



## RESOLUÇÃO DE TRELIÇAS ESPACIAIS DE GRANDES DIMENSÕES UTILIZANDO O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

**George Alves Santana de Aquino**

**Bernardo Lima Carvalho**

**Paulo Marcelo Vieira Ribeiro**

george.aquino@ufpe.br

bernardo.limacarvalho@ufpe.br

paulo.vribeiro@ufpe.br

Universidade Federal de Pernambuco – UFPE

Centro de Tecnologia e Geociências

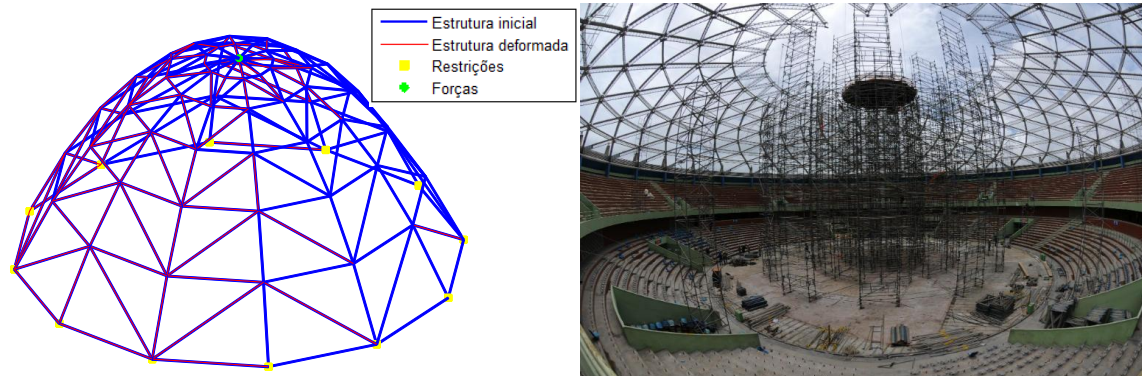
Departamento de Engenharia Civil

Rua Acadêmico Hélio Ramos, s/n, 50740-530, Pernambuco, Recife, Brasil

**Resumo:** O objetivo desse projeto é a resolução de treliças espaciais complexas – i.e., quantidade de barras e nós extremamente elevados que geram uma infinidade de equações sendo ainda precedido por um esforço desproporcional na preparação de variáveis e dados. Sendo assim, o presente projeto satisfaz o seguinte: código prático, eficiente e confiável para a solução de treliças espaciais; método gráfico (CAD) de extrema praticidade para o desenho da estrutura; processamento e pós-processamento eficientes. A estratégia empregada foi uma combinação de três etapas: a geometria desenvolvida no SketchUp; o pré-processamento alcançado com o GiD; e, finalmente, implementação no código em elementos finitos (processamento e pós-processamento) desenvolvido em MATLAB. A combinação desses procedimentos trouxe resultados confiáveis para treliças tridimensionais extremamente complexas. Exemplos foram resolvidos e um programa comercial – SAP2000 – foi usado para verificar tanto a validade quanto a eficiência do código.

**Palavras-chave:** Método dos Elementos Finitos, Matriz de Rigidez, Método Gráfico, Treliças Espaciais.

# 1 INTRODUÇÃO



**Figura 1. A. Domo treliçada calculado em MATLAB (seção 4.2). B. Exemplo real de domo treliçada em construção (Estádio Geraldo Magalhães, Recife, Pernambuco, Brasil).**

Treliças são elementos estruturais composto por barras leves ligadas entre si rigidamente de forma a produzir um arranjo estável que permita a distribuição eficiente de cargas (Leet, 2013). Considera-se que a composição da treliça seja de barras e nós, sendo esses nós ligações de tipo pino sem atrito e que os carregamentos estejam aplicados apenas sobre os nós – viz. os esforços transmitidos são apenas axiais (Govindjee, 2014). As treliças são usadas nas estruturas de cobertura de edificações residenciais e industriais, nas coberturas de estádios esportivos e de estações metroviárias, e também em pontes. Do ponto de vista estrutural, podem ser planas ou espaciais, sendo usualmente de madeira e aço. Exemplo em fig.1.B.

O uso do Método de Elementos Finitos (MEF) e Matriz de Rigidez (Logan, 2012) permite uma abordagem computacional mais poderosa e, assim, a resolução de treliças mais complexas (nas quais a resolução por métodos analíticos é impraticável). Outros grupos de autores também foram responsáveis por softwares que eficientemente resolviam o proposto (MASTAN2, 2015). Trabalhos semelhantes para outras estruturas em muito nortearam o projeto (Silva Neto et al., 2007; Hecke, 2015). O presente trabalho trouxe um novo código para resolução de treliças espaciais complexas, assim como os passos anteriores para desenho e pré-processamento da estrutura, integrando nova etapa ao projeto SAE-UFPE (Silva et al., 2014).

## 2 OBJETIVOS

A crescente necessidade de construir soluções computacionais para problemas de engenharia, seja por sua complexidade teórica ou pelos extensos cálculos, motivou esse trabalho. O objetivo é o desenvolvimento de um método de extrema praticidade que resolve treliças espaciais de grandes dimensões com implemento de um código computacional em MATLAB, precedido por etapas simplificadoras de modelagem gráfica da treliça e processamento de dados – vetorização do modelo projetado (Silva et al., 2014).

A utilização do MEF permitiu o desenvolvimento de um código que resolve de forma eficiente treliças planas e espaciais (Logan, 2012). Após a resolução dos exemplos mais simples, foi necessário integrar novas etapas com softwares distintos que permitiram a satisfação do objetivo principal: a resolução de treliças espaciais de grandes dimensões.

### 3 APRESENTAÇÃO DO PROGRAMA (METODOLOGIA)

O uso do programa envolve a composição de três diferentes softwares. A primeira parte envolve o planejamento da estrutura e seu desenho, onde é utilizado SketchUp (2015). Numa segunda, há o pré-processamento das informações do passo anterior com GiD (2015), software desenvolvido pela Universidade Politécnica da Catalunha. Na terceira e última, processamento e pós-processamento com código desenvolvido em MATLAB (2013).

#### 3.1 Considerações teóricas

A abordagem do proposto partiu do estudo da equação do elemento de barra em elementos finitos, sendo esse desenvolvido para treliças em duas e três dimensões. Assim, o MEF foi o método adotado e levou ao estudo da matriz de rigidez, que combina as informações da matriz de incidência e de conectividade – elas trazem as coordenadas de cada nó e os nós extremos de cada elemento. Ademais, o uso do artifício do número grande, ou método da penalidade (Logan, 2012), – rigidez absurdamente alta em alguns nós, dando a condição de nó restringido e facilitando as computações – foi fundamental no desenvolvimento do código proposto.

A parte principal do programa, portanto, é a obtenção da matriz de rigidez global  $[K]$  e do vetor de cargas nodais  $\{F\}$ . As equações abaixo explicam a construção da matriz de rigidez do elemento em coordenadas globais,  $[k_e]$ . A Eq. (1) mostra o processo de transição de coordenadas locais para globais, onde  $[T]$  é a matriz de transformação de coordenadas e  $[k'_e]$  representa a matriz de rigidez em coordenadas locais. A matriz de rigidez global vai acomodar cada elemento da treliça através das respectivas posições globais dos graus de liberdade – ou seja: a matriz de rigidez global combina as matrizes de rigidez de cada elemento formando uma matriz de ordem superior  $3n, 3n$  onde  $n$  indica o número total de nós da estrutura (Logan, 2012). Por fim os valores dos deslocamentos são obtidos pela multiplicação da matriz inversa de rigidez global (modificada pela técnica do número grande) com o vetor de cargas nodais. Sendo  $C_x = \cos\theta_x, C_y = \cos\theta_y, C_z = \cos\theta_z$ , temos:

$$[k_e] = [T]^T [k'_e] [T] = EA/L \begin{bmatrix} C_x^2 & C_x C_y & C_x C_z & -C_x^2 & -C_x C_y & -C_x C_z \\ & C_y^2 & C_y C_z & -C_x C_y & -C_y^2 & -C_y C_z \\ & & C_z^2 & -C_x C_z & -C_y C_z & -C_z^2 \\ & & & C_x^2 & C_x C_y & C_x C_z \\ \text{Simétrica} & & & & C_y^2 & C_y C_z \\ & & & & & C_z^2 \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$[k'_e] = EA/L \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$[T] = \begin{bmatrix} C_x & C_y & C_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_x & C_y & C_z \end{bmatrix} \quad (3)$$

#### 3.2 Integração de procedimentos

Os três passos a seguir resumem os detalhes das etapas do método proposto.

**Desenho – SketchUp.** A forma mais simples de se armazenar as informações geométricas de uma estrutura e interagir com a mesma é através de desenho. Assim, não havendo método prático de se escrever as matrizes necessárias, optou-se por uso de CAD. O software

escolhido devido a sua praticidade foi o SketchUp. A figura era planejada e desenhada com grande eficiência. Como saída desse passo têm-se a estrutura em formato .dxf.

**Vetorização – GiD.** Após a figura ser desenhada no SketchUp, há a importação para o software de pré-processamento, GiD. Este auxilia o programa de duas formas: (i) representa espacialmente a figura (conforme em qualquer programa de CAD), porém gera a malha e numera todas as barras e nós (extremamente importante para visualização/interação com o programa); (ii) converte a informação armazenada no desenho da treliça exatamente nas matrizes necessárias para implementação em código. A saída são as matrizes de incidência e de conectividade (seção 3.1).

**Implementação – MATLAB.** Após receber as informações provenientes do pré-processamento no GiD, as propriedades do material são escolhidas e o carregamento e níveis de liberdade são impostos (observe-se a facilidade do procedimento pela observação da numeração da malha desenvolvida no segundo passo). Como saída, têm-se: (i) os deslocamentos; (ii) os esforços internos; (iii) a plotagem da estrutura original e de suas deformações (incluindo diferenciação entre nó restringido e nó com carregamento).

## 4 APLICAÇÕES E RESULTADOS

Os exemplos a seguir foram escolhidos para ilustrar o potencial código proposto, sendo comparados os valores obtidos pelo código proposto e pela análise estática linear no software profissional SAP2000 (2014). As estruturas analisadas foram exatamente as mesmas (mesmas propriedades para os materiais, mesmos graus de liberdade e carregamentos). No SAP2000, a entrada era pela estrutura em .dxf; enquanto no código proposto, a entrada era a partir do pré-processamento dessa estrutura .dxf no GiD – conforme exposto em 3.2.

### 4.1 Ponte

O exemplo conta com 244 barras e 84 nós. O vão coberto pela ponte é de 200 m. O módulo de elasticidade para todas as barras foi 200 GPa e a área de cada barra de 10 cm<sup>2</sup>. As cargas de 10 kN foram aplicadas com sentido para baixo da ponte nos dois nós inferiores centrais (em verde), quatro dos nós ficaram restringidos (em amarelo) – ver fig. 2. Os elementos escolhidos para análise foram os nós carregados e a barra que os conecta (tabela 1).

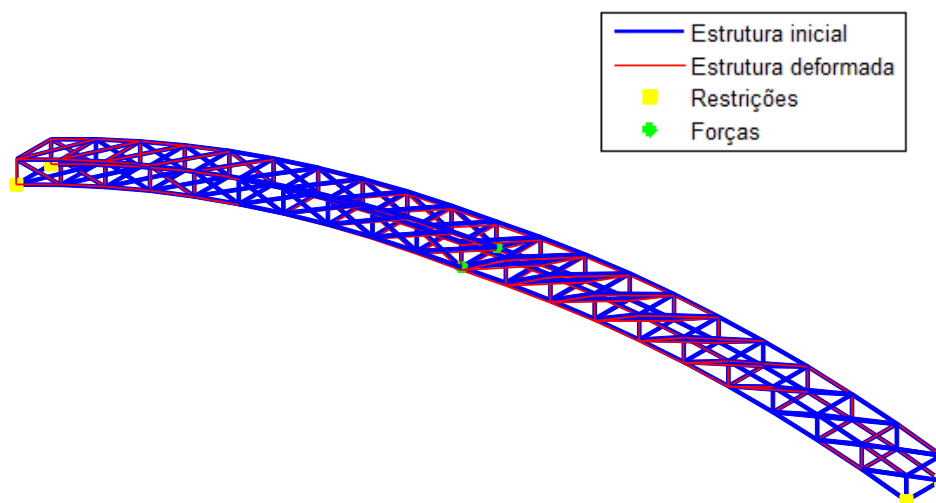


Figura 2. Ponte treliçada calculada em MATLAB (seção 4.1).

**Tabela 1. Resultados para o exemplo da ponte**

| Elemento             | MATLAB     | SAP2000    | Erro relativo (%) |
|----------------------|------------|------------|-------------------|
| Deslocamento (Nó 41) | 0.068619 m | 0.068619 m | 0.00%             |
| Deslocamento (Nó 42) | 0.068619 m | 0.068619 m | 0.00%             |
| Tensão (Barra 104)   | 80.56 N    | 79.05 N    | +1.91%            |

## 4.2 Domo

O domo – ver fig.1.A – tem 73 barras e 204 nós, tendo um diâmetro de 13 m e altura de 6.5 m. As propriedades dos materiais são as mesmas do exemplo anterior. A carga foi de 10 kN e aplicada apenas no nó superior (em verde, com sentido para baixo); os nós da base foram todos restringidos. Na tabela 2, deslocamento na direção vertical para o nó superior e tensão para uma das barras conectadas a esse nó.

**Tabela 2. Resultados para o exemplo do domo**

| Elemento             | MATLAB       | SAP2000      | Erro relativo (%) |
|----------------------|--------------|--------------|-------------------|
| Deslocamento (Nó 43) | -0.0097404 m | -0.0097404 m | 0.00%             |
| Tensão (Barra 138)   | -8277.92 N   | -8375.54 N   | -1.17%            |

## 5 CONCLUSÕES

O resultado obtido foi muito bom para treliças espaciais de grandes dimensões, permitindo, além dos resultados numéricos (deformações e esforços internos), a obtenção visual da estrutura nas situações deformada e indeformada. A precisão obtida com os resultados foi verificada e divergências de pouca significância apareceram apenas para os esforços transmitidos pelas barras. O código se mostrou eficiente, computando todos esses valores e plotando as estruturas em menos de 2 segundos. Para o nível de análise proposto, demonstrou com sucesso sua equivalência ao *software* profissional usado para validação.

## 6 REFERÊNCIAS

- GiD, 2015. *CIMNE, Universitat Politècnica de Catalunya*.
- Govindjee, Sanjay, 2014. *A first course on variational methods in Structural Mechanics and Engineering*. University of California, Berkeley.
- Hecke, Mildred B., 2015. *O método dos elementos finitos aplicado a treliças planas*. Centro de Estudos de Engenharia Civil, Universidade Federal do Paraná.
- Leet, Kenneth M., Uang, Chia-Ming & Gilbert, Anne M., 2008. *Fundamentals of Structural Analysis*. McGraw-Hill.

Logan, Daryl L., 2012. *A first course in the Finite Element Method*. Cengage Learning.

MATLAB, 2013. *Mathworks*.

SAP2000, 2014. *Computer and Structures, Inc.*

Silva Neto, G.C., Lopes, R.C., Lopes, A.P., 2007. *O método de elementos dos elementos finitos em treliças planas na disciplina de mecânica computacional*, XXXV COBENGE.

Silva, L.V.M., Joseph, J.B. & Ribeiro, P.M.V., 2014. *Integração MATLAB-GiD em código com interface gráfica para solução de problemas de elasticidade em 2D*, XXXV CILAMCE.

SketchUp, 2015. *Trimble Navigation*.

Ziemian, R.D., McGuire, W., 2015. *MASTAN2* (software).