



ANÁLISE DA INFLUÊNCIA DA REDUÇÃO DA RIGIDEZ LOCAL E GLOBAL NAS FREQUÊNCIAS NATURAIS DE COMPÓSITOS REFORÇADO COM FIBRAS

Adriana Amaro Diacenco

Patricia da Silva Lopes Alexandrino

Ariosto Bretanha Jorge

adriana_aadiacenco@yahoo.com.br

patricia.silva.lopes@gmail.com

ariosto.b.jorge@gmail.com

Universidade Federal de Itajubá - UNIFEI

Rua Dr. Pereira Cabral, 1303 - Pinheirinho, 37500-903, Itajubá, Minas Gerais, Brasil

Resumo: *No presente trabalho pretende-se demonstrar o efeito da redução da matriz de rigidez, oriunda da formulação matemática do comportamento mecânico através da técnica de elementos finitos, sobre as frequências naturais. Na literatura, é bem conhecido o fato de que a redução da rigidez da estrutura reflete alterações nos parâmetros: frequências naturais, modos de vibração e fatores de amortecimento da estrutura. Nesse sentido, efetua-se uma discussão sobre como se pode avaliar a influência da rigidez da estrutura no parâmetro frequência natural. Para tanto, o comportamento mecânico do material compósito reforçado com fibras é modelado por elementos finitos utilizando-se o software MatLab[®]. O trabalho está organizado da seguinte forma: observações introdutórias são apresentadas considerando-se a modelagem por elementos finitos de materiais compósitos e destacando a importância da análise da matriz de rigidez do modelo no contexto da integridade estrutural. Com o objetivo de ilustrar os procedimentos de modelagem, serão apresentados os valores das frequências naturais para alguns nós da malha do modelo considerando dois estados: as frequências naturais*

obtidas sem a alteração da matriz de rigidez e com a alteração da matriz de rigidez (a nível local e global) a fim de efetuar uma discussão destes resultados para o campo da integridade estrutural.

Palavras-chave: *redução da rigidez. frequências naturais. elementos finitos. integridade estrutural. materiais compósitos*

1 INTRODUÇÃO

A avaliação da integridade estrutural consiste no entendimento e análise de falhas em componentes estruturais que podem surgir ao longo da vida útil da peça e, estão geralmente associados a diversos fatores variando desde alterações dependentes de fatores ambientais à solicitações às quais estão submetidas. Estas alterações podem caracterizar a presença de um dano que afeta adversamente o desempenho dos componentes estruturais. (SANTOS, 2009).

De acordo com isto, pode-se resolver o problema de detecção de dano considerando que mudanças no comportamento vibratório do sistema estrutural refletem alterações na rigidez da estrutura, logo, dano em uma estrutura pode ser entendido como sendo uma degradação da rigidez local.

Atualmente, não existe nenhuma técnica geral de detecção de danos reconhecida na literatura. Mas a avaliação da integridade estrutural pode ser dividida em duas técnicas: técnicas experimentais como, por exemplo: raios X e ultrassom; e técnicas baseadas em modelos, ou seja, efetuando-se uma análise estática ou dinâmica (BEGAMBRE, 2007).

Técnicas baseadas em modelos podem ser elaboradas através da comparação da estrutura em dois estados: estado não danificado e estado danificado. Entende-se por estado não danificado o estado inicial da estrutura onde seu comportamento pode ser descrito por um modelo experimental, analítico e/ou numérico, caracterizando um modelo comumente conhecido como problema direto.

A formulação do problema de detecção de dano via modelos analíticos e/ou numéricos em sistemas estruturais consiste na elaboração de um problema direto e inverso.

O problema direto é caracterizado pelo conhecimento das propriedades mecânicas da estrutura (rigidez, massa, amortecimento, por exemplo) e condições complementares (condições iniciais e de contorno) constituindo um sistema inicial, sem a consideração da presença de qualquer tipo de dano.

A partir da montagem do problema direto formula-se o problema inverso, considerando que o estado do sistema que contenha algum tipo de dano é diferente do estado inicial (sem dano). Deste modo realiza-se uma comparação dos resultados obtidos para a estrutura sem dano e com dano, o que possibilita a formulação de um problema de otimização que busca minimizar as diferenças entre dados do estado inicial da estrutura e do estado danificado da mesma (LOPES, 2007).

Para formulação do problema inverso a fim de resolver o problema de detecção de dano é necessário um parâmetro que seja suficientemente sensível ao dano. É bem conhecido o fato de que as frequências naturais é um parâmetro que pode ser utilizado para construir um modelo que represente a presença do dano.

Segundo Salawu (1997) quando utiliza-se o parâmetro frequência natural para desenvolver uma metodologia do problema de detecção de danos é necessária uma mudança de 5% na frequência natural para que o dano seja detectado. Nesse sentido, este trabalho efetuará uma correlação entre a redução da rigidez elementar com as frequências naturais aplicada à placas compósitas reforçadas com fibras.

2 FORMULAÇÃO POR ELEMENTOS FINITOS

Os campos de deslocamentos da FSDT, proposto por Reddy (1997), é expresso conforme a Equação (1):

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) + z\psi_x(x, y, t) \\ v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) + z\psi_y(x, y, t) \\ w(x, y, z, t) &= w_0(x, y, t) + z\psi_z(x, y, t) \end{aligned} \quad (1)$$

sendo ψ_x e ψ_y as rotações dos segmentos normais à superfície de referência em torno dos eixos y e x respectivamente.

A Equação (1) pode ser reescrita matricialmente como mostrado na Equação (2).

$$U(x, y, z, t) = A(z)u(x, y, t) \quad (2)$$

Na Equação (2) pode ser reescrita conforme a Equação (3).

$$U(x, y, z, t) = [u(x, y, z, t) \ v(x, y, z, t) \ w(x, y, z, t)]^T \quad (3a)$$

$$A(z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & z & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3b)$$

$$u(x, y, t) = [u_0(x, y, t) \ v_0(x, y, t) \ w_0(x, y, t) \ \psi_x(x, y, t) \ \psi_y(x, y, t)]^T \quad (3c)$$

Da Teoria da Elasticidade Linear tem-se que as deformações mecânicas são definidas em termos de formas diferenciais dos deslocamentos mecânicos, tal qual mostra a Equação (2.4).

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \quad (4)$$

Substituindo cada linha da Equação (1) nas Equações (4) e, considerando separadamente as deformações de membrana e cisalhamento, têm-se as Equações (5) e (6).

$$\varepsilon_b(x, y, z, t) = D_b(z)u(x, y, t) \quad (5)$$

$$\varepsilon_s(x, y, z, t) = D_s u(x, y, t) \quad (6)$$

As matrizes D_i ($i = 0, \dots, 2$) são formadas por operadores diferenciais, conforme mostrado nas matrizes da Equação (7).

$$D_b = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & z \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 & z \cdot \left(\frac{\partial}{\partial y} \right) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \left(\frac{\partial}{\partial y} \right) & \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) & 0 & z \cdot \left(\frac{\partial}{\partial y} \right) & z \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) \end{bmatrix} \quad (7a)$$

$$D_s = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7b)$$

As variáveis mecânicas apresentadas nas Equações (1), (5) e (6) são convertidas para a formulação em elementos finitos usando as funções de forma do elemento finito *Serendipity* (Equações 8) que consiste em um elemento retangular de placa plana que apresenta 8 (oito) pontos nodais (Figura 1).

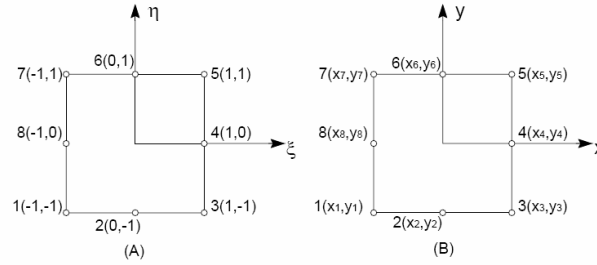


Figura 1. Forma retangular do elemento empregado na formulação por elementos finitos (a) coordenadas locais (b) coordenadas globais.

$$U(x, y, z, t) = A(z)N(\xi, \eta)u(t) \quad (8a)$$

$$\varepsilon_b(x, y, z, t) = D_b(z)N(\xi, \eta)u(t) = B_b(\xi, \eta, z)u(t) \quad (8b)$$

$$\varepsilon_s(x, y, z, t) = D_s N(\xi, \eta)u(t) = B_s N(\xi, \eta)u(t) \quad (8c)$$

A escolha do elemento finito do tipo *Serendipity* se justifica devido ao fato de que ele apresenta um bom desempenho na modelagem de materiais compósitos e de estruturas inteligentes, conforme demonstrado nos trabalhos de Chee (2000) e Diacenco (2010).

2.1 Obtenção das matrizes de rigidez e de massa

As matrizes de massa e rigidez elementares segundo a Teoria de Elementos Finitos para um elemento de placa são dadas conforme a Equação (10).

$$M^{(e)} = \sum_{k=1}^n \int_{z=z_k}^{z_{k+1}} \int_{\xi=-1}^{\xi=+1} \int_{\eta=-1}^{\eta=+1} \rho_k N^T(\xi, \eta) A^T(z) A(z) N(\xi, \eta) \det(J) d\eta d\xi dz \quad (10)$$

Sendo que ρ é a densidade, $N^T(\xi, \eta)$ é a matriz transposta das funções de forma do elemento *Serendipity*, A^T é a matriz transposta da matriz A , expressa na Equação (3), $N(\xi, \eta)$ é a matriz das funções de forma e J é o jacobiano.

A matriz de rigidez foi separada em dois efeitos: flexão-membrana e cisalhamento, conforme as Equações (11) e (12), respectivamente.

$$K_b^{(e)} = \sum_{k=1}^n \int_{z=z_k}^{z_{k+1}} \int_{\xi=-1}^{\xi=+1} \int_{\eta=-1}^{\eta=+1} B_b^T(\xi, \eta, z) C_b^{(k)}(\theta_k) B_b(\xi, \eta, z) \det(J) d\eta d\xi dz \quad (11)$$

$$K_s^{(e)} = \sum_{k=1}^n \int_{z=z_k}^{z_{k+1}} \int_{\xi=-1}^{\xi=+1} \int_{\eta=-1}^{\eta=+1} B_s^T(\xi, \eta, z) C_s^{(k)}(\theta_k) B_s(\xi, \eta, z) \det(J) d\eta d\xi dz \quad (12)$$

Sendo que B_b^T e B_s^T são as matrizes transpostas dos operadores das Equações (7a) e (7b), respectivamente, aplicados as funções de forma do elemento *Serendipity* em coordenadas locais, B_b e B_s são as matrizes dos operadores em coordenadas locais e $C_b(\theta)$ e $C_s(\theta)$ são as matrizes dos coeficientes elásticos para um material ortotrópico para os efeitos de flexão-membrana e cisalhamento, mostrado nas Equações (13).

Deve-se efetuar uma mudança no sistema de coordenadas da matriz dos coeficientes elásticos de local (coordenadas do material devido a orientação das fibras) para global (sistema de referência) através de uma rotação de um ângulo θ em torno do eixo z de acordo com as Equações (13a) e (13b), efetuado através de uma matriz de transformação T .

$$C_b^{(k)}(\theta_k) = T_b(\theta_k) C_b^{(k)} T_b^T(\theta_k) \quad (13a)$$

$$C_s^{(k)}(\theta_k) = T_s(\theta_k) C_s^{(k)} T_s^T(\theta_k) \quad (13b)$$

Para manter a concordância matemática da formulação, a matriz de transformação T e as matrizes dos coeficientes elásticos C_b e C_s também foram separadas em dois efeitos: flexão-membrana e cisalhamento (Equações (14) e Equações (14), respectivamente).

$$T_b = \begin{bmatrix} \cos^2(\theta) & \sin^2(\theta) & 0 & -\sin(2\theta) \\ \sin^2(\theta) & \cos^2(\theta) & 0 & \sin(2\theta) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin(\theta)\cos(\theta) & -\sin(\theta)\cos(\theta) & 0 & \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) \end{bmatrix} \quad (14a)$$

$$T_s = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \quad (14b)$$

$$C_b = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \quad (15a)$$

$$C_s = \begin{bmatrix} C_{44} & 0 \\ 0 & C_{55} \end{bmatrix} \quad (15b)$$

A partir do cálculo das matrizes elementares, a equação global do movimento no domínio do tempo pode ser escrita conforme a Equação (16).

$$M\ddot{q}(t) + Kq(t) = f(t) \quad (16)$$

Sendo $M = \bigcup_{e=1}^{nelem} M^{(e)}$ e $K = \bigcup_{e=1}^{nelem} K^{(e)}$ as matrizes de rigidez global e de massa. O símbolo $\bigcup$ indica a matriz de montagem, $q(t)$ é o vetor de deslocamento global e $f(t)$ é o vetor de cargas generalizadas.

A Equação (16) pode ser expressa no domínio da frequência para a obtenção da matriz de rigidez dinâmica complexa. Considerando $f(t) = 0$ tem-se a solução harmônica para a Equação (16) expressa por:

$$\{q(t)\} = \{Q\} e^{i\omega t} \quad (17)$$

Derivando a Equação (17) em função do tempo obtém-se:

$$\{\ddot{q}(t)\} = -\omega^2 \{Q\} e^{i\omega t} \quad (18)$$

Substituindo as Equações (17) e (18) na equação (16), tem-se:

$$(K - \omega^2 M) \{Q\} e^{i\omega t} = 0 \quad (19)$$

A partir da Equação (19) pode-se escrever a matriz de rigidez dinâmica complexa no domínio da frequência como:

$$Z(\omega) = K - \omega^2 M \quad (20)$$

A partir da obtenção da matriz de rigidez complexa, o próximo passo consiste em analisar o problema no domínio frequencial, o que pode ser feito através da construção da matriz de flexibilidade dinâmica ou matriz de Funções de Resposta em Frequência (FRF) (Equação (21)).

$$H(\omega) = cZ(\omega)^{-1}b \quad (21)$$

Sendo as matrizes $b \in R^{N \times f}$ e $c \in R^{cxN}$ as matrizes que permitem escolher quais os graus de liberdade que serão aplicados às forças de excitação, e os graus de liberdade onde são calculadas as respostas do sistema, respectivamente.

A partir da formulação de elementos finitos detalhadas nesta seção pôde-se obter as matrizes de rigidez elementares que serão utilizadas para a construção do problema de detecção de dano, bem como com esta formulação é possível também obter as frequências naturais e as funções de resposta em frequência do material de placa compósita.

3 IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA E ANÁLISE DO RESULTADOS

3.1 Primeira Aplicação

Nesta primeira aplicação considera-se uma placa plana compósita quadrada com $L_x = L_y = 0.20$ m. A Figura X ilustra a discretização do modelo de elementos finitos composto por 64 elementos de placa plana. São consideradas as seguintes condições de contorno para o problema: $u_0 = w_0 = \psi_z = \zeta_x = \zeta_z = 0$ em $y = 0$ e $y = a$, e $u_0 = w_0 = \psi_z = \zeta_y = \zeta_z = 0$ em $x = 0$ e $x = b$ (Correia, 2000). A orientação da fibra foi adotada arbitrariamente como 45° , e as propriedades elásticas são: $\bar{E}_1 = 172,4GPa$, $\bar{E}_2 = \bar{E}_3 = 6,89GPa$, $\bar{G}_{12} = \bar{G}_{13} = 3,45GPa$, $\bar{G}_{23} = 1,38GPa$, $\nu_{12} = \nu_{13} = 0,25$, $\nu_{23} = 0,30$, $\rho = 1566 kg/m^3$ é a densidade do material.

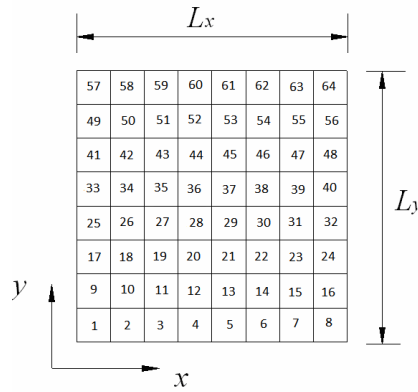


Figura 2. Discretização da placa.

Para simular o dano na placa foi considerada uma redução da rigidez em determinados pontos nodais, escolhidos arbitrariamente, que foram utilizados como dados de entrada para o treinamento da rede neural.

Visto que, a redução da rigidez tem como consequência uma variação, em todo conjunto, de frequências naturais do modelo, foram estabelecidos como quatro pontos nodais de referência com o objetivo de analisar a influência desta redução de rigidez aplicada nos pontos nodais escolhidos sobre as frequências naturais dos pontos referência para consequentemente, encontrar a posição de determinado ponto nodal que não foi considerado nos dados de entrada para treinar a rede neural.

De acordo com isto, para treinar a rede neural efetuou-se uma redução na matriz de rigidez local associada aos seguintes pontos nodais: 9, 16, 26, 34, 50, 62, 70, 82, 104, 130, 148, 156, 165 e 192, ou seja, um total de quatorze pontos nodais, cada um possuindo cinco frequências naturais, visto que o modelo de elementos finitos formulado possui cinco graus de liberdade por nó. E em seguida, coletaram-se os valores das frequências naturais nos pontos de referência, para com isto, formular o problema de detecção de dano.

A matriz de rigidez local associada aos pontos nodais escolhidos foi reduzida de 60% em relação ao seu valor inicial.

Os pontos nodais de referência escolhidos foram: 5, 37, 175 e 195 que são candidatos a ser a posição dos sensores da placa, ou seja, as frequências naturais destes pontos foram coletadas para cada variação nos pontos nodais.

A Figura 3 ilustra a malha de elementos finitos com os respectivos pontos nodais considerados nesta primeira aplicação.

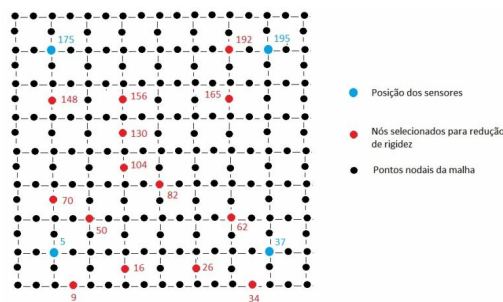


Figura 3. Posição geométrica dos nós escolhidos para treinar a rede neural e dos sensores.

Os dados de entrada para treinar a rede neural foram as frequências naturais e a posição (x,y) dos respectivos pontos nodais. E como dado de saída foi considerado a posição do ponto nodal 174, que não pertence ao conjunto de dados de entrada, ou seja, a rede neural deve ser capaz de encontrar a posição deste ponto nodal.

A tabela 1 mostra a posição x e y, dos respectivos pontos nodais escolhidos.

Tabela 1. Coordenadas dos pontos nodais escolhidos

Ponto nodal	Coordenada x do nó [m]	Coordenada y do nó [m]
9	0.0375	0
16	0.0750	0.0125
26	0.1250	0.0125
34	0.01625	0
50	0.0500	0.0500
62	0.0150	0.0500
70	0.0250	0.0625
82	0.1000	0.0750
104	0.0750	0.8750
130	0.0750	0.1125
148	0.0250	0.1375
156	0.0750	0.1375
165	0.1500	0.1375
192	0.1500	0.1750

A Tabela 2 mostra a posição do nó 174 e as posições dos nós 5, 37, 175 e 195.

Tabela 2. Coordenadas dos sensores

Ponto nodal	Coordenada x do nó [m]	Coordenada y do nó [m]
174	0.0250	0.1625
5	0.0250	0.0250
37	0.1750	0.0250
175	0.0250	0.1750
195	0.1750	0.1750

A melhor escolha para os parâmetros da rede neural foi:

- ⇒ Número de neurônios na camada de entrada: 50
- ⇒ Número de neurônios na camada intermediária: 24
- ⇒ Número de neurônio na camada de saída: consiste nos parâmetros de saída, ou seja, posição nodal (coordenadas x e y) e frequências naturais (valores das cinco frequências naturais correspondentes ao ponto de análise)
- ⇒ Erro desejado: 1.10^{-10}
- ⇒ Número de iterações: 3000
- ⇒ Taxa de aprendizado: 0.05

As Figuras 4a e 4b mostram, respectivamente, a malha de elementos finitos implementada no MatLab[®] ilustrando o posicionamento dos pontos nodais e o resultado após o treinamento da rede para a posição do nó 174.

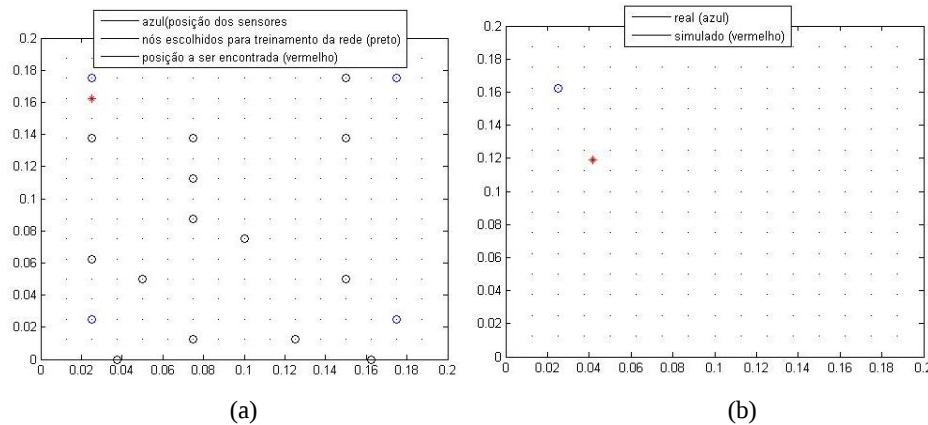


Figura 4. Posição (x,y) dos pontos nodais.

É possível notar que, este resultado não foi tão significativo, para encontrar a posição do nó requerido, para este conjunto de dados, o valor da coordenada x e y para o nó 174 foram, respectivamente: 0.0419 m e 0.1192m, demonstrando que está distante da posição original deste nó (0.0250 m, 0.1625 m), conforme observa-se na Figura XX.

Com o objetivo de verificar a influência do número de nós nos dados de entrada da rede neural, foram considerados um maior número de pontos nodais, sendo incluídos os nós: 27, 93 e 180. Foi possível notar uma melhora significativa no resultado, conforme mostra Figura 5. As coordenadas x e y do nó 174 encontradas foram: 0.0303 e 0.1445, respectivamente.

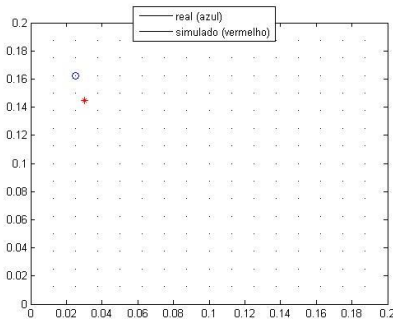


Figura 5. Posição real e objetivo do nó 174.

3.2 Segunda Aplicação

Esta segunda aplicação tem o objetivo de compara os valores das frequências naturais para o nó 174, antes e após a redução de rigidez, conforme mostra nas tabelas 3 e 4.

Tabela 3. Valores das frequências naturais para o nó 174

Valores das frequências naturais [Hz] antes da redução de rigidez local para o nó 174 correspondentes a:			
Nó 5	Nó 37	Nó 175	Nó 195
361.24	4133.45	30598.14	40886.41
427.06	4166.47	30657.54	40894.68
447.32	4172.87	30706.07	40913.41
459.10	4193.81	30749.04	41317.96
469.02	4234.11	30878.68	41525.89

Tabela 4. Valores das frequências naturais para o nó 174 com redução de 60% no valor da rigidez local

Valores das frequências naturais [Hz] antes da redução de rigidez local para o nó 174 correspondentes a:			
Nó 5	Nó 37	Nó 175	Nó 195
431.05	4143.87	30581.62	40819.22
443.04	4171.55	30628.96	40865.29
459.35	4184.04	30631.86	40889.57
490.37	4213.46	30711.44	41317.80
540.51	4230.04	30876.90	41495.39

A tabela 4 mostra as frequencias naturais relativas.

Valores em [%] frequências naturais relativa			
9.0397	0.2409	0.1033	0.0733

Nota-se que, a variação das frequências naturais foi inferiores a 5 %, exceto para o ponto nodal 5, mas, mesmo assim, foi possível detectar a posição aproximada do ponto nodal 174 utilizando as redes neurais artificiais.

4 CONCLUSÃO

Utilizando a formulação de elementos finitos combinada com da Teoria da Deformação Cisalhante de Primeira Ordem (FSDT) foi possível analisar o comportamento mecânico de um material compósito reforçado com fibras, no contexto da integridade estrutural.

Com este modelo foi possível obter a matriz de rigidez global e local e suas frequências naturais, a partir disto, foi efetuada a redução da matriz de rigidez em pontos nodais, escolhidos arbitrariamente, para desenvolver uma metodologia de detecção de dano através da aplicação das Redes Neurais Artificiais.

Evidenciou-se que, foi possível obter a posição de um ponto nodal que não pertencia aos dados de entrada da rede e, seu posicionamento pôde ser encontrado de modo bem próximo e, conclui-se que, não foi necessário uma variação de, pelo menos 5% para encontrar o dano.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem a CAPES e a FAPEMIG por apoio aos projetos associados a este artigo.

REFERÊNCIAS

- Begrambre, O., Algoritmo híbrido para avaliação da integridade estrutural: uma abordagem heurística. 2007. 152f Tese (Doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- Chee, C.; Tong, L.; Steven, G. P. Static Shape Control of Composite Plates Using a Curvature-displacement Based Algorithm. *International Journal of Solid and Structures*, v. 38, p. 6381-6403, 2001.
- Correia, V. M. F, Gomes; M. A. A., Suleman, A.; Soares, C. M. M.; Soares, C. A. M. Modelling and Design of Adaptive Composite Structures. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* v. 185, p. 325-346, 2000.
- Diacenco, A. A. Finite Element Modeling of Composite Laminated Structures Incorporating Viscoelastic Materials for the Passive Control of Vibration and Noise. 2010. M. Sc. Thesis, Federal University of Itajubá, MG.
- Lopes, P.S., 2010, Modelagem de problema inverso de detecção de danos por técnicas de identificação de parâmetros e otimização. Tese de Doutorado em Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Itajubá.
- Santos, G.F. dos, Identificação de danos estruturais utilizando técnicas de otimização, Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil, PGE CIV, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, UERJ, Rio de Janeiro/RJ, Brasil, 2009.
- Reddy JN. *Mechanics of laminated composite plates: theory and analysis*. 2nd ed. CRC Press; 1997.

