



MÉTODO DA BUSCA HARMÔNICA APLICADO NA OTIMIZAÇÃO DE SEÇÕES DE PILARES EM CONCRETO ARMADO

Guilherme Fleith de Medeiros

guifleith@upf.br

Universidade de Passo Fundo

Curso de Engenharia Civil

Campus Bairro São José, 99001-970, Passo Fundo, RS, Brasil

Moacir Kripka

mkripka@upf.br

Universidade de Passo Fundo

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil e Ambiental

Campus Bairro São José, 99001-970, Passo Fundo, RS, Brasil

Resumo: Além do ganho econômico, lançar mão de técnicas de otimização no desenvolvimento de um projeto estrutural pode reduzir o consumo de materiais cuja extração, fabricação e transporte causam um grande dano ambiental, como é o caso dos insumos do concreto armado. Neste sentido, o presente trabalho apresenta a otimização do custo de seções transversais de pilares retangulares de concreto armado submetidos à flexocompressão reta. As variáveis consideradas na formulação do problema foram as dimensões da seção de concreto, a quantidade e bitolas das armaduras, bem como as classes de resistência do concreto. Os pilares foram verificados quanto aos Estados Limites Últimos e Estados Limites de Serviço, conforme os preceitos da norma brasileira ABNT NBR 6118 (2007). Para operacionalizar a otimização dos pilares por meio da formulação desenvolvida, foi implementado um algoritmo empregando o método de otimização da Busca Harmônica, o qual consiste numa meta-heurística desenvolvida em analogia ao processo de obtenção da melhor harmonia musical. Na implementação efetuada, são propostas e incorporadas diversas alterações no método original. Os resultados foram comparados aos obtidos por outros métodos de otimização, atestando a eficiência do método empregado.

Palavras-chave: Otimização, Pilares, Concreto armado, Busca harmônica.

1 INTRODUÇÃO

O projeto estrutural de edificações envolve um grande número de variáveis e um processo iterativo de busca da solução final, com uma infinidade de soluções possíveis. O resultado obtido, em termos econômicos, é muito dependente da solução de partida proposta pelo projetista, a qual é definida a partir de sua sensibilidade e experiência prévia relativa a problemas análogos. Técnicas de otimização permitem sistematizar o processo de busca pela melhor solução, auxiliando na etapa de pré-dimensionamento estrutural e, conseqüentemente, na obtenção de estruturas de menor custo final. Além das vantagens financeiras, a redução no consumo dos insumos tem sua importância ambiental, reduzindo os impactos oriundos de sua extração, fabricação e transporte.

Uma das razões normalmente atribuída para a pouca aplicação das técnicas de otimização em problemas reais de engenharia estrutural consiste na complexidade do modelo matemático gerado, normalmente descrito por funções de comportamento não linear e pelo espaço não convexo de soluções, acarretando na existência de vários pontos de ótimo. Para problemas dessa natureza, a resolução por métodos matemáticos de programação, os quais empregam derivadas ou aproximações destas, se mostra pouco eficiente. Para a resolução deste tipo de problema os métodos heurísticos têm desempenhado um papel importante. Os mesmos são normalmente inspirados em fenômenos que ocorrem na natureza, fundamentando seu funcionamento em regras probabilísticas, e trabalhando apenas com os valores da função e com os parâmetros característicos de cada método, baseados em critérios probabilísticos que visam a obtenção do ótimo global. Algoritmos Genéticos e *Simulated Annealing* são exemplos de heurísticas largamente difundidas na otimização estrutural. Mais recente que os métodos citados, o método de otimização da Busca Harmônica consiste numa meta-heurística desenvolvida em analogia ao processo de obtenção da melhor harmonia musical, e tem sido empregado com sucesso em problemas de otimização estrutural.

No campo da engenharia estrutural, o uso de técnicas de otimização geralmente visa minimizar o custo ou o peso de uma estrutura ou de um elemento, obedecendo-se a limitações estabelecidas pelas normas técnicas. Basicamente, os estudos relacionados ao emprego da otimização, encontrados na literatura, estão focados na otimização da geometria, da topologia, e das dimensões das seções transversais (que representam a maioria dos estudos), ou na combinação desses casos. Entre os artigos que envolvem a otimização de pilares de concreto armado, destacam-se os estudos de Zielinski, Long e Troitsky (1995), que apresentou um procedimento para a otimização de pilares de concreto armado por meio de programação matemática; Argolo (2000), que desenvolveu um estudo de otimização de seções de concreto armado submetidas à flexão uniaxial utilizando Algoritmos Genéticos; Camp, Pezeshk e Hansson (2003), que minimizaram pórticos planos e pilares curtos de concreto armado por meio de Algoritmos Genéticos; Rodrigues Júnior (2005), que propôs uma formulação para o projeto ideal de pilares de concreto armado de edifícios altos, efetuando a otimização por meio da programação matemática; e Martínez-Martín (2008), que propôs a otimização de pilares retangulares de seção vazada de concreto armado de viadutos rodoviários e ferroviários utilizando diversos métodos de otimização. Mais recentemente, Bordignon e Kripka (2012) efetuaram a minimização do custo de seções de pilares em concreto armado empregando o *Simulated Annealing*.

Este trabalho apresenta a aplicação do método da Busca Harmônica para a otimização de pilares de concreto armado submetidos à flexocompressão reta. O objetivo consistiu na minimização dos custos da seção, considerando o custo de cada insumo do concreto armado (concreto, aço e fôrmas). A implementação do método incorporou diversas modificações no algoritmo original.

2 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

Considerando uma seção transversal retangular qualquer, no caso submetida à flexocompressão reta, o objetivo do dimensionamento ótimo consiste em obter uma configuração que seja capaz de produzir esforços resistentes (esforço normal N_{rd} e momento fletor M_{rd}), iguais ou superiores aos esforços solicitantes (N_{sd} e M_{sd}), com o mínimo custo.

A formulação do problema de otimização parte da consideração de alguns parâmetros de entrada, definidos previamente e que representam, basicamente, os esforços atuantes no elemento e as características e custos unitários dos materiais. Esses parâmetros de projeto assumem valores fixos, ou seja, não se alteram durante o processo de otimização. Assim, além dos esforços solicitantes, devem ser conhecidos a priori os seguintes parâmetros: c = cobrimento da armadura; f_{yk} = tensão característica de escoamento do aço; E_s = módulo de elasticidade longitudinal do aço; C_c = custo do concreto por unidade de volume; C_s = custo do aço por unidade de massa, e C_f = custo das fôrmas, por unidade de área.

Para os parâmetros variáveis adotaram-se a classe de resistência do concreto (f_{ck}), as dimensões da seção de concreto, bem como as áreas de armadura, conforme identificado na Fig. 1. As variáveis x_1 e x_2 representam, respectivamente, a largura (b) e a altura (h) da seção transversal; x_3 é o diâmetro das quatro barras dos cantos; x_4 é o número de barras nas duas camadas paralelas a x_1 ; x_5 é o diâmetro nas duas camadas paralelas a x_1 ; x_6 é o número de camadas com duas barras paralelas a x_2 ; e x_7 é o diâmetro das barras nas camadas paralelas a x_2 .

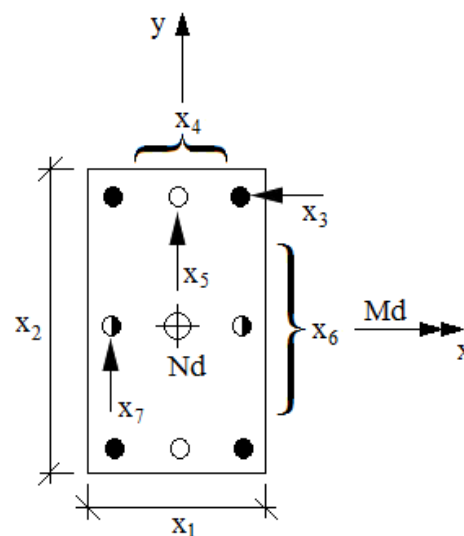


Figura 1. Variáveis de projeto.

Todas as variáveis do problema foram tratadas como discretas. Os diâmetros das armaduras foram limitados aos valores comerciais existentes. As dimensões das seções transversais poderiam variar a cada centímetro ou, alternativamente, a cada 5 cm, segundo prática corrente.

A função custo, a ser minimizada no processo de otimização, considerou o custo total dos materiais, sendo expressa na Eq. 1, onde a primeira parcela da função representa o custo do concreto, a segunda o custo da armadura longitudinal e última parcela representa o custo

relativo à fôrma. Todos os custos fornecem um valor relativo para cada unidade de comprimento do elemento:

$$f(x) = x_1 \cdot x_2 \cdot C_c + 7850 \cdot \pi \cdot (x_3^2 + 0,5 \cdot x_4 \cdot x_5^2 + 0,5 \cdot x_6 \cdot x_7^2) \cdot C_s + 2 \cdot (x_1 + x_2) \cdot C_f \quad (1)$$

No processo de minimização dos custos deve-se respeitar uma série de impedimentos estabelecidos em norma, quanto a critérios construtivos e de resistência, as chamadas restrições. Todas as variáveis de projeto foram limitadas de forma a atender as recomendações da norma ABNT NBR 6118 (2007), no que diz respeito a dimensões, espaçamentos e taxa de armadura. Os limites inferiores para as dimensões da seção de concreto (variáveis x_1 e x_2) foram definidos como sendo iguais a 12 cm, sendo que para valores entre 12 e 19 cm o carregamento deve ser majorado. Os valores superiores foram estabelecidos de forma a serem grandes o suficiente para não interferir nos resultados do processo de otimização. Pela mesma razão, as variáveis x_4 e x_6 (número de barras nas duas camadas paralelas a x_1 e número de camadas com duas barras paralelas a x_2 , respectivamente) podem assumir valores inteiros entre 0 e 18. Além disso, as variáveis x_3 , x_5 e x_7 , que representam as barras longitudinais, ficaram restritas às bitolas de diâmetro entre 10 e 25 mm.

O processo iterativo para a verificação das seções submetidas à flexocompressão reta tem início a partir do conhecimento do esforço normal atuante de cálculo (N_{sd}) e do momento fletor de cálculo (M_{sd}), bem como da seção transversal de concreto adotada, cujos diâmetros e arranjo das barras de aço consideradas constituem uma solução gerada respeitando os intervalos para as variáveis. Os esforços resistentes (N_{rd} , M_{rd}) são obtidos por equilíbrio, e são função da profundidade da linha neutra e da disposição da armadura. A determinação da linha neutra constitui um processo iterativo, onde se busca igualar os valores de esforço normal resistente e solicitante. Calcula-se então o momento resistente (M_{rd}) da seção, o qual deve ser maior ou igual ao momento solicitante (M_{sd}).

Além dos esforços, uma série de restrições dimensionais deve ser obedecida no dimensionamento dos pilares, tais como espaçamentos limites entre barras de aço e taxas de armadura mínima e máxima. Um maior detalhamento das restrições consideradas no presente trabalho pode ser obtido em Medeiros (2012).

Para o tratamento das restrições foi empregada uma técnica de penalização estática, na qual os problemas com restrição são transformados em problemas irrestritos. A configuração correspondente a uma solução não factível, $f(x)$, é penalizada pelo incremento de seu custo, proporcional ao grau de violação de cada uma das m restrições de desigualdade $g(x)$, multiplicadas por uma constante γ . Assim, a função a ser efetivamente minimizada é $F(x)$, sendo

$$F(x) = f(x) + P(x)$$

e

$$P(x) = \gamma \sum_{i=1}^m [\max(0, g(x))]$$

Na implementação, as restrições foram todas normalizadas. O valor do coeficiente γ foi fixado, com base em diversos testes efetuados, em 10^6 . Observou-se que, para valores inferiores, o algoritmo aceitava soluções que frequentemente violavam alguma das restrições. Por outro lado, um valor muito superior para γ equivale a dar igual tratamento a todas as soluções infactíveis, independentemente do grau de violação das restrições.

3 ALGORITMO DA BUSCA HARMÔNICA

O Algoritmo da Busca Harmônica (*Harmony Search*), ou simplesmente HS, é uma meta heurística proposta por Geem, Kim e Loganathan (2001). O método imita o processo de improvisação musical do Jazz, onde os músicos tentam encontrar, através de repetidas tentativas, a harmonia perfeita, ou seja, a melhor solução para um dado problema. As iterações são chamadas de ensaios ou improvisações, as variáveis correspondem aos instrumentos musicais, e os valores de cada variável são os sons dos instrumentos. Cada solução é denominada harmonia, e o cálculo da função objetivo é designado como estimação estética. Cinco etapas básicas caracterizam o método, as quais são descritas na sequência:

- Etapa 1 – Inicialização do problema e parâmetros do algoritmo: definição da função objetivo, do conjunto de restrições e dos parâmetros do algoritmo. Os quatro principais parâmetros são *Harmony Memory Size* (HMS), *Harmony Memory Considering Rate* (HMCR), *Pitch Adjusting Rate* (PAR) e *Maximum Improvisation* (MI).
- Etapa 2 – Inicialização da memória harmônica: definição da primeira memória harmônica, ou seja, do conjunto inicial de soluções. *Harmony Memory* (HM) é representada através de uma matriz, onde cada linha corresponde a um vetor solução, gerado aleatoriamente. Ou seja, a matriz possui número de linhas igual ao HMS e número de colunas igual ao número de variáveis do problema (N), a qual é mostrada na Eq. 2.

$$HM = \begin{bmatrix} x_1^1 & \dots & x_N^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{HMS} & \dots & x_N^{HMS} \end{bmatrix} \quad (2)$$

- Etapa 3 – Improvisar uma nova harmonia: a partir da solução inicial, é gerada uma nova harmonia. Isso pode ser realizado de três maneiras: com base na consideração da memória, por meio de ajustes finos na memória existente e através de seleção aleatória dentro do intervalo possível de soluções. Essa etapa é desenvolvida utilizando os parâmetros HMCR e PAR. Para cada variável da nova solução, deve ser gerado um número aleatório entre 0 e 1. Esse número é comparado ao valor do HMCR (taxa de escolha de um valor da memória). Se o número aleatório for menor (probabilidade igual a HMCR), o valor da respectiva variável no novo vetor solução é retirado da memória harmônica já existente. Se for maior (probabilidade igual a 1-HMCR), será criado um novo valor para a respectiva variável do vetor solução (Eq.3):

$$x_i' \leftarrow \begin{cases} x_i' \in \{x_i^1, x_i^2, \dots, x_i^{HMS}\} \text{ com probabilidade HMCR} \\ x_i' \in X_i \text{ com probabilidade } (1 - HMCR) \end{cases} \quad (3)$$

A escolha desse novo valor pode ser feita de duas maneiras distintas, conforme a Eq. 4. Para isso, gera-se, um novo número aleatório entre 0 e 1, o qual é comparado ao parâmetro PAR. Se o número for menor que a taxa (probabilidade igual a PAR), será considerada a memória harmônica, porém com pequeno ajuste, segundo a Eq. 5, cujo valor de variação, tanto para menos como para mais, é definido por *bw* (passo máximo de ajuste para o tom) e um número aleatório sorteado *rand*. Se for maior que PAR (probabilidade igual a 1-PAR), o novo valor para a variável é gerado aleatoriamente dentro de todo o intervalo possível de soluções.

$$\text{ajuste da nota } x'_i \leftarrow \begin{cases} \text{SIM, com probabilidade PAR} \\ \text{NÃO, com probabilidade (1 - PAR)} \end{cases} \quad (4)$$

$$x'_i \leftarrow x'_i \pm \text{rand} * bw \quad (5)$$

- Etapa 4 – Atualização da Memória Harmônica: nesta etapa, a cada nova harmonia improvisada, é verificado se esta é melhor do que a pior harmonia da memória harmônica (HM), no que diz respeito à função objetivo estabelecida. Caso confirmada esta condição, a nova harmonia substitui a pior harmonia da HM.
- Etapa 5 – Verificação do critério de parada: ao término de cada iteração é verificado se a melhor harmonia satisfaz o critério de parada, normalmente o número máximo de improvisos MI. Em caso positivo, a execução é terminada. Caso contrário, o algoritmo retorna para o terceiro passo enquanto não atingir o critério de parada.

A partir do trabalho original de Geem, Kim e Loganathan (2001), melhoramentos e variações do método foram propostos por diversos outros pesquisadores. Mahdavi, Fesanghary e Damangir (2007), por exemplo, apresentaram um refinamento do método, desenvolvendo o algoritmo *Improved Harmony Search* (IHS). Foi sugerida a variação dinâmica dos parâmetros PAR e *bw*, ao decorrer do número de iterações, entre limites mínimos e máximos para cada fator. PAR cresce linearmente, enquanto que o parâmetro *bw* decresce exponencialmente. No presente artigo, trabalhou-se com os valores de PAR e *bw* variáveis. Todos os parâmetros adotados são mostrados na Tabela 1.

Tabela 1: Parâmetros do Busca Harmônica empregados

Parâmetro	Valor adotado
<i>bw</i> máximo	2,0
<i>bw</i> mínimo	1,0
PAR máximo	0,5
PAR mínimo	0,3
Tamanho da Memória Harmônica (HMS)	50
Taxa de Escolha de um Valor da Memória (HMCR)	0,9
Taxa de Ajuste dos Valores (PAR)	0,45
Passo Máximo de Ajuste para o Tom (<i>bw</i>)	1,5
Número Máximo de Improvisos ou Iterações (MI)	250.000

Além da adoção dos parâmetros variáveis conforme proposto por Mahdavi, Fesanghary e Damangir (2007), outras alterações no algoritmo original foram propostas e incorporadas no presente trabalho. São elas:

-Possibilidade de inserir uma solução inicial pré-definida na memória harmônica, ao invés de gerar todas as soluções aleatoriamente. A utilidade desse procedimento depende do grau de conhecimento a respeito do problema abordado;

-Reinicialização da memória harmônica quando todas as harmonias assumirem um mesmo valor. Tal processo pode, eventualmente, acarretar num aumento demasiado no número de iterações. Por outro lado, pode evitar a convergência prematura para um mínimo local, fato observado nos exemplos analisados. Esse valor para o qual as soluções convergiram deve integrar a nova memória harmônica, com o objetivo de preservar a melhor solução até então obtida;

-Introdução de critério de parada adicional ao número máximo de improvisos MI. Se, após repetidas reinicializações, a melhor solução encontrada não se alterar, o processo é encerrado antes de serem efetuadas todas as MI avaliações da função objetivo.

4 EXEMPLO

A formulação descrita foi implementada usando linguagem de programação Fortran. Na sequência, diversas aplicações numéricas foram desenvolvidas, objetivando testar a eficácia do procedimento proposto, bem como efetuar a comparação com resultados obtidos por outros métodos.

Neste exemplo, Argolo (2000) otimizou pilares submetidos à flexocompressão reta, onde as dimensões da seção de concreto e as armaduras foram as variáveis do problema. Foi utilizada a Norma Brasileira ABNT NBR 6118 (1980) nas análises. Partindo de uma seção de pilar inicialmente dimensionada por meio de ábacos de interação (com seção fixa em 30 x 70 cm), o autor propôs uma nova configuração utilizando Algoritmos Genéticos. O esforço normal e o momento fletor solicitantes usados neste exemplo, bem como os custos unitários dos materiais, foram, respectivamente: $N_{sd} = 2.142,86$ kN, $M_{sd} = 375$ kN.m, $C_c = 125,00$ R\$/m³, $C_s = 1,27$ R\$/kg e $C_f = 16,49$ R\$/m². Adotou-se f_{ck} de 25 MPa e f_{yk} de 500 MPa. A Fig. 2 (a) e a Fig. 2 (b) mostram as seções obtida por Argolo (2000) por meio de Ábacos de Interação e Algoritmos Genéticos, respectivamente. O autor detalhou as dimensões das seções de concreto como múltiplas de 5 cm. A Fig. 2 (c) indica o melhor resultado obtido por Bordignon e Kripka (2012) por meio do *Simulated Annealing*. Os autores discretizaram as dimensões da seção a cada 1 cm e utilizaram a Norma Brasileira ABNT NBR 6118 (2007) nas análises. A Fig. 2 (d) e a Fig.2 (e) referem-se às soluções obtidas neste trabalho, por meio do método da Busca Harmônica. A primeira refere-se à discretização das seções a cada cm, enquanto que, na segunda, são atribuídas dimensões múltiplas de 5 cm à seção de concreto.

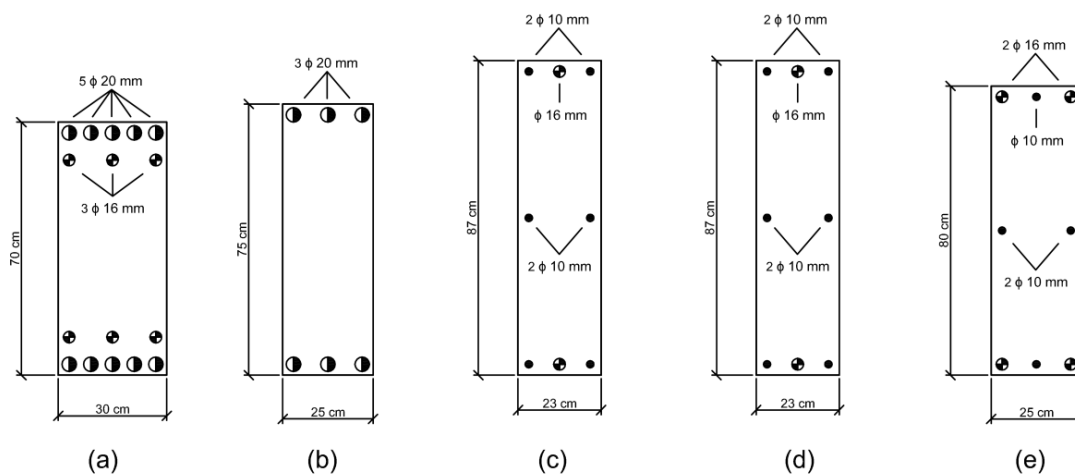


Figura 2. Detalhamento das seções para o exemplo: ábacos de interação (a), Algoritmos Genéticos (b), Simulated Annealing (c), Busca Harmônica com variação de 1cm (d) e de 5cm (e)

Na Tabela 2, são mostrados os resultados para os diferentes trabalhos comparados, em termos de consumo de materiais das soluções ótimas (considerando as seções transversais), bem como as taxas de armadura (ρ) para cada caso. A Tabela 3 apresenta os custos ótimos obtidos para cada método empregado. Na última coluna é indicada a variação percentual no custo, tomando-se como referência a solução original obtida com o emprego de ábaco de interação.

Tabela 2: Quantidades de materiais empregados nas soluções ótimas do exemplo

Método	Concreto (cm ²)	Aço (cm ²)	Fôrmas (cm)	ρ (%)
Ábaco de Interação (a)	2100,00	43,48	200,00	2,07%
Algoritmos Genéticos (b)	1875,00	18,85	200,00	1,01%
<i>Simulated Annealing</i> (c)	2001,00	8,73	220,00	0,44%
Busca Harmônica (d)	2001,00	8,73	220,00	0,44%
Busca Harmônica (e)	2000,00	11,18	210,00	0,56%

Tabela 3: Custos obtidos para as soluções ótimas do exemplo I (R\$/m)

Método	Concreto	Aço	Fôrmas	Custo Total	Variação no Custo
Ábaco de Interação (a)	26,25	43,35	32,98	102,58	-
Algoritmos Genéticos (b)	23,44	18,79	32,98	75,21	-26,68%
<i>Simulated Annealing</i> (c)	25,01	8,70	36,28	70,00	-31,76%
Busca Harmônica (d)	25,01	8,70	36,28	70,00	-31,76%
Busca Harmônica (e)	25,00	11,15	34,63	70,78	-31,00%

Pode-se observar que o Busca Harmônica alcançou o mesmo resultado obtido por meio do *Simulated Annealing*, apresentando economia em relação aos Algoritmos Genéticos (6,93%) e ao Ábaco de Interação (31,76%). É importante salientar que a análise da seção realizada por Argolo (2000) não leva em conta algumas disposições construtivas exigidas pela norma ABNT NBR 6118 (2007) para pilares de concreto armado, como o espaçamento máximo entre as barras, tornando essa solução inefetiva em relação às restrições consideradas no presente estudo. A solução por Busca Harmônica, considerando dimensões múltiplas de 5 cm, provoca um acréscimo de 1,11% no custo, porém a solução ainda é econômica em relação à obtida pelo Ábaco de Interação (31%) e Algoritmos Genéticos (5,89%).

5 CONCLUSÕES

Este trabalho buscou otimizar seções retangulares de concreto armado sujeitas a flexocompressão reta, seguindo os requisitos impostos pela norma brasileira ABNT NBR 6118 (2007). O Método da Busca Harmônica foi empregado na busca pelas melhores soluções.

Com o objetivo de testar a formulação proposta, bem como o algoritmo do Busca Harmônica, foram realizadas diversas aplicações numéricas, das quais foram aqui apresentados alguns resultados. Para os exemplos analisados, o método da Busca Harmônica

alcançou melhores soluções que os Algoritmos Genéticos, Programação Matemática e dimensionamento prático por meio de ábacos de interação. Em relação ao *Simulated Annealing*, obtiveram-se os mesmos resultados. Além disso, observou-se que o custo das soluções ótimas, no caso de se trabalhar apenas com seções múltiplas de 5 cm, não sofreu um incremento significativo, na comparação com o resultado obtido com discretização das dimensões a cada centímetro, além de não corresponderem a um simples arredondamento das soluções obtidas com a discretização a cada centímetro e, menos ainda de soluções aproximadas a partir de resultados obtidos com variáveis contínuas.

Acredita-se que a atualização do algoritmo para a versão atual da Norma Brasileira não deva gerar alterações significativas nos resultados, bem como nas conclusões obtidas a partir destes.

REFERÊNCIAS

Argolo, W. P., 2000. *Otimização de seções de concreto armado submetida à flexocompressão reta utilizando algoritmos genéticos*. Mestrado. Dissertação, Universidade Federal do Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

Associação Brasileira de Normas Técnicas, 2007. *Projeto de estruturas de concreto: Procedimento*. NBR 6118. Rio de Janeiro.

Bordignon, R. & Kripka, M., 2012. Optimum Design of Reinforced Concrete Columns Subjected to Uniaxial Flexural Compression. *Computers and Concrete*, v. 9, n. 5, p. 345-358.

Camp, C. V., Pezeshk, S. & Hansson, H., 2003. Flexural Design of Reinforced Concrete Frames Using a Genetic Algorithm. *Journal of Structural Engineering*, v. 129, n. 1, p. 105-115.

Geem, Z. W., Kim J. H. & Loganathan, G. V. A., 2001. A New Heuristic Optimization Algorithm: Harmony Search. *Simulation*, v. 76, n. 2, p. 60-68.

Mahadavi, M., Fesanghary M. & Damangir E., 2007. An Improved Harmony Search Algorithm for Solving Optimization Problems. *Applied Mathematics and Computation*, v. 188, n. 2, p. 1567-1579.

Martínez-Martín, F. J., 2008. *Optimización heurística de pilas rectangulares huecas de hormigón armado*. Doutorado. Tese, Universidad Politécnica de Valencia, VA, Espanha.

Medeiros, G. F., 2012. *Método da Busca Harmônica aplicado na otimização de seções de pilares retangulares em concreto armado considerando custos econômicos e ambientais*. Mestrado. Dissertação, Universidade de Passo Fundo, RS, Brasil.

Rodrigues Júnior, S. J., 2005. *Otimização de pilares de edifícios altos de concreto armado*. Doutorado. Tese, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

Zielinski, Z.A., Long W. & Troitsky, M. S., 1995. Designing Reinforced Concrete Short-Tied Columns Using the Optimization Technique. *ACI Structural Journal*, v. 92, n. 5, p. 619-625.