



OBTENÇÃO DE UM ELEMENTO DE VIGA UNIFICADO UTILIZANDO O PRINCÍPIO DOS TRABALHOS VIRTUAIS COMPLEMENTAR

William Taylor Matias Silva

Aurélio Augusto Cunha

taylor@unb.br

eng_augustocunha@hotmail.com

María Paz Duque Gutiérrez

mpazduque@gmail.com

Departamento de Engenharia Civil e Ambiental - ENC

Universidade de Brasília - UnB

Campus Darcy Ribeiro, 70910-900, Brasília - DF, Brasil

Resumo. Neste trabalho descreve-se um modelo de elemento finito de viga unificado que não apresenta bloqueio por deformação a corte e engloba as teorias de vigas de Euler-Bernoulli e de Timoshenko. Obtém-se a matriz de rigidez unificada desse elemento através da separação dos modos de corpo rígido dos modos deformacionais e da aplicação do princípio dos trabalhos virtuais complementar. Implementa-se essa matriz de rigidez em um programa de elementos finitos para a análise linear de pórticos planos. Mostram-se os resultados de exemplos numéricos nos quais se constata a inexistência de travamento ao cisalhamento.

Palavras chaves: Elemento de viga unificado, Método das forças, Elementos finitos

1 INTRODUÇÃO

Neste trabalho descreve-se um modelo de elemento finito de viga 2D que contempla as teorias de Euler-Bernoulli e de Timoshenko e que não apresenta bloqueio por deformação a corte. Em primeiro lugar, na descrição cinemática deste elemento finito propõe-se a separação dos deslocamentos de corpo rígido, translações e rotações, dos deslocamentos deformacionais. Em seguida é necessário definir os modos de deformações do elemento. Neste trabalho segue-se a proposição metodológica descrita no trabalho de Argyris et al., (1979) e que posteriormente foi utilizada, por exemplo, em um artigo publicado por Krenk (1994). Para o elemento de viga aqui descrito, os modos de deformações são bastante simples. O primeiro modo de deformação é obtido considerando o elemento sujeito a um estado de flexão pura, isto é, sem esforço cortante. Este modo define uma elástica simétrica com rotações deformacionais θ_s , nas extremidades do elemento, de mesmo módulo e sentido contrário. Por esta razão, é denominado de modo simétrico de deformação. Enquanto que o segundo modo de deformação é obtido aplicando-se nas extremidades do elemento um momento fletor M_a de mesmo módulo e de mesmo sentido o que gera um estado de cisalhamento constante e uma elástica antisimétrica, daí a denominação de modo antisimétrico de deformação. A partir dos deslocamentos deformacionais e da aplicação do Princípio dos Trabalhos Virtuais Complementares que leva em consideração o efeito do esforço cortante obtém-se a matriz de rigidez unificada do elemento.

Por outro lado, a representação dos deslocamentos e rotações por meio de interpolações lineares introduz uma gama de aproximações, dentre as quais provavelmente uma das mais importantes é o travamento por cisalhamento. Este fenômeno é muito conhecido para muitas classes de elementos finitos de vigas, de placas e de cascas cuja formulação baseia-se em translações e rotações. Neste trabalho este fenômeno será ilustrado levando em conta os modos deformacionais simétrico e antisimétrico proposto para o elemento de viga 2D e pela utilização de interpolações lineares para as rotações. A seguir, descrevem-se algumas técnicas para evitar o travamento por corte no elemento de viga e ao mesmo tempo obtém-se algumas matrizes de rigidezes decorrentes dessas técnicas. Demonstra-se que uma das correções propostas obtém a mesma matriz de rigidez unificada descrita neste trabalho. Finalmente, implementam-se essas matrizes em um programa de elementos finitos para análises lineares estáticas de pórticos planos onde mostram-se os resultados de exemplos numéricos sem a ocorrência de travamento por corte.

2 DESLOCAMENTOS DEFORMACIONAIS

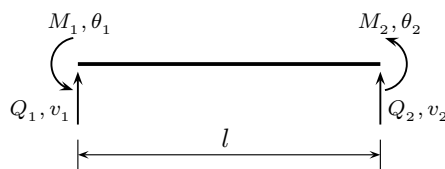


Figura 1: Elemento finito de viga 2D.

Seja um elemento finito de viga com quatro graus de liberdade conforme mostra-se na Figura 1. O vetor de deslocamentos nodais é descrito por

$$\mathbf{u}^T = (u_1, \theta_1, v_2, \theta_2) \quad (1)$$

onde v_1 e v_2 são as translações e θ_1 e θ_2 são as rotações das extremidades do elemento, respectivamente, conforme mostra-se na Figura 2a. Cabe destacar, que esses deslocamentos nodais contém tanto os modos de corpo rígido quanto os modos deformacionais do elemento de viga. Os modos de corpo rígido do elemento de viga são definidos como

$$\mathbf{u}_r^T = (v_t, \theta_r) \quad (2)$$

onde v_t é a translação de corpo rígido e θ_r é a rotação de corpo rígido definida como positiva no sentido anti-horário conforme mostra-se na Figura 2b. Considerando que as rotações de corpo rígido sejam pequenas pode-se escrever que $\theta_r = \frac{v_2 - v_1}{l}$. Por outro lado, os modos deformacionais do elemento de viga são dados por

$$\mathbf{u}_d^T = (\theta_s, \theta_a) \quad (3)$$

onde θ_s é a rotação nodal simétrica e θ_a é a rotação nodal anti-simétrica conforme mostra-se na Figura 2b. Partindo das seguintes relações, $-\theta_s + \theta_a = \theta_1 - \theta_r$ e $\theta_s + \theta_a = \theta_2 - \theta_r$, definidas nos nós 1 e 2, respectivamente, obtém-se que

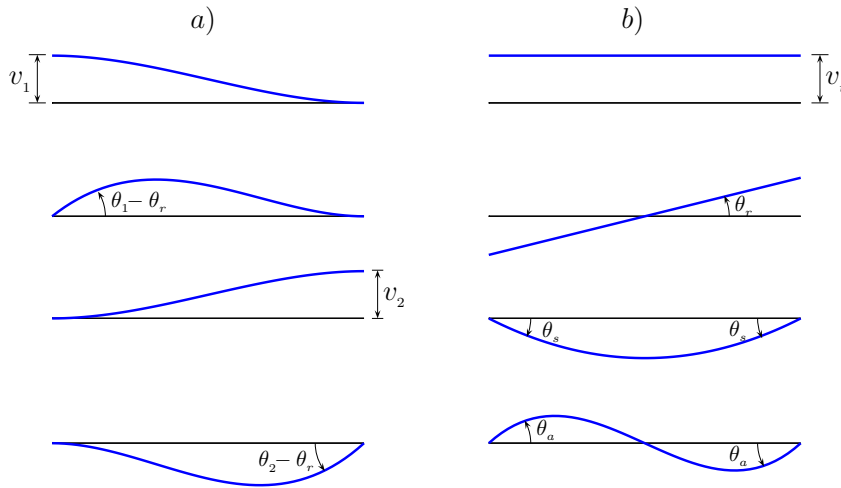


Figura 2: Deslocamentos nodais unitários. Modos de corpo rígido e deformacionais.

$$\begin{aligned} \theta_s &= \frac{1}{2}(\theta_2 - \theta_1) \\ \theta_a &= \frac{1}{2}(\theta_2 + \theta_1) - \frac{1}{l}(v_2 - v_1) \end{aligned} \quad (4)$$

A relação entre os deslocamentos deformacionais e os deslocamentos nodais é dada pela relação matricial $\mathbf{u}_d = \mathbf{B}\mathbf{u}$, sendo $\mathbf{B}$ a matriz de transformação cujas componentes são dadas por

$$\begin{Bmatrix} \theta_s \\ \theta_a \end{Bmatrix} = \frac{1}{l} \begin{bmatrix} 0 & -\frac{l}{2} & 0 & \frac{l}{2} \\ 1 & \frac{l}{2} & -1 & \frac{l}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad (5)$$

Conforme mostra-se na Figura 2b a rotação simétrica θ_s caracteriza-se por rotações idênticas nos nós e de sentidos contrários, enquanto que a rotação anti-simétrica θ_a por rotações nodais iguais e de mesmo sentido. No próximo item obtém-se a matriz de rigidez do elemento de viga levando em consideração o estado de esforços internos gerados pelos modos deformacionais gerados por θ_s e θ_a , respectivamente.

3 MATRIZ DE RIGIDEZ UNIFICADA

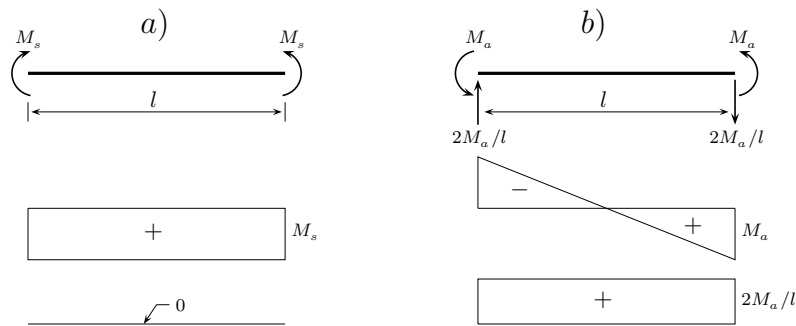


Figura 3: Modos deformacionais. Flexão simétrica e flexão anti-simétrica

Conforme mostra-se na Figura 3a o modo deformacional simétrico gera um estado de flexão pura cujos momentos nodais M_s são iguais e têm sentidos contrários. No estado de flexão pura o momento fletor é constante, consequentemente o esforço cortante é nulo, isto é, $Q = 0$. No entanto, na Figura 3b observa-se que o modo deformacional anti-simétrico gera um estado de flexão simples cujos momentos nodais M_a são iguais e possuem sentidos iguais resultando em um diagrama de momento fletor linear. O estado de flexão simples resulta em um esforço de cisalhamento constante no valor de $Q = 2M_a/l$.

Para determinar as rotações simétricas θ_s nos nós aplica-se um par de momentos virtuais simétricos $\delta M_s = 1$ em ambos nós do elemento, enquanto que para as rotações anti-simétricas θ_a aplica-se um par de momentos virtuais anti-simétricos $\delta M_a = 1$, respectivamente. O trabalho virtual externo é igual em cada nó, e as rotações nodais podem ser obtidas através do princípio dos trabalhos virtuais complementares como

$$2\theta_s = \int_0^l \frac{\delta M_s(x) M_s(x)}{EI} dx = \frac{M_s l}{EI}$$

$$2\theta_a = \int_0^l \left(\frac{\delta M_a(x) M_a(x)}{EI} + \frac{\delta Q_a(x) Q_a(x)}{GA_0} \right) dx = \frac{M_a l}{3EI} + \frac{4M_a l}{GA_0 l^2}$$
(6)

Para obter os resultados acima foram utilizados as funções $M_s(x)$ e $M_a(x)$ e suas respectivas variações virtuais $\delta M_s(x)$ e $\delta M_a(x)$ detalhadas no Quadro 1.

Quadro 1: Variação virtual dos esforços internos em relação a M_s e M_a , respectivamente

SIMÉTRICA
$M(x) = M_s$
$\delta M(x) = \frac{\partial M(x)}{\partial M_s} \delta M_s = 1 \delta M_s, \quad \delta M_s = 1 \quad \therefore \quad \delta M(x) = 1$
ANTI-SIMÉTRICA
$M(x) = \left(\frac{2x}{l} - 1\right) M_a$
$\delta M(x) = \frac{\partial M(x)}{\partial M_a} \delta M_a = \left(\frac{2x}{l} - 1\right) \delta M_a, \quad \delta M_a = 1 \quad \therefore \quad \delta M(x) = \left(\frac{2x}{l} - 1\right)$
$Q(x) = \frac{dM(x)}{dx} = \frac{2M_a}{l}$
$\delta Q(x) = \frac{\partial Q(x)}{\partial M_a} \delta M_a = \frac{2}{l} \delta M_a, \quad \delta M_a = 1 \quad \therefore \quad \delta Q(x) = \frac{2}{l}$

Desta maneira, os coeficientes de flexibilidade do elemento de viga contém duas relações

$$\theta_s = \frac{M_s l}{EI}, \quad \theta_a = (1 + \Phi) \frac{M_a l}{6EI}$$
(7)

onde o efeito da deformação de cisalhamento é determinada pelo parâmetro adimensional

$$\Phi = \frac{12EI}{GA_0 l^2}$$
(8)

onde A_0 é a área da seção transversal corrigida pelo fator de forma que leva em conta o efeito da distribuição das tensões cisalhamento na seção transversal. Por exemplo, para seções retangulares este valor é 5/6, enquanto que para seções I, A_0 é aproximadamente igual a área da alma. Nos exemplos numéricos aqui descritos será adotado o valor $A_0 = \frac{5}{6}A$. Note-se que para a hipótese de Bernoulli $\Phi = 0$.

Agora, escreve-se o vetor de forças nodais $\mathbf{f}^T = (Q_1, M_1, Q_2, M_2)$ em função dos momentos fletores simétricos e anti-simétricos de acordo com seus sentidos definidos na Figura 3 e

com os sentidos dos graus de liberdade do elemento de viga definidos na Figura 1. Portanto, chega-se a

$$\begin{Bmatrix} Q_1 \\ M_1 \\ Q_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2M_a/l \\ -M_s + M_a \\ -2M_a/l \\ M_s + M_a \end{Bmatrix} = \frac{1}{l} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -l & l \\ 0 & -2 \\ l & l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_s \\ M_a \end{Bmatrix} \quad (9)$$

Por outro lado, usando a equação (7) pode-se escrever que

$$M_s = \frac{2EI}{l}\theta_s, \quad M_a = \frac{1}{(1+\Phi)} \frac{6EI}{l}\theta_a \quad (10)$$

Desta maneira, o vetor de forças nodais pode ser escrito em função dos modos deformaçionais definidos na Figura 2b. Então, substitui-se os valores de M_s e M_a dados pela equação (10) na equação (9), chega-se a seguinte expressão

$$\begin{Bmatrix} Q_1 \\ M_1 \\ Q_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \frac{2EI}{(1+\Phi)l^2} \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ -(1+\Phi)l & 3l \\ 0 & -6 \\ (1+\Phi)l & 3l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_s \\ \theta_a \end{Bmatrix} \quad (11)$$

Por fim, para obter a matriz de rigidez do elemento de viga definido na Figura 1 expressa-se o vetor de forças nodais em função dos deslocamentos nodais. Assim, substituindo os valores de θ_s e θ_a dados pela equação (5) na equação (11), obtém-se que

$$\begin{Bmatrix} Q_1 \\ M_1 \\ Q_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{(1+\Phi)l^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & (4+\Phi)l^2 & -6l & (2-\Phi)l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & (2-\Phi)l^2 & -6l & (4+\Phi)l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad (12)$$

Em forma compacta a equação acima escreve-se como $\mathbf{f} = \mathbf{K}\mathbf{u}$, onde $\mathbf{K}$ é a matriz de rigidez do elemento de viga definido na Figura 1, cujos coeficientes são dados na equação (12). Observe que esta matriz leva em consideração a hipótese de Bernoulli e o efeito da deformação

por cisalhamento através do parâmetro Φ . No próximo item demonstra-se que esta matriz de rigidez não introduz o efeito de bloqueio por deformação de corte. É importante destacar o uso da metodologia de separação do movimento de corpo rígido do movimento deformacional do elemento de viga para a obtenção da matriz de rigidez. Em seguida, definem-se os esforços internos resultantes dos modos de deformação simétrico e anti-simétrico, respectivamente. Aplica-se o princípio dos trabalhos virtuais complementares para obter os coeficientes de flexibilidade e por fim os coeficientes de rigidezes. Esta abordagem pode ser usada para problemas mais gerais, tais como, vigas de altura variável, vigas curvas, etc. Além de incluir o efeito do esforço cortante na obtenção dos coeficientes de rigidezes desses elementos, para maiores detalhes consultar a referência Krenk (1994).

4 BLOQUEIO POR CISALHAMENTO

A representação dos deslocamentos e rotações por meio de interpolações lineares introduz um número de aproximações, dentre as quais provavelmente uma das mais importantes é o travamento por cisalhamento. Este fenômeno, que é muito conhecido para muitas classes de elementos finitos de vigas, de placas e de cascas cuja formulação baseia-se em translações e rotações, será ilustrado aqui através de um simples elemento de viga 2D. Portanto, considera-se uma viga bi-apoiada sob flexão pura conforme mostra-se na Figura 4a, conseqüentemente esta viga estará sujeita a um estado de cisalhamento nulo. Por outro lado, a curvatura e a deformação de cisalhamento são dadas por

$$\kappa = \theta', \quad \gamma = v' - \theta \quad (13)$$

Com essas medidas de deformações a energia elástica armazenada da viga bi-apoiada se escreve como

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L (EI\kappa^2 + GA_0\gamma^2) dx \quad (14)$$

onde A_0 é a área da seção transversal corrigida pelo fator de forma que leva em conta a distribuição das tensões de cisalhamento como definido anteriormente. O problema do travamento por cisalhamento surge devido ao segundo termo da expressão acima uma vez o que o mesmo não é capaz de representar um estado de cisalhamento nulo se as variáveis $v'(x)$ e $\theta(x)$ são interpoladas linearmente.

Seja a viga bi-apoiada de comprimento L discretizada em n elementos idênticos de comprimento $l = \frac{L}{n}$ sujeitos a flexão pura conforme mostra-se na Figura 4c. Para cada elemento a translação $v(x)$ e a rotação $\theta(x)$ são interpoladas linearmente em função dos respectivos valores nodais. Os valores exatos da curvatura $\kappa = \theta'$ e das rotações nodais da viga bi-apoiada são dadas por

$$\kappa = \theta' = \frac{M_0}{EI}, \quad \theta_A = -\theta_B = \frac{M_0 L}{2EI} \quad (15)$$

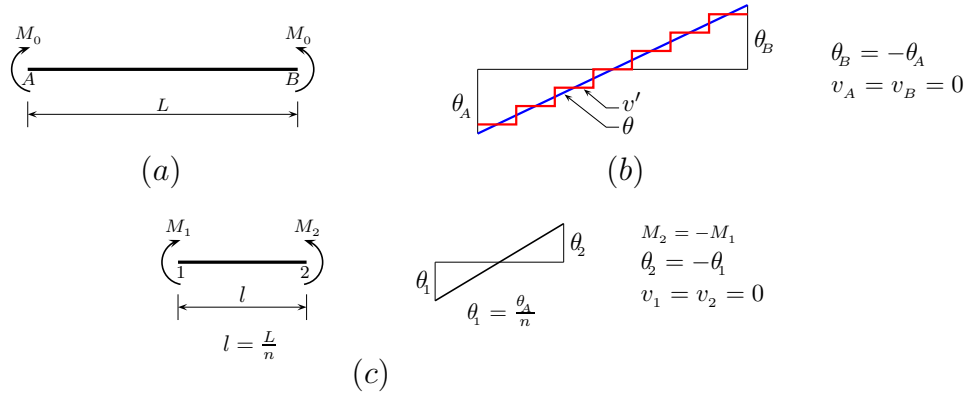


Figura 4: a) Flexão pura. b) Distribuição de θ e v' . c) Elemento finito de viga.

Na Figura 4b mostra-se a função linear de $\theta(x)$ no intervalo de $[0, L]$. Devido a interpolação linear de $v(x)$ em cada elemento, a sua derivada $v'(x)$ será constante. No presente caso cada elemento deforma-se simetricamente, desta maneira a função $v'(x)$ intersecta a função $\theta(x)$ na metade de cada elemento como mostra-se a Figura 4b. Dentro do intervalo $[0, L]$, a função $v'(x)$ é representada por uma função degrau, como consequência a deformação por cisalhamento $\gamma = v' - \theta$ é diferente de zero em cada elemento, enquanto que a solução exata é dada por $\gamma = 0$. Portanto, o segundo termo da energia de deformação, para o caso de flexão pura, deveria anular-se, isto é, $\frac{1}{2} \int_0^L G A_0 \gamma^2 dx = 0$. Este fato acontece devido às variáveis $v(x)$ e $\theta(x)$ terem sido interpoladas linearmente o que acarreta o travamento por cisalhamento.

Para calcular uma expressão aproximada da energia de deformação da viga discretizada em n elementos, as variáveis $v(x)$ e $\theta(x)$ para cada elemento serão interpoladas linearmente como

$$\begin{aligned}\theta &= \left(1 - \frac{x}{l}\right)\theta_1 + \frac{x}{l}\theta_2 \\ v &= \left(1 - \frac{x}{l}\right)v_1 + \frac{x}{l}v_2\end{aligned}\tag{16}$$

Desta maneira, a curvatura e a deformação de cisalhamento são dadas por

$$\begin{aligned}\kappa &= \frac{d\theta}{dx} = \frac{\theta_2 - \theta_1}{l} = \frac{2\theta_1}{l} \\ v' &= \frac{dv}{dx} = \frac{v_2 - v_1}{l} = 0, \quad \text{com } v_2 = v_1 = 0 \\ \gamma &= v' - \theta = \left(1 - \frac{2x}{l}\right)\theta_1\end{aligned}\tag{17}$$

Lembrando que a razão $\frac{\theta_A}{n}$ representa a proporcionalidade entre θ_A e θ_1 conforme mostra-se na Figura 4. Substituindo as equações (17a) e (17c) na equação (14) chega-se a

$$U_{approx} = \frac{1}{2} n \int_0^l EI \left(\frac{2\theta_1}{l} \right)^2 dx + \frac{1}{2} n \int_0^l GA_0 \left(1 - \frac{2x}{l} \right)^2 \theta_1^2 dx \quad (18)$$

$$U_{approx} = \frac{1}{2} EIL \left(\frac{2\theta_A}{L} \right)^2 + \frac{1}{6} GA_0 L \left(\frac{\theta_A}{n} \right)^2$$

O primeiro termo representa o valor exato, enquanto que o segundo termo é uma consequência indesejável devido à inconsistência na representação da deformação de cisalhamento. É conveniente escrever este resultado do seguinte modo

$$U_{approx} = \left(1 + \frac{1}{n^2 \Phi_L} \right) U_{exata} \quad (19)$$

onde Φ_L é um parâmetro de cisalhamento adimensional da viga bi-apoiada dado por

$$\Phi_L = \frac{12EI}{L^2 GA_0} \quad (20)$$

Para viga de Bernoulli a rigidez ao cisalhamento é infinita, o que implica em $\Phi_L = 0$. Portanto, conclui-se que a interpolação linear para as translações e rotações não reproduzem a hipótese de Bernoulli para vigas. Por outro lado, observa-se que o efeito de bloqueio por cisalhamento no caso de flexão pura depende do parâmetro $n^2 \Phi_L$, que é o fator de cisalhamento de um elemento individual, e é dado por

$$\Phi = n^2 \Phi_L = \frac{12EI}{l^2 GA_0} \quad (21)$$

Trata-se do mesmo parâmetro obtido no ítem anterior dado pela equação (8). Nota-se pela expressão (19) que este fator introduz um aumento artificial na rigidez da viga bi-apoiada sob flexão pura. Sendo que este erro decresce com n^{-2} , mas é indesejável o uso de muitos elementos para obter a solução de um simples problema de viga. A seguir descreve-se de maneira sucinta técnicas para evitar o travamento por deformação de cisalhamento.

4.1 Técnicas para evitar o bloqueio por cisalhamento

Segundo Krenk (2009) há basicamente três técnicas para evitar o travamento por cisalhamento em elementos finitos com formulação em deslocamentos. Para o elemento de viga sob flexão pura aqui descrito é suficiente adotar uma interpolação linear para $\theta(x)$ e uma interpolação quadrática para $v(x)$ pois representaria de maneira consistente a deformação de cisalhamento, isto é, $\gamma = v' - \theta = 0$. Para teoria de vigas mais abrangente pode-se evitar o travamento com a introdução de um nó no centro do elemento para os graus de liberdades translaçionais ou a adoção de um modo de deformação adicional, que posteriormente é eliminado

a nível de elemento. Esta técnica é descrita, por exemplo, em Ibrahimbegović (1995). A segunda técnica é a utilização da integração reduzida que é adotada para não levar em conta certas contribuições para o cálculo da matriz de rigidez do elemento. Esta técnica, por exemplo, está descrita em Hughes (1997). Para o exemplo descrito no ítem anterior esta técnica corresponde avaliar a deformação por cisalhamento no centro do elemento. Portanto, mostra-se na Figura 4b que as contribuições indesejadas de deformação de cisalhamento não seriam computadas para a avaliação da energia de deformação do elemento. A terceira estratégia consiste em modificar os coeficientes de rigidezes para compensar os erros introduzidos pelas interpolações lineares de $\theta(x)$ e de $v(x)$. A seguir obtém-se os coeficientes de rigidez a flexão e ao cisalhamento modificados $\overline{EI}$ e $\overline{GA}_0$, respectivamente, para o elemento de viga com interpolação linear.

Para elementos de vigas utilizam-se os esforços internos gerados pelos modos de deformação simétricos e anti-simétricos, apresentados na Figura 3, para obter os coeficientes de rigidezes modificados. O modo anti-simétrico será analisado primeiro. Como pode-se observar na Figura 3b e no Quadro 1, o momento fletor varia linearmente de $-M_a$ a M_a , enquanto o esforço cortante é constante e vale $Q = 2M_a/l$. Desta maneira, a energia de deformação é dada por

$$U_{exata} = \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{M^2(x)}{EI} + \frac{Q^2(x)}{GA_0} \right) dx = \frac{M_a^2 l}{6EI} + \frac{2M_a^2}{GA_0 l} \quad (22)$$

Esta expressão pode ser reescrita como

$$U_{exata} = (1 + \Phi) \frac{M_a^2 l}{6EI} \quad (23)$$

onde o parâmetro de cisalhamento é dado por $\Phi = 12EI/GA_0 l^2$. Observe que este parâmetro já foi definido nos itens 3 e 4 pelas equações (8) e (21), respectivamente. A energia de deformação pode ser expressa em função das rotações nodais θ_a através da relação $2\theta_a = \partial U / \partial M_a$, onde o fator 2 corresponde a igual contribuição do momento fletor M_a aplicado nas extremidades do elemento. Assim, substituindo esta relação na equação (23) chega-se a

$$U_{exata} = \frac{6}{(1 + \Phi)} \frac{EI}{l} \theta_a^2 \quad (24)$$

Calcula-se agora a energia de deformação aproximada utilizando a equação (14) com o parâmetro $\overline{GA}_0$ corrigido com a finalidade de representar a flexão anti-simétrica utilizando interpolação linear. Como o esforço cortante, para este caso, é constante, consequentemente a deformação por cisalhamento é constante, isto é, $\gamma = cte$. De acordo com as equações (13) e (17b) isto implica em $\theta = cte$ e $\theta' = 0$, portanto o primeiro termo da equação (14) é nulo, o que leva a

$$U_{approx} = \frac{1}{2} \int_0^l \overline{GA}_0 \theta^2(x) dx = \frac{\overline{GA}_0 l}{2} \theta_a^2 \quad (25)$$

Para determinar o parâmetro $\overline{GA}_0$ impõe-se que as duas expressões da energia de deformação, equações (24) e (25), sejam idênticas. Desta maneira, o coeficiente de rigidez ao cisalhamento equivalente é escrito como

$$\overline{GA}_0 = \frac{\Phi}{1 + \Phi} GA_0 \quad (26)$$

O procedimento para a análise da flexão simétrica é similar. Neste caso, o momento fletor é constante e o estado de cisalhamento é nulo, desta maneira a expressão exata da energia de deformação escreve-se como

$$U_{exata} = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M^2(x)}{EI} dx = \frac{M_s^2 l}{2EI} \quad (27)$$

O ângulo nas extremidades do elemento é calculada pela relação $2\theta_s = \partial U / \partial M$, aplicando tal relação em (27), chega-se a

$$U_{exata} = \frac{2EI}{l} \theta_s^2 \quad (28)$$

Calcula-se agora a energia de deformação aproximada utilizando as equações (14) e (17) e os coeficientes de rigidezes modificados $\overline{EI}$ e $\overline{GA}_0$, tal que

$$U_{approx} = \frac{1}{2} \int_0^l \left(\overline{EI} \kappa^2(x) + \overline{GA}_0 \gamma^2(x) \right) dx = \left(\frac{2\overline{EI}}{l} + \frac{1}{6} \overline{GA}_0 l \right) \theta_s^2 \quad (29)$$

O parâmetro $\overline{EI}$ é selecionado impondo que as expressões da energia de deformação dadas pelas equações (28) e (29) sejam idênticas quando se utiliza o valor de $\overline{GA}_0$ dado em (26), desta maneira, este parâmetro corrigido é expresso como

$$\overline{EI} = \frac{\Phi}{1 + \Phi} EI \quad (30)$$

Observa-se que este procedimento leva a fatores de correção idênticos para os coeficientes de rigidezes EI e GA_0 . Em elementos finitos é usual obter as matrizes de rigidezes através da

integração numérica. A matriz de rigidez do elemento pode ser obtida a partir da expressão da energia de deformação escrita em forma matricial como

$$U = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u} \quad (31)$$

onde $\mathbf{u}$ é o vetor de deslocamentos nodais definidos na equação (1). Usando a interpolação linear dada em (17) e a integração completa da energia de deformação expressa pela equação (14), obtém a seguinte matriz de rigidez

$$\mathbf{K} = \frac{\overline{EI}}{l} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{\overline{GA}_0}{6l} \begin{bmatrix} 6 & 3l & -6 & 3l \\ 3l & 2l^2 & -3l & l^2 \\ -6 & -3l & 6 & -3l \\ 3l & l^2 & -3l & 2l^2 \end{bmatrix} \quad (32)$$

Por outro lado, usando a interpolação linear dada em (17) e apenas um ponto de gauss no meio do elemento para integrar a energia de deformação expressa pela equação (14), obtém a seguinte matriz de rigidez

$$\mathbf{K} = \frac{\overline{EI}}{l} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{\overline{GA}_0}{4l} \begin{bmatrix} 4 & 2l & -4 & 2l \\ 2l & l^2 & -2l & l^2 \\ -4 & -2l & 4 & -2l \\ 2l & l^2 & -2l & l^2 \end{bmatrix} \quad (33)$$

Substituindo os parâmetros $\overline{GA}_0$ e $\overline{EI}$ dados pelas equações (26) e (30), respectivamente, na expressão da matriz de rigidez dado pela equação (33), chega-se a

$$\mathbf{K} = \frac{EI}{(1 + \Phi)l^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & (4 + \Phi)l^2 & -6l & (2 - \Phi)l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & (2 - \Phi)l^2 & -6l & (4 + \Phi)l^2 \end{bmatrix} \quad (34)$$

que é a matriz de rigidez do elemento de viga obtida no item 3 que contempla as hipóteses de Bernuolli e Timoshenko. Krenk (2000) obtém esta matriz a partir do equilíbrio estático dos esforços internos gerados modos de deformação simétrico e anti-simétrico.

5 EXEMPLOS NUMÉRICOS

As matrizes de rigidezes dadas pelas equações (32) e (34) foram implementadas em um programa de elementos finitos para análises lineares estáticas de pórticos planos denominado de *plane_frame.f90* desenvolvido pelo primeiro autor deste artigo. Nos exemplos numéricos a seguir consideram-se três vigas isostáticas. A primeira viga está submetida à flexão pura, a segunda sujeita a um esforço cortante constante e a terceira a um esforço cortante linear. Para mostrar o travamento por cisalhamento utilizam os coeficientes de rigidezes EI e GA_0 sem a correção do fator Φ na matriz de rigidez expressa em (32). Por outro lado, para obter soluções isentas de bloqueio por corte utiliza-se a matriz de rigidez dada pela equação (34). Essas vigas foram discretizadas com 8 e 16 elementos. As vigas possuem seção transversal retangular e foram consideradas as seguintes relações: $L = 10h$, $h = 2b$, $E = 0.4G$, $A_0 = \frac{5}{6}A$ e $\Phi_L = 0.03$.

5.1 Viga bi-apoiada sob flexão pura

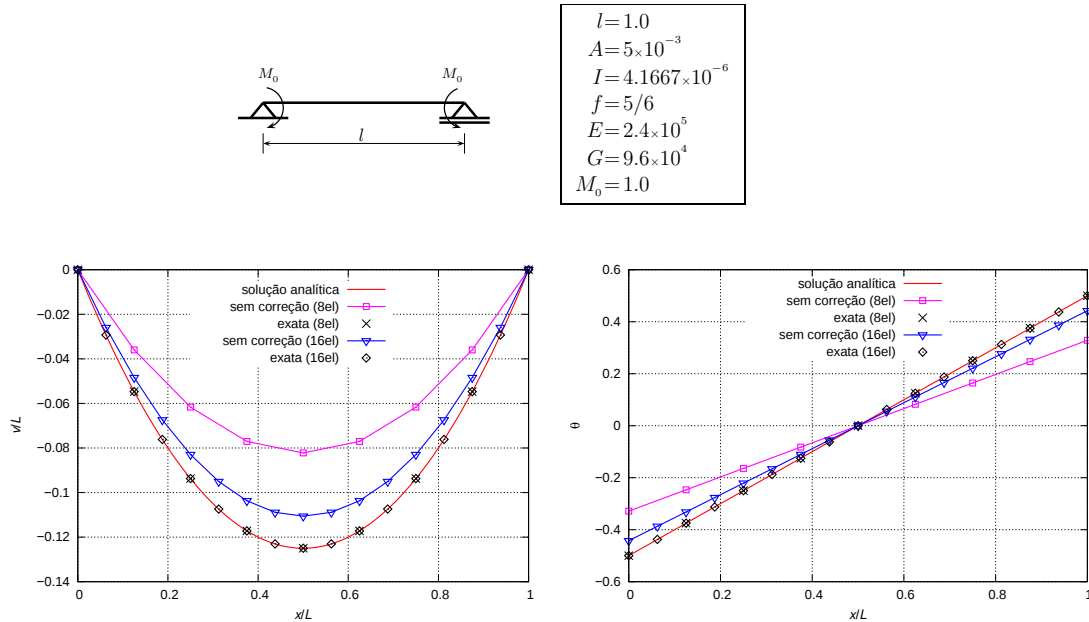


Figura 5: Deflexão e rotação da viga bi-apoiada sob flexão pura. Resultados analíticos e numéricos.

Considera-se neste exemplo uma viga bi-apoiada sob flexão pura como mostra a Figura 5a, também constam nesta figura as propriedades geométricas e mecânicas da viga. Os valores exatos das máximas rotações e translações são

$$\begin{aligned}
 \theta(x) &= \frac{M_0}{EI} \left(x - \frac{l}{2} \right) \\
 \theta_A(x=0) &= -\theta_B(x=l) = \frac{M_0 l}{2EI} \\
 v(x) &= \frac{M_0}{2EI} (lx - x^2) \\
 v(x = \frac{l}{2}) &= \frac{M_0 l^2}{8EI}
 \end{aligned} \tag{35}$$

Observe que para este caso o esforço cortante é nulo portanto não há a influência da rigidez ao cisalhamento na deflexão da viga. Na Figura 5b mostram-se os resultados numéricos para as translações enquanto que na Figura 5c mostram-se os resultados numéricos para as rotações, ambos contrastados com os resultados analíticos. Observa-se que para os casos sem a correção pelo parâmetro Φ obteve-se uma sobrerigidez tanto para as translações quanto para as rotações com 8 e 16 elementos, respectivamente. Para a malha de 8 elementos houve um aumento de rigidez de 34,25% tanto para rotação quanto para a translação máximas, enquanto que para a malha de 16 elementos esse aumento foi de 11,52% para ambas rotação e translação máximas. Por outro lado, pode-se observar nas Figuras 5b e 5c que os resultados numéricos obtidos com o uso do parâmetro Φ foram coincidentes com os valores exatos tanto para as translações quanto para as rotações, o que mostra que a matriz de rigidez dada em (34) é livre do bloqueio por cisalhamento, assim não causando uma sobrerigidez artificial.

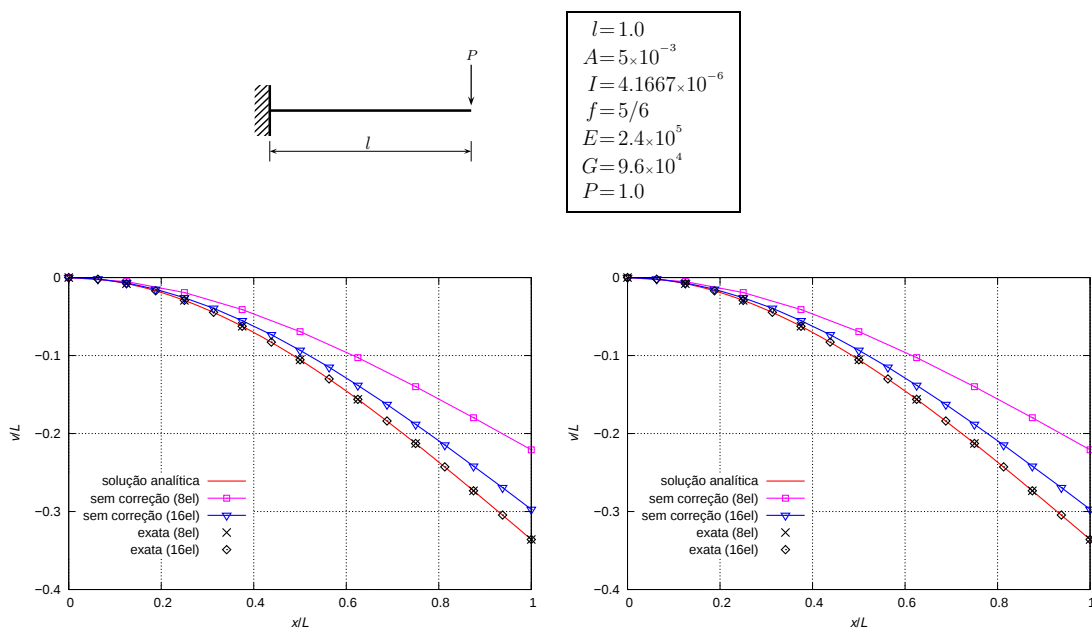


Figura 6: Deflexão e rotação da viga engastada com uma carga aplicada na extremidade livre. Resultados analíticos e numéricos.

5.2 Viga engastada com uma carga aplicada na extremidade livre

Considera-se neste exemplo uma viga engastada com uma carga aplicada na extremidade livre como mostra a Figura 6a, também constam nesta figura as propriedades geométricas e mecânicas da viga. Os valores exatos das máximas rotações e translações são

$$\begin{aligned}\theta(x) &= \frac{Px}{EI} \left(\frac{x}{2} - l \right) \\ \theta_A(x=0) &= 0, \quad \theta_B(x=l) = -\frac{Pl^2}{2EI} \\ v(x) &= \frac{Px^2}{2EI} \left(l - \frac{x}{3} \right) + \frac{Px}{GA_0} \\ v(x=l) &= \frac{Pl^3}{3EI} + \frac{Pl}{GA_0}\end{aligned}\tag{36}$$

Observa-se que devido ao esforço cortante constante há a influência da rigidez ao cisalhamento na deflexão da viga. Na Figura 6b mostram-se os resultados numéricos para as translações enquanto que na Figura 6c mostram-se os resultados numéricos para as rotações, ambos contrastados com os resultados analíticos. Observa-se que para os casos sem a correção pelo parâmetro Φ obteve-se uma sobre rigidez tanto para as translações quanto para as rotações com 8 e 16 elementos, respectivamente. Para a malha de 8 elementos houve um aumento de rigidez de 34,25% tanto para rotação quanto para a translação máximas, enquanto que para a malha de 16 elementos esse aumento foi de 11,52% para ambas rotação e translação máximas. Os valores dos erros foram idênticos aos do exemplo anterior pois o parâmetro de cisalhamento Φ adotado é o mesmo para ambos exemplos. Por outro lado, pode-se observar nas Figuras 6b e 6c que os resultados numéricos obtidos com o uso do parâmetro Φ foram coincidentes com os valores exatos tanto para as translações quanto para as rotações, assim como no exemplo anterior, conclui-se que a correção feita com o parâmetro Φ evita o bloqueio por cisalhamento e consequentemente não provoca uma sobre rigidez artificial.

5.3 Viga bi-apoiada sujeita a uma carga uniformemente distribuída

$$\begin{aligned}\theta(x) &= \frac{q}{EI} \left(\frac{lx^2}{4} - \frac{x^3}{6} - \frac{l^3}{24} \right) \\ \theta_A(x=0) &= -\theta_B(x=l) = \frac{ql^3}{24EI} \\ v(x) &= \frac{qx}{12EI} \left(-lx^2 + \frac{x^3}{2} + \frac{l^3}{2} \right) + \frac{qx}{2GA_0} (l-x) \\ v(x=\frac{l}{2}) &= \frac{5ql^4}{384EI} + \frac{ql^2}{8GA_0}\end{aligned}\tag{37}$$

Considera-se neste exemplo uma viga bi-apoiada sujeita a uma carga uniformemente distribuída como mostra a Figura 7a. As propriedades geométricas bem como as mecânicas estão detalhadas na Figura 7a. Os valores exatos das máximas rotações e translações estão dadas nas equações (37). Devido a distribuição linear de esforço cortante nota-se que há a influência da rigidez ao cisalhamento na deflexão da viga.

Na Figura 7b mostram-se os resultados numéricos para as translações enquanto que na Figura 7c mostram-se os resultados numéricos para as rotações, ambos contrastados com os resultados analíticos. Observa-se que para os casos sem a correção pelo parâmetro Φ obteve-se uma sobre rigidez tanto para as translações quanto para as rotações com 8 e 16 elementos, respectivamente. Para a malha de 8 elementos houve um aumento de rigidez de 34,25% tanto para rotação quanto para a translação máximas, enquanto que para a malha de 16 elementos esse aumento foi de 11,52% para ambas rotação e translação máximas. Os valores dos erros foram idênticos aos dois exemplos anteriores pelo fato já comentado sobre adoção do mesmo valor para o parâmetro de cisalhamento Φ para as três vigas apresentadas neste trabalho. Por outro lado, pode-se observar nas Figuras 7b e 7c que os resultados numéricos obtidos com o uso do parâmetro Φ foram coincidentes com os valores exatos tanto para as translações quanto para as rotações, assim como nos exemplos anteriores, conclui-se que a correção feita com o parâmetro Φ evita o bloqueio por cisalhamento e consequentemente não provoca uma sobre rigidez artificial.

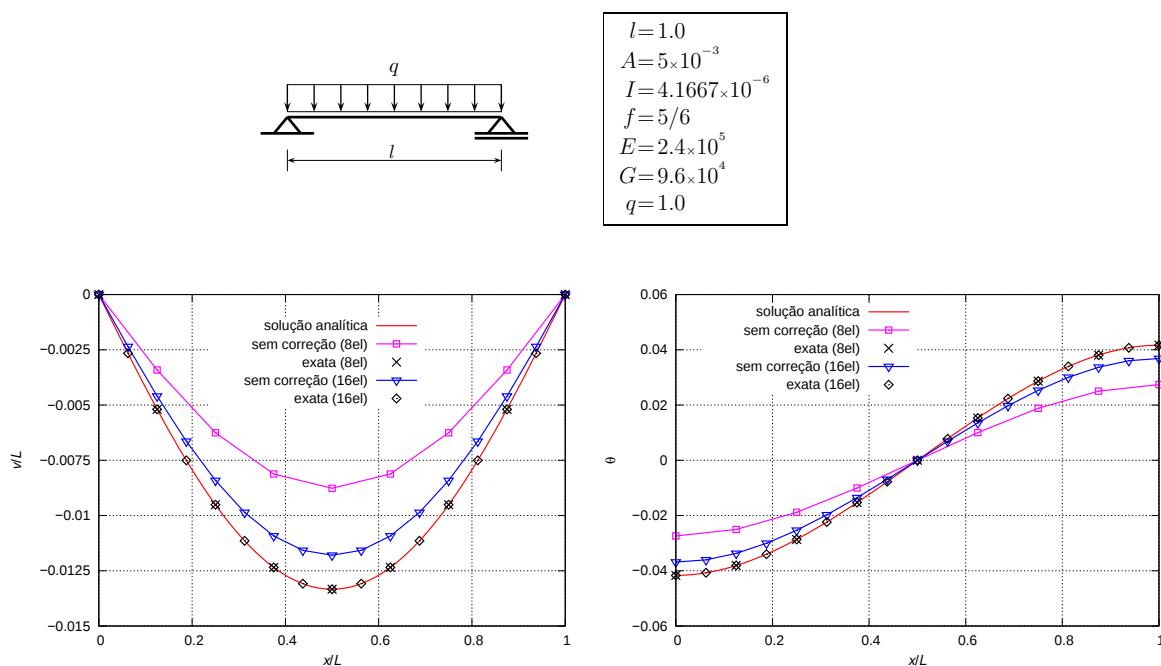


Figura 7: Deflexão e rotação da viga bi-apoiada submetida a uma carga uniformemente distribuída. Resultados analíticos e numéricos.

6 CONCLUSÕES

De maneira sucinta, pode-se concluir que:

- A separação do movimento do elemento de viga em movimento de corpo rígido e em movimento deformacional permite incluir os efeitos da não linearidade geométrica usando a descrição cinemática corrotacional;
- A definição dos modos deformacionais simétrico e anti-simétrico permite gerar facilmente os respectivos esforços internos autoequilibrados, isto é, os estados de flexão pura e de flexão simples;
- A aplicação do método das forças permite obter facilmente a matriz de rigidez que leva em consideração as hipóteses de Euler-Bernoulli e Timoshenko;
- A matriz de rigidez obtida é insensível a bloqueio por deformação de corte não produzindo uma sobrerigidez artificial;
- Esta metodologia pode ser aplicada para elementos de viga curva, elementos de viga com altura variável, etc.
- A correção dos coeficientes de rigidezes permitiu a obtenção de matrizes de rigidezes livres de travamento por cisalhamento utilizando interpolação linear.

7 BIBLIOGRAFIA

Argyris, J., Balmer, H., Doltsinis, J., 1979. Finite element method - The natural approach, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 17/18, 1-106.

Hughes, T.J.R., 1997. *The finite element method, linear static and dynamic finite element analysis*, Dover.

Ibrahimbegović, A., 1995. On finite element implementation of geometrically nonlinear Reissner's beam theory: Three-dimensional curved beam elements, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 122, pp. 11-26.

Krenk, S., 1994. A general format for curved and nonhomogeneous beam elements, *Computers and Structures*, Vol. 50, pp. 449-454.

Krenk, S., 2001. *Mechanics and analysis of beams, columns and cables*, 2nd. Edition, Springer.

Krenk, S., 2009. *Non-linear modeling and analysis of solids and structures*, Cambridge University Press.