1016         | 1             | 2     |

A Tabela 7 apresenta os resultados do fator crítico de flambagem para 9 diferentes tipos de laminado, obtidos com a variação da largura do laminado e com diferentes cargas. Os empilhamentos otimizados considerando 4 lâminas contíguas do mesmo ângulo, com o algoritmo de vaga-lumes conforme a função objetivo dada pela Eq. (20) são apresentados com seus respectivos fatores de carga de flambagem. Nota-se que estes valores são aproximadamente iguais ao trabalho utilizado para a comparação, embora alguns empilhamentos não sejam os mesmos.

Tabela 7– Resultados do fator crítico de flambagem para o caso 2 (64 lâminas).

|       |                     | Fator crítico de flambagem                                                          |                |
|-------|---------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|----------------|
| Tipos |                     | Sequência de empilhamento                                                           | $\lambda_{cf}$ |
| LC1   | Lakshmi e Rao, 2015 | $[90_4 \pm 45 \ 90_4 \pm 45 \ 90_4 \pm 45 \ 90_8 \pm 45 \ 90_2]_S$                  | 696476,2       |
|       | Presente            | $[0_2 \pm 45_3 \ 0_2 \ 90_4 \ 0_4 \pm 45 \ 90_4 \ 0_2 \pm 45 \ 90_2 \pm 45]_S$      | 700697,4       |
| LC2   | Lakshmi e Rao, 2015 | $[\pm 45_{32}]_S$                                                                   | 243079,8       |
|       | Presente            | $[\pm 45_{32}]_S$                                                                   | 249117,0       |
| LC3   | Lakshmi e Rao, 2015 | $[0_6 \pm 45 \ 0_2 \pm 45 \ 0_2 \pm 45 \ 0_8 \pm 45 \ 0_6]_S$                       | 174140,7       |
|       | Presente            | $[0_2 \ 90_4 \ 0_2 \ 90_2 \ 0_2 \ 90_2 \ 0_2 \ 90_4 \pm 45_3 \ 0_2 \ 90_4]_S$       | 170645,7       |
| LC4   | Lakshmi e Rao, 2015 | $[90_4 \pm 45_4 \ 90_2 (\pm 45 \ 90_4)_2 \ 90_4 (\pm 45 \ 90_2)_2]_S$               | 1058848,6      |
|       | Presente            | $[90_4 \pm 45 \ 90_4 \ 0_2 \pm 45 \ 90_2 \ 0_2 \pm 45 \ 0_2 \ 90_4 \ 0_4 \ 90_2]_S$ | 1042293,2      |
| LC5   | Lakshmi e Rao, 2015 | $[\pm 45_{32}]_S$                                                                   | 324106,4       |
|       | Presente            | $[\pm 45_{32}]_S$                                                                   | 332156,0       |
| LC6   | Lakshmi e Rao, 2015 | $[0_{16} \pm 45 \ 0_6 \pm 45 \ 0_2 \pm 45 \ 0_2]_S$                                 | 206714,1       |
|       | Presente            | $[90_2 \ 0_4 \ 90_2 \pm 45_2 \ 0_6 \ 90_2 \pm 45_2 \ 90_2 \pm 45 \ 0_2 \ 90_2]_S$   | 205892,0       |
| LC7   | Lakshmi e Rao, 2015 | $[90_{16} \pm 45 \ 90_6 \pm 45 \ 90_2 \pm 45 \ 90_2]_S$                             | 413414,4       |
|       | Presente            | $[\pm 45_2 \ 90_4 \ 0_4 \pm 45 \ 90_2 \pm 45_3 \ 0_4 \ 90_2 \ 0_4]_S$               | 414142,0       |
| LC8   | Lakshmi e Rao, 2015 | $[\pm 45_{32}]_S$                                                                   | 162053,2       |
|       | Presente            | $[\pm 45_{32}]_S$                                                                   | 166078,0       |
| LC9   | Lakshmi e Rao, 2015 | $[0_4 \pm 45_3 \ 0_2 \pm 45 \ 0_2 \pm 45_4 \ 0_6 \pm 45]_S$                         | 132395,6       |
|       | Presente            | $[\pm 45_3 \ 90_2 \pm 45 \ 90_2 \ 0_6 \pm 45 \ 90_2 \pm 45_2 \ 0_6 \pm 45]_S$       | 138901,6       |

Não foram comparados o número total de avaliações da função objetivo, pois as metodologias adotadas nos trabalhos de Aymerich e Serra (2008) e Lakshmi e Rao (2015) são

baseadas em uma confiabilidade do algoritmo que por ora não era o objetivo do presente trabalho. Um estudo nesse sentido está sendo desenvolvido pelos autores.

## 6 CONCLUSÕES

Neste estudo, o algoritmo de vaga-lumes foi aplicado à otimização da carga de flambagem de placas compósitas laminadas. O algoritmo foi adaptado para variáveis discretas, no caso, os ângulos de orientação das lâminas. Diversos testes foram realizados para diferentes cargas (caso 1) cujos resultados apresentaram uma diferença média global de 1,01% comparados com o estudo de Aymerich e Serra (2008). No caso 2, diferentes cargas e diferentes relações largura-comprimento da placa foram analisadas, cuja média da diferença global dos resultados foi de 1,9% em relação ao trabalho de referência adotado. Ainda no caso 2, a situação LC7 apresentou o melhor resultado com 0,2% e a situação LC9 o pior com 4,9%. Os resultados obtidos para os dois casos mostraram-se compatíveis com outras técnicas de otimização apresentadas na literatura.

### *Agradecimentos*

Este artigo foi realizado com o apoio da CAPES através da bolsa de doutorado para o primeiro autor e de mestrado para o segundo autor.

## REFERÊNCIAS

- Arnold, R.R. and Mayers, J., 1984. Buckling, postbuckling, and crippling of materially nonlinear laminated composite plates. *International Journal of Solids Structures*, vol. 20, pp. 863-880.
- Aymerich, F., Serra, M., 2008. Optimization of laminate stacking sequence for maximum buckling load using ant colony optimization (ACO) metaheuristic. *Composites:Part A*, vol. 2, pp. 262-272.
- Azad, S. K., Azad, S. K., 2011. Optimum design of structures using an improved firefly algorithm. *International Journal of Optimization in Civil Engineering*, vol. 2, pp. 327-340.
- Baba, B.O., 2007. Buckling behavior of laminated composite plates. *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, vol. 26, pp. 1637-1655.
- Durkota, K., 2011. Implementation of a discrete firefly algorithm for the QAP problem within the seage framework. Bachelor thesis, Czech Technical University in Prague.
- Erdal, O., Sonmez, F. O., 2005. Optimum design of composite laminates for maximum buckling load capacity using simulated annealing. *Composite Structures*, vol. 71, pp. 45-52.
- Fister, I., Fister Jr., I., Yang, X.-S., Brest, J., 2013. A comprehensive review of firefly algorithms. *Swarm and Evolutionary Computation*, vol. 13, pp. 34-46.

- Gandomi, A. H., Yang, X.-S., Talatahari, S., Alavi, A. H., 2013. Firefly algorithms with chaos. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, vol. 18, pp. 89-98.
- Gomes, H. M., Rodrigues, E. R., 2013. Algoritmo meta-heurístico de vaga-lume para a otimização estrutural em tamanho e forma com restrições de frequências naturais. *Engenharia Estudo e Pesquisa*, vol. 2, n. 2, pp. 3-15.
- Hare, W., Nutini, J., Tesfamariam, S., 2013. A survey of non-gradient optimization methods in structural engineering. *Advances in Engineering Software*, vol. 59, pp. 19-28.
- Hirschberg, D. S., 1977. Algorithms for the longest common subsequence problem. *Journal of the Association for Computing Machinery*, vol. 24, n. 2, pp. 19-28.
- Jones, R. M. 1999. *Mechanics of composite material*. 2nd ed., Taylor & Francis, Philadelphia.
- Kavousi-Fard, A., Samet., H., Marzbani, F., 2014. A new hybrid modified firefly algorithm and support vector regression model for accurate short term load forecasting. *Expert Systems with Applications*, vol. 41, pp. 6047-6056.
- Kumbharana, S. N., Pandey, G. M., 2013. Solving travelling salesman problem using firefly algorithm. *International Journal for Research in Science & Advanced technologies*, vol. 2, pp. 53-57.
- Koide, R. M., França, G. V. Z., Luersen, M. A., 2013. An ant colony algorithm applied to lay-up of laminated composite plates. *Latin American Journal of Solids and Structures*, vol. 10, pp. 491-504.
- Lakshmi, K., Rao, A. R. M., 2015. Optimal design of laminate composite plates using dynamic hybrid adaptive harmony search algorithm. *Reinforced Plastics & Composites*, vol. 0, pp. 1-26.
- Leissa, A.W., 1993. Buckling of Composite Plates. *Composite Structures* , vol. 1, pp. 51-66.
- Le Riche, R. and Haftka, R.T., 1993. Optimization of laminated stacking sequence for buckling load maximization by genetic algorithm. *AIAA Journal*, vol. 31, pp. 951-956.
- Marichelvam, M. K., Prabakaran, T., Yang, X.-S., 2014. A discrete firefly algorithm for the multi-objective hybrid flowshop scheduling problems. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, vol. 18, n. 2, pp. 301-305.
- Poursalehi, N., Zolfaghari, A., Minuchehr, A., 2013. Multi-objective loading pattern enhancement of PWR based on the discrete firefly algorithm. *Annals of Nuclear Energy*, vol. 57, pp. 151-163.
- Rizk-Allah, R. M., Zaki, E. M., El-Sawy, A. A., 2013. Hybridizing ant colony optimization with firefly algorithm for unconstrained optimization problems. *Applied Mathematics and Computation*, vol. 224, pp. 473-483.
- Sayadi, M. K., Ramezani, R., Ghaffari-Nasab, N., 2010. A discrete firefly meta-heuristic with local search for makespan minimization in permutation flow shop scheduling problems. *International Journal of Industrial Engineering Computations*, vol. 1, pp. 1-10.
- Sayadi, M. K., Hafezalkotob, A., Naini, S. G. J., 2013. Firefly-inspired algorithm for discrete optimization problems: An application to manufacturing cell formation. *Journal of Manufacturing Systems*, vol. 32, pp. 78-84.

- Srivatsava, P. R., Mallikarjun, B., Yang, X.-S. , 2013. Optimal test sequence generation using firefly algorithm. *Swarm and Evolutionary Computation*, vol. 8, pp. 44-53.
- Sundaresan, P., Singh, G. and Rao, G.V., 1996. Buckling and post-buckling analysis of moderately thick laminated rectangular plates. *Computers & Structures*, vol. 61, pp. 79-86.
- Tuba, M., Bacanin, N., 2014. Improved seeker optimization algorithm hybridized with firefly algorithm for constrained optimization problems. *Neurocomputing*, vol. 143, pp. 197-207.
- Viana, G. V. R., Moura, H. A. S., 2010. Algoritmos para alinhamento de sequências. *Revista científica da Faculdade Lourenço Filho*, vol. 7, pp. 67-82.
- Yang, X.-S., 2009. Firefly algorithm for multimodal optimization. In: *Stochastic Algorithms: Foundations and Applications, SAGA 2009, Lecture Notes in Computer Sciences*, vol. 5792, pp. 169-178.
- Yang, X.-S., 2010a. *Nature-Inspired Metaheuristic Algorithms*, 2nd ed., Luniver Press.
- Yang, X.-S., 2010b. Firefly algorithm, Stochastic test functions and design optimisation. *International Journal of Bio-Inspired Computation*, vol. 2, n. 2, pp. 78-84.
- Yang, X.-S., 2010c. Firefly algorithm, Lévy flights and global optimization. In: *Research and Development in Intelligent Systems XXVI (Eds M. Bramer, R. Ellis, M. Petridis)*, Springer London, pp. 209-218.
- Yang, X.-S., He, X., 2013. Firefly algorithm: Recent advances and applications. *International Journal of Swarm Intelligence*, vol. 1, n. 1, pp. 36-50.