



UMA INTRODUÇÃO AO MÉTODO DOS RESÍDUOS PONDERADOS

Diogo P S Silva

diogo.silva@mat.ci.ufpb.br

André J Torii

andre@ci.ufpb.br

Universidade Federal da Paraíba

Cidade Universitária, CEP 58051-900, João Pessoa, Paraíba, Brasil

Resumo. O Método dos Resíduos Ponderados (MRP) pode ser usado para obter soluções aproximadas de problemas regidos por equações diferenciais. No MRP escolhemos uma solução aproximada como sendo uma combinação linear de funções ϕ_i escolhidas de modo a respeitar as condições de contorno, como a solução aproximada não irá respeitar a equação diferencial ela irá gerar um resíduo $r(x)$. Multiplicando o resíduo por uma função peso W_i , integrando o produto no domínio do problema e igualando a zero, obtemos um sistema de equação lineares, assim, os coeficientes c_i são determinados resolvendo esse sistema. Neste artigo estudamos um Problema de Valores de Contorno (PVC), onde, temos uma equação diferencial (ED) válida em um domínio com duas condições de contorno de Dirichlet (Essenciais), resolvemos o PVC utilizando três abordagens do MRP, o Método da Colocação Pontual, o Método dos Mínimos Quadrados e o Método de Galerkin.

Palavra-Chave: método dos resíduos ponderados, método de Galerkin, equações diferenciais

1 INTRODUÇÃO

O Método dos Resíduos Ponderados (MRP) é uma técnica aproximada para a resolução de problemas de valor de contorno que utiliza funções de aproximação que satisfaçam as condições de contorno prescritas e uma integral sobre o domínio do problema para minimizar o erro (HUTTON, 2003).

No MRP escolhemos uma solução aproximada

$$u_h(x) = \sum_{i=1}^n c_i \phi_i(x), \quad (1)$$

onde c_i são coeficientes a serem determinados e ϕ_i são funções encolhidas. Como a solução aproximada não irá respeitar a equação diferencial ela irá gerar um resíduo $r(x)$. Multiplicando esse resíduo por uma função peso W_i , integrando o produto e igualando a zero obtemos

$$\int_D W_i(x) r(x) dx = 0, \quad (2)$$

onde D é o domínio do problema e o número de funções peso W_i é o mesmo número de coeficientes c_i . Resolvendo essa integral para cada W_i obtemos um sistema de equações lineares em função dos coeficientes c_i , assim, determinamos cada um dos coeficientes c_i .

2 METODOLOGIA

Neste trabalho será estudados o seguinte Problema de Valores de Contorno (PVC):

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + u - x^2 = 0, \quad x \in D = [0, 1], \quad (3)$$

$$u(0) = u(1) = 0. \quad (4)$$

A solução exata deste problema é

$$u^*(x) = \frac{\sin(x)}{\sin(1)} (1 - 2\cos(1)) + 2\cos(x) + x^2 - 2. \quad (5)$$

Será utilizada uma aproximação cúbica

$$u_h(x) = c_1 \phi_1(x) + c_2 \phi_2(x), \quad (6)$$

onde $\phi_1(x) = x(x-1)$, e $\phi_2(x) = x^2(x-1)$. As funções $\phi_i(x)$ foram escolhidas de modo a satisfazer as condições de contorno da Eq. (4). O resíduo no domínio $r(x)$ pode ser obtido substituindo a solução aproximada da Eq. (6) na Eq. (3), o que resulta em

$$r(x) = \frac{d^2 u_h(x)}{dx^2} + u_h(x) - x^2. \quad (7)$$

Substituindo u_h na equação acima e simplificando ela fica assim:

$$r(x) = c_2 x^3 + (-c_2 + c_1 - 1)x^2 + (6c_2 - c_1)x - 2c_2 + 2c_1. \quad (8)$$

A igualdade da Eq. (3) será satisfeita apenas para a solução exata do problema u^* . Portanto, a Eq. (7) não será identicamente nula para todos os valores de x , a não ser no caso $u_h = u^*$.

2.1 MÉTODO DA COLOCAÇÃO PONTUAL

As funções peso $W_i(x)$ do Método da Colocação Pontual são funções do tipo Delta de Dirac $\delta(x - x_i)$, que tem a seguinte propriedade

$$\int \delta(x - x_i) f(x) dx = f(x_i). \quad (9)$$

Assim, fazendo $W_i(x) = \delta(x - x_i)$ na Eq. (2) temos

$$\int_D \delta(x - x_i) r(x) dx = r(x_i) = 0. \quad (10)$$

Escolhendo as funções do tipo Delta de Dirac forçamos o residuo a zerar em alguns pontos do dominio. Na prática, escolhemos alguns pontos do domínio x_i e impomos as condições $r(x_i) = 0$. Porém, a quantidade de pontos escolhidos deve ser a mesma que a quantidade de coeficientes c_i , para garantir a unicidade dos mesmos. A distribuição dos pontos de colocação é, em princípio, arbitrária, mas, na prática, os melhores resultados são obtidos se forem distribuídos uniformemente no domínio (BREBBIA; DOMINGUEZ, 1992). No caso do problema dado pelas Eqs. (3)-(4), escolhemos os pontos $x_1 = 1/3$, $x_2 = 2/3$, o que resulta em:

$$r(1/3) = \frac{2c_2 - 48c_1 + 3}{27} = 0, \quad (11)$$

$$r(2/3) = \frac{50c_2 + 48c_1 - 12}{27} = 0. \quad (12)$$

Portanto,

$$c_1 = \frac{29}{416}, \quad c_2 = \frac{9}{52}. \quad (13)$$

2.2 MÉTODO DOS MINIMOS QUADRADOS

Sejam as funções $f(x)$ e $g(x)$ contínuas no intervalo $[a, b]$ então,

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx \quad (14)$$

define um produto interno no intervalo $[a, b]$. Sendo assim, a norma de uma função é dada por,

$$\|f\|^2 = \langle f, f \rangle = \int_a^b [f(x)]^2 dx, \quad (15)$$

No Método dos Mínimos Quadrados buscamos minimizar o resíduo total (i.e. norma do resíduo)

$$R = \|r\|^2 = \int_D [r(x)]^2 dx, \quad (16)$$

Como o resíduo total R depende dos coeficientes c_i , podemos minimizá-lo fazendo

$$\frac{\partial R}{\partial c_i} = \frac{\partial}{\partial c_i} \left[\int_D [r(x)]^2 dx \right] = 0. \quad (17)$$

Na Eq.(17), como o domínio de integração não depende de c_i , obtemos

$$\frac{\partial R}{\partial c_i} = \int_D \frac{\partial}{\partial c_i} [r(x)]^2 dx = 0, \quad (18)$$

Pela Regra da Cadeia temos,

$$\frac{\partial R}{\partial c_i} = \int_D 2 \frac{\partial r}{\partial c_i} r(x) dx = 0, \quad (19)$$

Logo,

$$\frac{\partial R}{\partial c_i} = 2 \int_D \frac{\partial r}{\partial c_i} r(x) dx = 0, \quad (20)$$

Como temos uma igualdade com zero, podemos desprezar a constante 2, logo,

$$\frac{\partial R}{\partial c_i} = \int_D \frac{\partial r}{\partial c_i} r(x) dx = 0, \quad (21)$$

Comparando a Eq.(21) com a Eq.(2), vemos que as funções pesos no Método dos Mínimos Quadrados são,

$$W_i(x) = \frac{\partial r}{\partial c_i} \quad (22)$$

Logo, temos satisfazer a seguinte condição

$$\int_D \frac{\partial r}{\partial c_i} r dx = 0, \quad (23)$$

para cada coeficiente c_i . Sendo assim,

$$W_1 = \frac{\partial r}{\partial c_1} = (x - 1)x + 2, \quad (24)$$

$$W_2 = \frac{\partial r}{\partial c_2} = (x - 1)x^2 + 4x + 2(x - 1). \quad (25)$$

Da Eq. (23) para $W_1(x)$ e $W_2(x)$ encontramos o sistema de equações,

$$\frac{101c_2 + 202c_1 - 37}{60} = 0, \quad (26)$$

$$\frac{1572c_2 + 707c_1 - 336}{420} = 0, \quad (27)$$

com solução

$$c_1 = \frac{24228}{246137}, \quad c_2 = \frac{413}{2437}. \quad (28)$$

2.3 MÉTODO DE GALERKIN

Para se obter uma aproximação de um vetor $\mathbf{v}$ em um espaço vetorial E por outro vetor em um espaço N de dimensão inferior, fazemos uma projeção de $\mathbf{v}$ em N . Assim, obtemos um vetor $\mathbf{u}$ que será a melhor aproximação de $\mathbf{v}$ no espaço N . Geometricamente, observa-se que a distância entre $\mathbf{v}$ e $\mathbf{u}$ será ortogonal ao espaço N (ver Fig. 1).

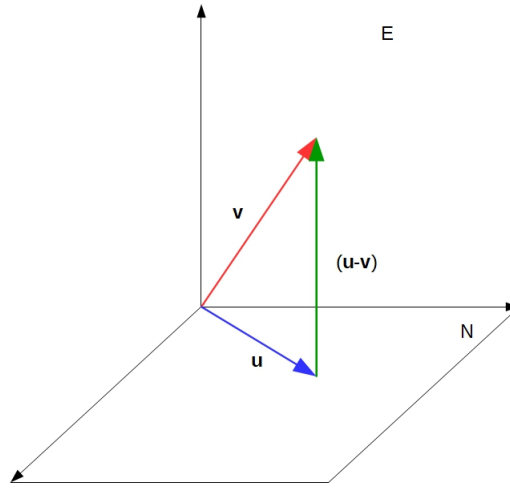


Figura 1: Projeção de v em N

O mesmo conceito se aplica também a espaços de funções. No problema estudado, a distância entre a solução exata e a solução aproximada é o erro, que é dado pela expressão $e(x) = u^* - u_h$, como a aproximação $u_h(x)$ é uma combinação linear das funções $\phi_i(x)$, basta fazermos o erro $e(x)$ ser ortogonal a cada uma das funções $\phi_i(x)$, logo temos que resolver as integrais,

$$\langle e, \phi_i \rangle = \int_D e(x) \phi_i(x) dx = 0, \quad (29)$$

para cada função $\phi_i(x)$.

No entanto, na maioria dos casos não teremos a solução exata, logo, não poderemos obter o erro $e(x)$, assim, em vez de usar o erro usamos o resíduo $r(x)$, logo a Eq. (29) fica,

$$\langle r, \phi_i \rangle = \int_D r(x) \phi_i(x) dx = 0, \quad (30)$$

para cada função $\phi_i(x)$.

Comparando a Eq. (30), com a Eq.(2), vemos que as funções pesos no método de Galerkin são as funções $\phi_i(x)$, logo

$$W_1(x) = x(x-1) \quad e \quad W_2(x) = x^2(x-1) \quad (31)$$

Obtemos assim as condições de ortogonalidade,

$$\langle r, \phi_1 \rangle = \int_D r(x) x(x-1) dx = 0, \quad (32)$$

$$\langle r, \phi_2 \rangle = \int_D r(x) x^2(x-1) dx = 0, \quad (33)$$

das equações acima encontramos o sistema de equações,

$$-\frac{3c_2 + 6c_1 - 1}{20} = 0, \quad (34)$$

$$-\frac{52c_2 + 63c_1 - 14}{420} = 0. \quad (35)$$

Portanto,

$$c_1 = \frac{10}{123}, \quad c_2 = \frac{7}{41}. \quad (36)$$

3 RESULTADOS

Visualizando a Fig. 2 e a Fig. 3 vemos que o o Método de Galerkin é o que apresenta o melhor resultado quando comparado com a solução analítica. Já o Método da Colocação Pontual apresenta resíduo nulo nos pontos de colocação. Porém, o resultado desse método depende diretamente dos pontos escolhidos, logo, pode ter um comportamento melhor ou pior caso os pontos sejam reposicionados. Por fim, o Método dos Mínimos Quadrados apresentou uma solução menos precisa que os outros dois métodos.

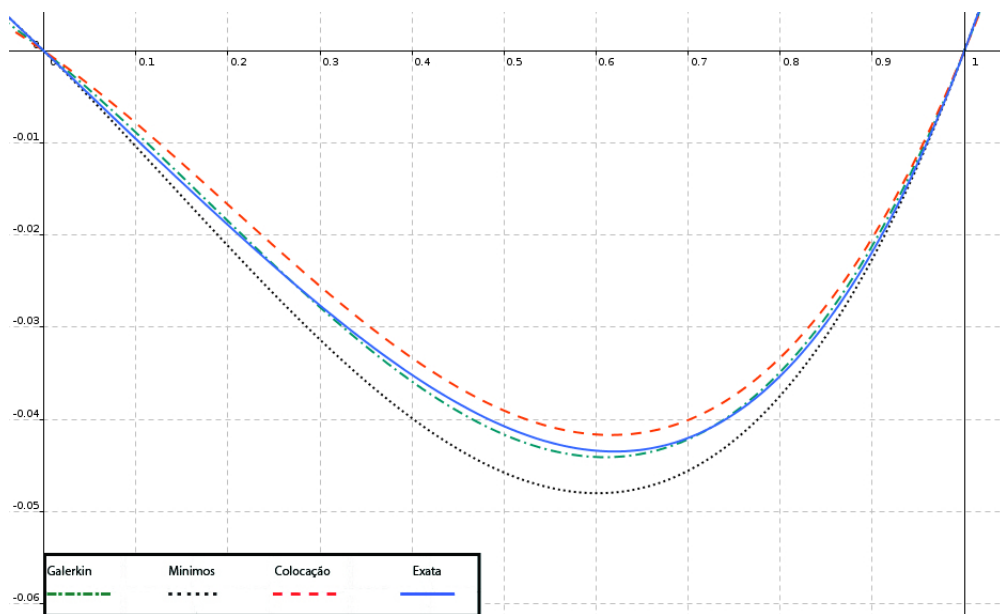


Figura 2: Comparação entre os métodos

4 CONCLUSÃO

Os Método de Resíduos Ponderados podem ser de fácil aplicação dependendo das funções de aproximação escolhidas e das condições contorno, como mostrado neste artigo. Porém, se ao invés de termos apenas condições de Dirichlet (Essenciais) (Eq. (4)), tivermos também condições de contorno de Neumann (Naturais), como,

$$\frac{du}{dx}(0) = \alpha_1, \quad \frac{du}{dx}(1) = \alpha_2, \quad (37)$$

é necessário utilizar outra abordagem baseada na Forma Fraca/Variacional.

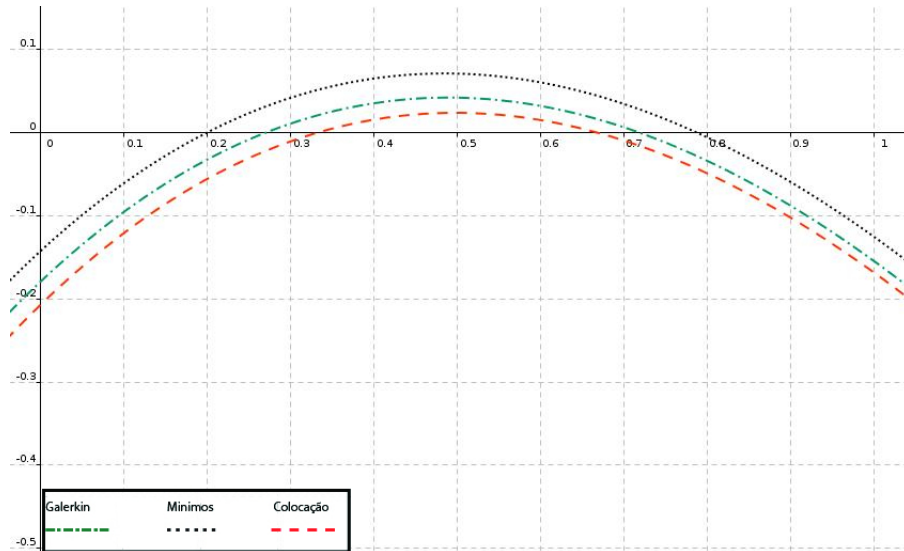


Figura 3: Comparação entre os resíduos

REFERÊNCIAS

- Hutton, D. V. *Fundamentals of Finite Element Analysis*. 1st edition. McGraw-Hill Science, 2003.
- Brebbia, C. A.; Dominguez, J. *Boundary Elements: An Introductory Course*. 2nd edition. WIT Press, 1992.
- Cook, R. D; Malkus, D. S; Plesha, M. E; & Witt, R. J. *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*. 4th edition. John Wiley & Sons, 2001.