



APLICAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO AO PROBLEMA DA SUSTENTAÇÃO HIDRODINÂMICA DE MANCAIS DE DESLIZAMENTO

Carlos Friedrich Loeffler

carlosloeffler@bol.com.br

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, UFES

Universidade Federal do Espírito Santo – Av. Fernando Ferrari, 540 – Bairro Goiabeiras – 29075 – 910, Vitória, ES – Brasil

Webe João Mansur

webe@coc.ufrj.br

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, COPPE/UFRJ – Centro de Tecnologia, Bloco B, Ilha do Fundão – 21941-972 – Rio de Janeiro, RJ – Brasil

Abstract. *The Boundary Element Method presents difficulties in solving problems including sources, body forces, inertia forces and other similar actions. The same occurs when the mathematical model has no self-adjoint terms, avoiding the desired representation of the problem solely in terms of boundary integrals. These deficiencies have been overcome through new approach strategies, highlighting the formulations employing primitive radial basis functions such as Dual Reciprocity Formulation, the Quasi-Dual Reciprocity Formulation and the Direct Integration Boundary Element Method (MECID). In this study, the two former formulations mentioned are used to model and solve the distribution of the pressure field generated by a hydrodynamic journal bearing, whose partial differential governing equation has variable coefficients, and cannot be easily expressed in terms of boundary integrals. Problems which have one-dimensional analytical solution are presented here in order to validate the consistency of the proposed technique, although the methodology is equally applicable to two-dimensional problems.*

Keywords: *Boundary Element Method, Radial Basis Interpolation, Quasi-Dual Reciprocity Formulation, Direct Integration Boundary Element Formulation, Journal Bearings*

1 MODELO HIDRODINÂMICO E EQUAÇÃO DE GOVERNO

Os mancais hidrodinâmicos são mancais de deslizamento que usam o escoamento de um fluido lubrificante em torno de um eixo para gerar um campo de pressão que faz sustentação sob rotações elevadas, assim reduzindo sobremaneira o desgaste que seria causado pelo deslizamento entre o eixo e a superfície do mancal, caso ficassem em contato operando nestas condições.

O campo de pressão surge devido à variação da folga existente entre o eixo e mancal, por onde escoo o fluxo de lubrificante, conforme ilustra a Fig. 1:

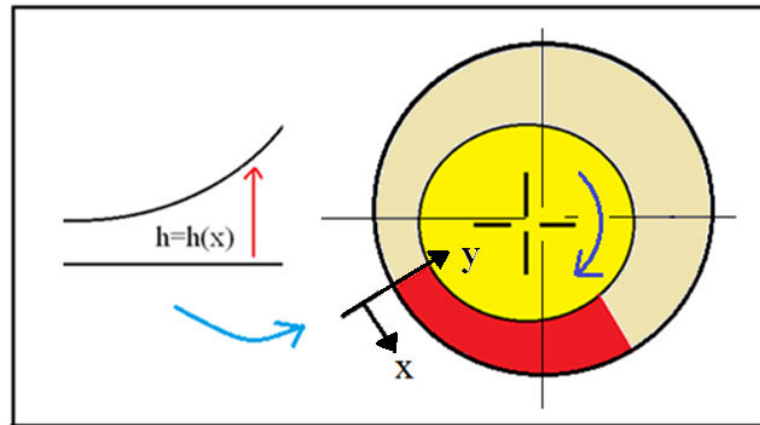


Figura 1. Esquema do modelo do mancal hidrodinâmico, enfatizando o significado da altura $h(x)$

O modelo matemático mais simples e comum para abordagem deste tipo de problema se deduz mediante a adoção de uma série de hipóteses simplificadoras, entre as quais se podem destacar: os efeitos de curvatura podem ser desprezados; o fluido lubrificante é considerado newtoniano e de viscosidade constante; o escoamento é laminar e incompressível; a força de inércia e de campo externa são desprezíveis; o gradiente de pressão e a velocidade do fluido também podem ser desprezíveis em sua variação na direção radial y . Assim sendo, pode-se deduzir uma equação diferencial de equilíbrio para o mancal hidrodinâmico que, em condições de unidimensionalidade, é dada por (Spots, 1961):

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\rho h^3}{\mu} \frac{\partial p(x)}{\partial x} \right] = -V \frac{dh}{dx} \quad (1)$$

Na equação anterior $p(x)$ é a sobrepressão com relação à pressão inicial de injeção do óleo, V é uma velocidade média e μ é a viscosidade. A variável $h(x)$ depende da forma das superfícies examinadas, mas é conhecida, vide figura 1. Impõem-se condições essenciais em termos da pressão $p(x)$ e condições naturais em termos do fluxo $q(x)$, dado por:

$$q(x) = \rho h(x)v(x) \quad (2)$$

Na expressão do fluxo $q(x)$, ρ é a massa específica e a velocidade $v(x)$ do lubrificante é dada por:

$$v(x) = V - \frac{h(x)^2}{\mu} \frac{dh(x)}{dx} \frac{dp(x)}{dx} \quad (3)$$

Desde que se admita um escoamento do lubrificante com velocidades médias W numa direção axial z , é possível chegar a uma equação mais geral, dada por:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \right] = -V \frac{d[h(x)]}{dx} - W \quad (4)$$

Pode-se verificar a equação de governo deste problema é similar as equações que descrevem os seguintes casos: geração de tensões cisalhantes em barras sob torção uniforme com seções uniformemente variáveis (Timoshenko et al, 1968); escoamento potencial em tanques de profundidade variável (Den Hartog, 1952); potenciais ou campos escalares em meios heterogêneos (Arpaci, 1966). Sobretudo este último tem grande importância, pois diz respeito a importantes problemas da atualidade, como à sísmica de prospecção, no caso em que as forças de domínio são associadas à inércia do meio físico constituinte.

Por conveniência, não obstante os problemas abordados serem unidimensionais, doravante a equação de governo é expressa em notação indicial, para que as manipulações matemáticas subsequentes possam ser aproveitadas em outros casos mais gerais.

2 EQUAÇÕES INTEGRAIS DE CONTORNO

Considere a seguinte equação diferencial escalar para problemas nos quais a propriedade física varia continuamente com a posição no domínio Ω , tal como ocorre nos materiais funcionais:

$$[K(X)p(X)_{,i}]_{,i} = s(X) \quad (5)$$

Na equação (5), $\mathbf{X}$ representa duas ou mais coordenadas, $K(\mathbf{X})$ representa as propriedades variáveis e $s(\mathbf{X})$ as ações de domínio. Inicialmente, postula-se da denominada forma integral forte (Bregbia, 1978), integrando a equação anterior sobre o domínio físico $\Omega(\mathbf{X})$, usando como função auxiliar a solução fundamental $u^*(\xi, \mathbf{X})$, referente ao problema de Poisson para meios homogêneos, ou seja:

$$\int_{\Omega} [K(X)p(X)_{,i}]_{,i} u^*(\xi; X) d\Omega = \int_{\Omega} s(X) u^*(\xi; X) d\Omega \quad (6)$$

A forma integral inversa desta equação pode ser deduzida fazendo-se duas operações de integração por partes, conforme apresentado a seguir:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} [K(X)p(X)_{,i}]_{,i} u^*(\xi; X) d\Omega &= \int_{\Omega} [K(X)p(X)_{,i} u^*(\xi; X)]_{,i} d\Omega \\ &- \int_{\Omega} [p(X)K(X)u^*(\xi; X)_{,i}]_{,i} d\Omega + \int_{\Omega} [p(X)[K(X)u^*(\xi; X)]_{,i}]_{,i} d\Omega \end{aligned} \quad (7)$$

Daí, aplicando o teorema de Divergência:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} [K(\mathbf{X})p(\mathbf{X})_{,i}]_{,i} u^*(\xi; \mathbf{X}) d\Omega &= \int_{\Gamma} [K(\mathbf{X})p(\mathbf{X})_{,i} u^*(\xi; \mathbf{X})] n_i d\Omega \\ &- \int_{\Gamma} [p(\mathbf{X})K(\mathbf{X})u^*(\xi; \mathbf{X})_{,i}] n_i d\Omega + \int_{\Omega} [p(\mathbf{X})[K(\mathbf{X})u^*(\xi; \mathbf{X})_{,i}]_{,i}] d\Omega \end{aligned} \quad (8)$$

Desenvolvendo agora o produto de duas funções existentes no último termo à direita da igualdade anterior:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} [p(\mathbf{X})[K(\mathbf{X})u^*(\xi; \mathbf{X})_{,i}]_{,i}] d\Omega &= \\ \int_{\Omega} [p(\mathbf{X})K_{,i}(\mathbf{X})u^*(\xi; \mathbf{X})_{,i}] d\Omega &+ \int_{\Omega} [p(\mathbf{X})K(\mathbf{X})u^*(\xi; \mathbf{X})_{,ii}] d\Omega \end{aligned} \quad (9)$$

A solução fundamental e sua derivada normal são facilmente colhidas na literatura. Empregando-se as propriedades da função Delta de Dirac (Brebbia et al., 1980), tem-se:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} [K(\mathbf{X})p(\mathbf{X})_{,i}]_{,i} u^*(\xi; \mathbf{X}) d\Omega &= \int_{\Gamma} \{[K(\mathbf{X})q(\mathbf{X})u^*(\xi; \mathbf{X})] - \\ [p(\mathbf{X})K(\mathbf{X})q^*(\xi; \mathbf{X})]\} d\Gamma &+ \int_{\Omega} [p(\mathbf{X})K_{,i}(\mathbf{X})u^*(\xi; \mathbf{X})_{,i}] d\Omega + c(\xi)K(\xi)p(\xi) \end{aligned} \quad (10)$$

Na expressão anterior, $q^*(\xi; \mathbf{X})$ é a derivada normal da solução fundamental e $q(\mathbf{X})$ é a derivada normal da pressão $p(\mathbf{X})$. O coeficiente $c(\xi)$ depende do posicionamento do ponto ξ com relação ao domínio físico $\Omega(\mathbf{X})$ e, no caso de ser localizado no contorno $\Gamma(\mathbf{X})$, também da suavidade deste (Brebbia et al., 1984). Verifica-se a presença de uma integral de domínio na Eq. (10), que é tratada em item subsequente, tal como a abordagem do termo proativo, referente ao lado direito da Eq. (6). Cabe ainda ressaltar que neste caso $K(\mathbf{X})$ é tratado como uma grandeza nodal, interpolada linearmente tal como a pressão e o fluxo ao longo de cada elemento de contorno.

3 PROCEDIMENTO QUASE-DUAL

Para eliminar a integral de domínio que ainda persiste, pode ser usado o procedimento Quase Dual (Loeffler e Mansur, 2003), uma técnica que usa funções radiais para aproximação de termos pertinentes ao núcleo de integrais. Similar à Dupla Reciprocidade [Partridge et al, 1992], foi desenvolvida para aproximar termos que envolvem derivadas primeiras, típicas em problemas difusivo-advectivos (Loeffler et al., 2003). O procedimento parte da seguinte aproximação, que aproxima uma parte do núcleo da terceira integral do lado esquerdo da equação (10) através de uma combinação linear de funções de base radial ψ^j , multiplicadas por coeficientes α^j , na forma:

$$p(\mathbf{X})K_{,i}(\mathbf{X}) \approx \alpha^j \psi_{,i}^j(\mathbf{X}^j; \mathbf{X}) \quad (11)$$

Na Eq. (11) $\mathbf{X}^j$ são os pontos base de interpolação. Substituindo a Eq. (11) na Eq. (10) e desenvolvendo os algebrismos, tem-se:

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} [p(\mathbf{X})K_i(\mathbf{X})u^*(\xi; \mathbf{X})]_i d\Omega &\approx \alpha^j \int_{\Omega} [\psi_i^j(\mathbf{X}^j; \mathbf{X})u^*(\xi; \mathbf{X})]_i d\Omega = \\
\alpha^j \int_{\Omega} [\psi^j(\mathbf{X}^j; \mathbf{X})u^*(\xi; \mathbf{X})]_{,i} d\Omega - \alpha^j \int_{\Omega} [\psi^j(\mathbf{X}^j; \mathbf{X})u^*(\xi; \mathbf{X})]_{,ii} d\Omega &= \\
\alpha^j \int_{\Gamma} [\psi^j(\mathbf{X}^j; \mathbf{X})q^*(\xi; \mathbf{X}^j)] d\Gamma - \alpha^j \int_{\Omega} [\psi^j(\mathbf{X}^j; \mathbf{X})u^*(\xi; \mathbf{X})]_{,ii} d\Omega &= \\
\alpha^j \int_{\Gamma} [\psi^j(\mathbf{X}^j; \mathbf{X})q^*(\xi; \mathbf{X}^j)] d\Gamma - \alpha^j(\xi)c(\xi)\psi^j(\xi; \mathbf{X}^j) &
\end{aligned} \tag{12}$$

Em problemas unidimensionais, o procedimento Quase-Dual aplica-se diretamente, sem ressalvas, pois nesses casos as derivadas, caso integradas, são sempre exatas. Já, em casos bidimensionais, isto é possível apenas em campos potenciais e a adoção de esquemas iterativos torna-se necessário para melhor desempenho [Loeffler, 2008].

4 PROCEDIMENTO MECID

O procedimento MECID também é uma técnica similar à Dupla Reciprocidade, mas desta se distingue por usar o conjunto de funções radiais interpolantes diretamente na aproximação de todo o núcleo da integral de domínio, que se deseja transformar em integral de contorno. A técnica já aplicada com êxito em problemas escalares governados pela Equação de Poisson [Loeffler et al., 2015] e de Helmholtz [Loeffler et al., 2014], dispensa os procedimentos padrão de integração de domínio como as células e mostra desempenho superior à técnica da Dupla Reciprocidade. No caso:

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} s(\mathbf{X})u^*(\xi; \mathbf{X})d\Omega &\approx \int_{\Omega} \xi \beta^j F^j(\mathbf{X}^j; \mathbf{X})d\Omega = \\
\int_{\Omega} (\xi \beta^j \psi_{,ii}^j(\mathbf{X}^j; \mathbf{X}))d\Omega &= \int_{\Gamma} (\xi \beta^j \psi_{,i}^j(\mathbf{X}^j; \mathbf{X})n_i(\mathbf{X}))d\Gamma = \xi \beta^j \int_{\Gamma} \eta^j(\mathbf{X}^j; \mathbf{X})d\Gamma
\end{aligned} \tag{13}$$

Ressalta-se que na MECID os pontos de interpolação $\mathbf{X}^i$ são diferentes dos pontos $\mathbf{X}$, que por sua vez são coincidentes com os pontos fonte ξ , para evitar singularidades, enquanto β^j são coeficientes da aproximação radial. A avaliação numérica das integrais apresentadas na Eq. (13) é muito simples, podendo ser feita através da quadratura de Gauss.

5 DISCRETIZAÇÃO

A próxima etapa consiste da discretização, que segue o modelo usual do MEC. Assim, para um ponto fonte ξ genérico, faz-se uma varredura no contorno, que aproximado em sua geometria por elementos retilíneos isoparamétricos, de modo que a pressão e sua derivada são interpolados linearmente entre pontos nodais situados nas extremidades dos elementos. Os pontos de interpolação $\mathbf{X}^i$, no caso da MECID são tomados no centro do elemento de contorno. De modo resumido, para um dado ponto fonte, tem-se:

$$\begin{aligned}
 & \{^{\xi} \alpha^1 [\int_{\Gamma_1} \eta_1^1(X^1; X_1) d\Gamma_1 + \int_{\Gamma_2} \eta_2^1(X^1; X_2) d\Gamma_2 + \dots \int_{\Gamma_n} \eta_n^1(X^1; X_n) d\Gamma_n] + \\
 & ^{\xi} \alpha^2 [\int_{\Gamma_1} \eta_1^2(X^2; X_1) d\Gamma_1 + \int_{\Gamma_2} \eta_2^2(X^2; X_2) d\Gamma_2 + \dots \int_{\Gamma_n} \eta_n^2(X^2; X_n) d\Gamma_n] + \dots \\
 & \dots + ^{\xi} \alpha^m [\int_{\Gamma_1} \eta_1^m(X^m; X_1) d\Gamma_1 + \int_{\Gamma_2} \eta_2^m(X^m; X_2) d\Gamma_2 + \dots \int_{\Gamma_n} \eta_n^m(X^m; X_n) d\Gamma_n] \} = \\
 & \{^{\xi} \alpha^1 N_1 + ^{\xi} \alpha^2 N_2 + \dots + ^{\xi} \alpha^m N_m \}
 \end{aligned} \tag{14}$$

Para a Quase-Dual, os pontos interpolantes X^j devem ser afastados dos cantos onde se usam nós duplos, para evitar singularidade na inversão da matriz de interpolação F . De resto, segue-se um procedimento similar à Dupla Reciprocidade, em que a aproximação das funções de interpolação em cada elemento de contorno gera uma matriz já calculada pela discretização das integrais relativas ao Laplaciano na equação diferencial de governo (Partridge, 1992). Assim sendo, pode-se escrever:

$$H' p - G' q = H \Psi [\Psi, _i]^{-1} [K, _i] p - S \tag{15}$$

As matrizes H' e G' correspondem às tradicionais matrizes H e G dos problemas de Laplace, agora multiplicadas pelo valor da derivada direcional da rigidez variável $K(X)$ em cada ponto nodal, enquanto S é um vetor conhecido referente a ação de domínio $s(x)$ e Ψ é a matriz composta das funções radiais de interpolação. A solução do sistema dado pela Eq. (15) segue os procedimentos típicos da formulação mista do MEC (Brebbia et al, 1986), em que valores prescritos de pressão e fluxo são isolados no lado direito da equação, gerando um vetor de termos independentes, que se soma com o vetor S .

6 SIMULAÇÕES NUMÉRICAS

Os exemplos apresentados a seguir consistem da sucessiva elevação da função que caracteriza a variação da distância $h(x)$ entre as superfícies do mancal e do eixo, conforme mostra a Fig. 2. Nestas simulações, os valores de pressão são prescritos nulos na entrada e saída, caracterizando os valores de sobrepressão de óleo, enquanto os valores nulos do fluxo ao longo da direção x impõem a unidimensionalidade matemática do modelo. Para todos os casos se dispõe de solução analítica para comparação.

Assim, como medida do erro foi tomada a diferença entre os valores analíticos e numéricos, que são divididos pelo maior valor analítico em cada problema.

Três malhas com 40, 80 e 160 elementos de contorno lineares, com nós duplos nos cantos, foram usadas para aproximar o campo de pressão e velocidades, enquanto as funções radiais de placa fina são empregadas na interpolação auxiliar tanto da MECID quanto na formulação Quase-Dual.

Em razão de sua estrutura matemática, na formulação Quase Dual não são necessários pontos internos interpolantes ou pólos, mas na MECID, ao contrário, não se pode prescindir de tais pontos, de forma que esses foram tomados em quantidade suficiente para a boa representação dos resultados.

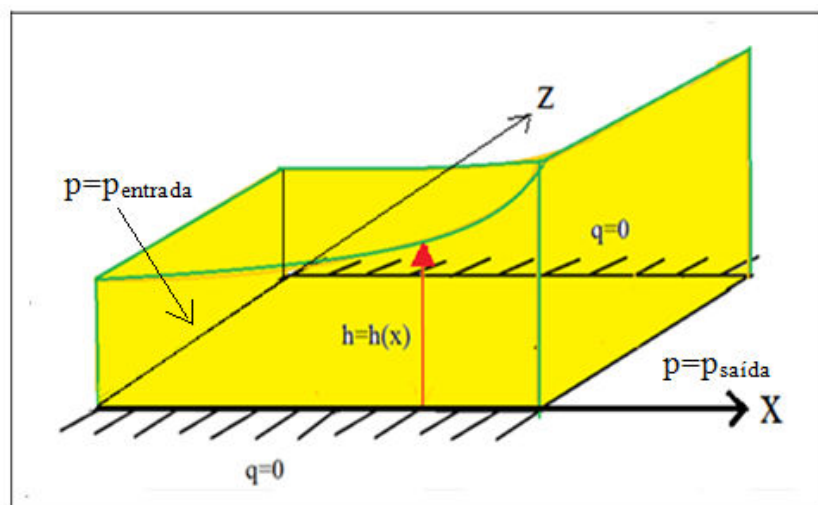


Figura 2. Domínio bidimensional, mostrando as condições de contorno aplicadas e variação da altura h ao longo da direção x

6.1 Primeiro Teste: variação linear da altura $h(x)$

Este caso mais simples e hipotético aparece como exemplo resolvido em boa parte dos livros clássicos que abordam a hidrodinâmica dos mancais, servindo para mostrar como o diferencial de altura – no caso uma variação linear da altura $h(x)$ – implica num valor de pressão que varia ao longo do domínio examinado.

Na Fig. 3 mostra-se o perfil obtido pelo MEC para as duas malhas, com 44 e 84 nós, e, respectivamente, 49 e 81 pontos internos interpolantes, em comparação com o valor analítico correspondente. Os resultados apresentaram uma ótima concordância, conforme se pode observar.

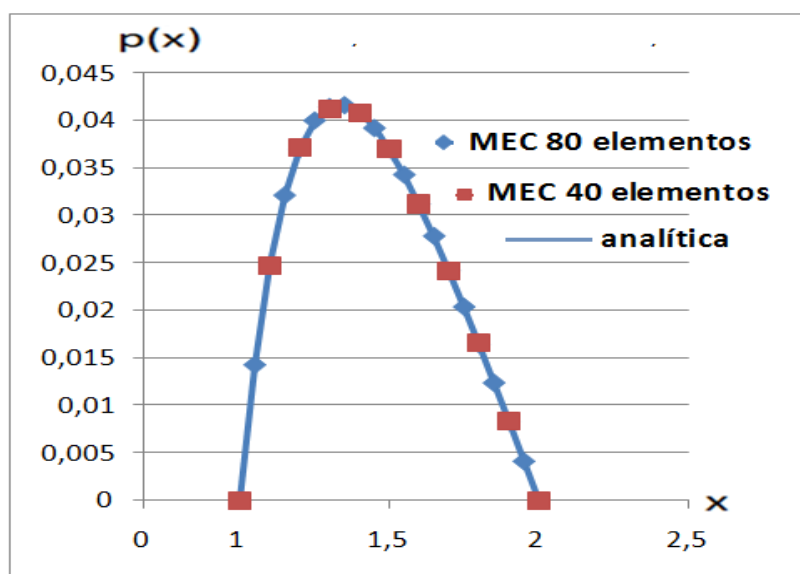


Figura 3: Solução numérica e solução analítica da pressão ao longo da direção do fluxo para variação linear da altura $h(x)$.

Para melhor detalhamento do efeito dos pontos internos e do refinamento da malha de contorno, na Fig. 4 é apresentada uma curva de convergência em que o erro cometido é expresso como função da quantidade crescente de pontos nodais e pólos. Verifica-se que os valores dos erros percentuais em cada nó encontrados neste caso são muito baixos e se reduzem ainda mais com o refinamento. Neste gráfico também se pode perceber que a introdução excessiva de pólos sem o refinamento da malha de contorno não é muito efetiva.

Ressalta-se, contudo, que a MECID requer uma quantidade de pontos mínima para uma boa aproximação usualmente maior do que a demandada pela formulação com Dupla Reciprocidade. Assim, é importante destacar que a ausência de uma quantidade suficiente de pólos é um fator grave que impede o alcance de uma precisão satisfatória; mas o excesso deles não melhora significativamente o desempenho computacional. No entanto, diferentemente da Dupla Reciprocidade, a inserção de um número excessivo de pontos interpolantes não produz quaisquer efeitos de perturbação numérica na representação de termos fonte, cujas causas incluem problemas de mau condicionamento numérico [Loeffler et al, 2015].

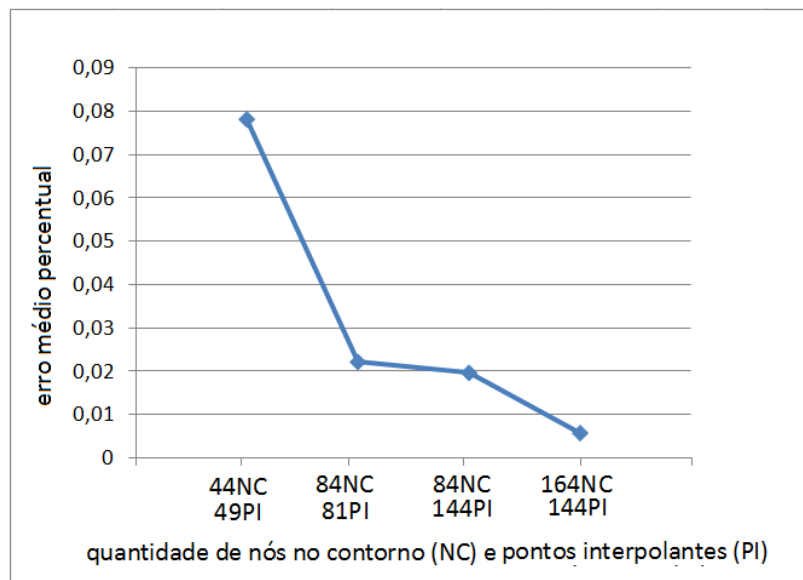


Figura 4. Valor do erro médio percentual em função do refinamento da malha e inserção de pólos

6.2 Segundo Teste: variação quadrática da altura $h(x)$

Neste caso, a ação de domínio se amplifica exponencialmente com relação ao exemplo anterior, de modo que se espera uma significativa redução da precisão do modelo numérico empregado. De fato, os erros numéricos cresceram, mas os resultados desta simulação continuaram com muito boa precisão, conforme mostra a Fig. 5.

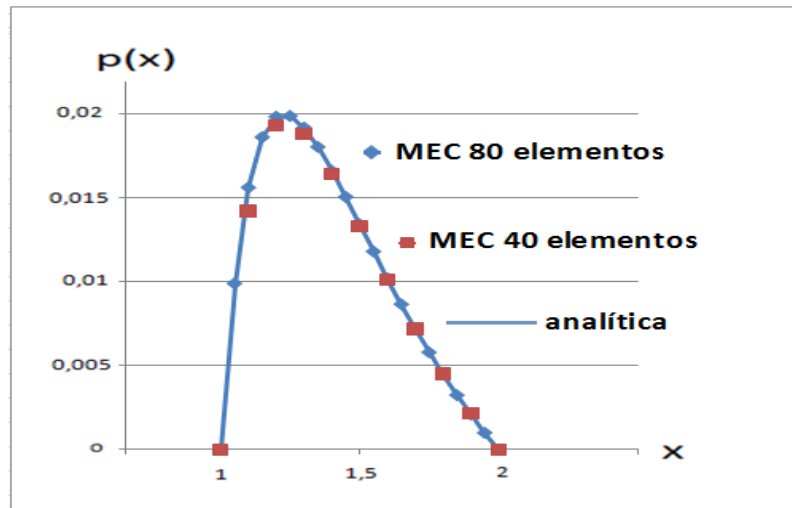


Figura 5: Solução numérica e solução analítica da pressão ao longo da direção do fluxo para variação quadrática da altura $h(x)$.

Tal como apresentado no caso anterior, a Fig. 6 mostra uma curva de erro em função das características de refinamento da malha.

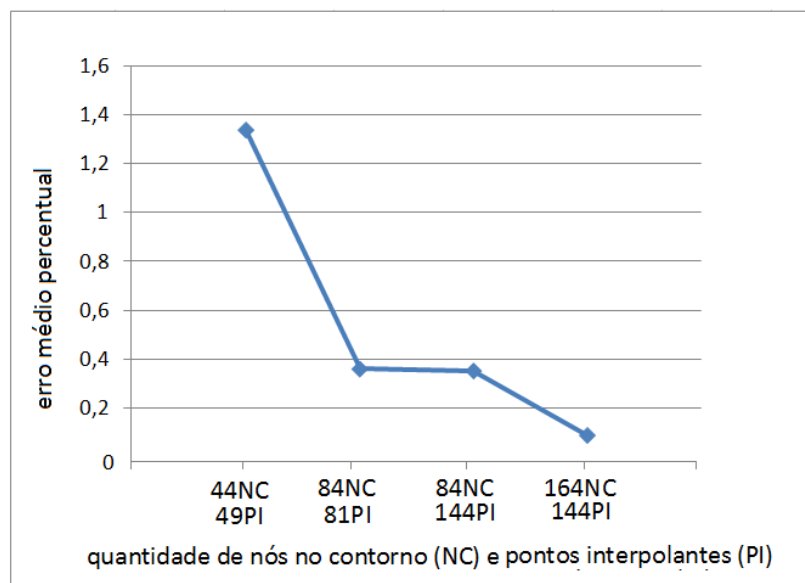


Figura 6. Valor do erro médio percentual em função do refinamento da malha e inserção de pólos para variação quadrática

6.3 Terceiro Teste: variação cúbica da altura $h(x)$

Considerando-se uma variação cúbica para $h(x)$ os gradientes de pressão na entrada se acentuam bastante e a malha menos refinada já apresenta erros acima de 1%, conforme mostrado na Fig. 7. O termo advectivo, referente à derivada primeira do campo de pressão torna-se preponderante face aos demais, devido ao gradiente que se forma em seguida à aplicação da pressão de entrada. No entanto, os resultados ainda são razoáveis e alcançam

uma precisão bastante satisfatória caso se empreguem malhas mais refinadas, acompanhadas de uma quantidade regular de pólos para representação do termo fonte ou termo proativo da equação de governo, que se compõe da velocidade média versus a derivada da função $h(x)$.

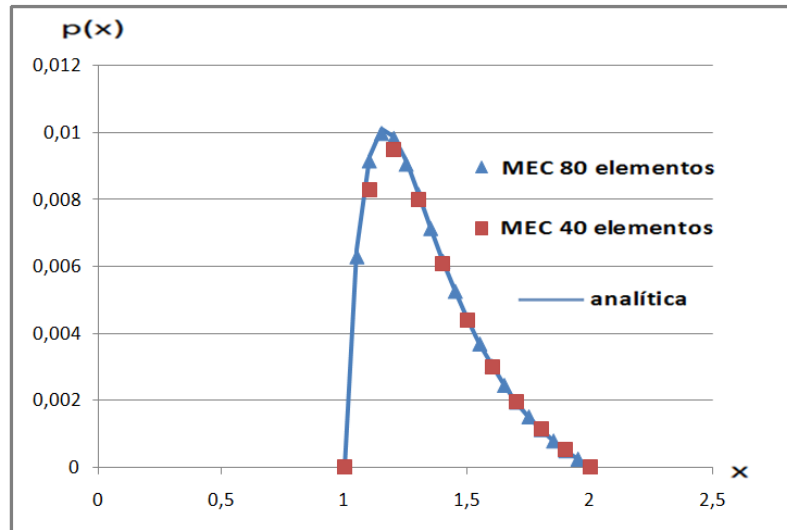


Figura 7: Solução numérica e solução analítica da pressão ao longo da direção do fluxo para variação cúbica da altura $h(x)$

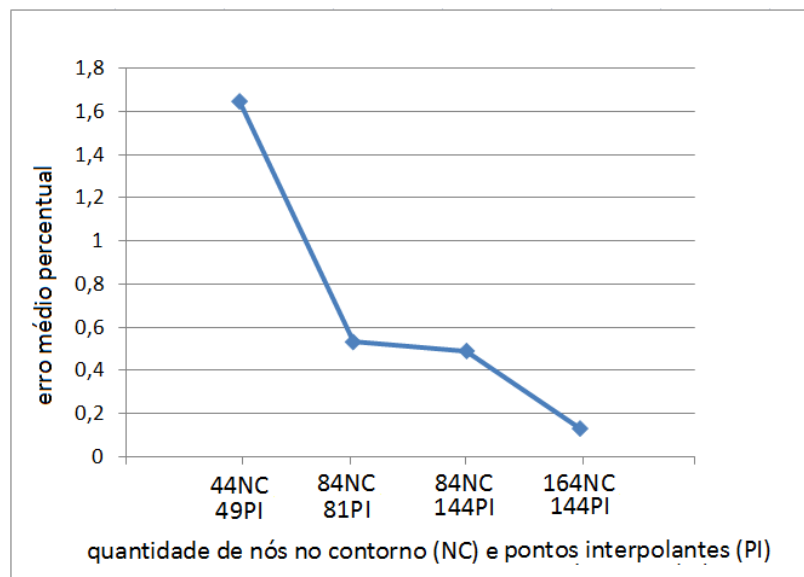


Figura 8. Valor do erro médio percentual em função do refinamento da malha e inserção de pólos para variação cúbica

7 CONCLUSÕES

Diante dos resultados obtidos, pode-se concluir que o modelo de elementos de contorno aplicado ao problema do mancal hidrodinâmico, governado por uma equação de campo não

homogênea, foi eficiente nesse caso unidimensional. Verifica-se que o desenvolvimento da equação de governo resulta em termos difusivos, advectivos e proativos. O termo difusivo foi bem representado, não obstante o cubo da função $h(x)$ ser aproximada linearmente ao longo dos elementos de contorno, do mesmo modo como o potencial de pressão e o fluxo. O termo advectivo, não obstante a aproximação do mesmo em termos de funções radiais, foi bem representado pela formulação Quase-Dual, o mesmo ocorrendo com termo proativo relativo à fonte. Este tipo de simulação encontra aplicação em meio industrial, pois os perfis práticos, referentes a duas circunferências não concêntricas, podem ser computados diretamente em nível nodal com relativa facilidade, usando a simplicidade de discretização proporcionada pelo Método dos Elementos de Contorno.

Os casos efetivamente bidimensionais, nos quais o termo advectivo não seja dado por uma função potencial, precisam ser resolvidos iterativamente, embora com nível de precisão inferior aos aqui apresentados.

Com relação ao termo fonte, a aplicação do procedimento MECID não requereu uma quantidade excessiva de pólos, não comprometeu a rapidez do processamento computacional e tampouco a precisão da técnica, ratificada por diversas simulações similares já realizadas. Com relação ao custo computacional, vale destacar que embora uma inversão matricial seja necessária, o número de operações com multiplicações é reduzido comparativamente ao despendido com na formulação com Dupla Reciprocidade.

A associação entre as duas técnicas discutidas neste trabalho abre um campo mais amplo de aplicação do MEC, em razão da similaridade do problema abordado e os casos de modelagem de problemas com materiais funcionais – casos heterogêneos em que as propriedades do meio constituinte variam gradualmente ao longo do domínio - e mesmo problemas setorialmente não homogêneos, mais comuns em problemas de Geofísica e Mecânica de Solos.

REFERÊNCIAS

- Arpaci, V. S. 1966. *Conduction Heat Transfer*. Addison-Wesley.
- Brebbia, C. A. 1978. *The Boundary Element Method for Engineering*. London: Pentech Press.
- Brebbia, C.A., Telles, J.C. F. & Wrobel, L.C., 1984. *Boundary Element Techniques*. Springer-Verlag, Berlin.
- Brebbia, C. A., Walker, S., 1980. *Boundary Element Techniques in Engineering*. Newnes-Butterworths, London.
- Den Hartog, J.P. 1952. *Advanced Strength Of Materials*, McGraw-Hill.
- Loeffler, C. F., 2008. Procedimento Iterativo na Formulação Quase Dual do Método dos Elementos de Contorno para Solução de Problemas Difusivos-Advectivos. *XXXI Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional*. Belém, Anais em CD ROM.
- Loeffler, C.F., Cruz, A. L. & Bulcão, A. 2014. Direct Use of Radial Basis Interpolation Functions for Modelling Source Terms with the Boundary Element Method. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, volume 50, jan. 2015, pp. 97-108.
- Loeffler C.F. & Mansur, W.J., 2003. Quasi-Dual Reciprocity Boundary Element Method for Incompressible Flow: Application to the Diffusive-Advective Equation. *International Journal for Numecial Methods in Engineering*, vol. 58, pp. 1167- 1186.

Loeffler, C.F., Pereira, P.V.M. & Barcelos, H. M. 2014. Direct Interpolation Technique using Radial Basis Functions Applied to the Helmholtz Problem. In Mallardo, V. & Aliabadi, F. M.H., eds, *15 International Conference on Boundary Element and Meshless Techniques*, pp. 223-228.

Partridge, P.W., Brebbia, C.A. & Wrobel, L.C. 1992. *The Dual Reciprocity, Boundary Element Method*, Computational Mechanics Publications and Elsevier, London.

Spotts, M. F., 1961. *Design of Machine Elements*. New York: Prentice-Hall, 3^a Ed.

Timoshenko, S. P. & Goodier, J.N., 1968. *Theory of Elasticity*. McGrawhill Kogakusha.