



APLICAÇÕES DE UM MODELO DE DANO ISOTRÓPICO ESCALAR NA ANÁLISE DE ESTRUTURAS DE CONCRETO ARMADO

Sara Brigida Saraiva dos Santos

William Taylor Matias Silva

sarabrigida@hotmail.com

taylor@unb.br

Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília - UNB

70.910-900, Distrito Federal, Brasília, Brasil

Resumo. *Em diversas situações, é necessário avaliar estruturas para determinar a carga máxima que pode ser resistida. Na análise computacional de estruturas de concreto armado, a precisão dos resultados depende de modelos numéricos que representem adequadamente o comportamento dos materiais. As diferentes propriedades e diferentes respostas que os componentes do concreto apresentam às solicitações, tal como: o comportamento não linear físico, tornam a implementação de modelos numéricos um problema complexo. Neste trabalho, apresenta-se a aplicação de um modelo constitutivo de dano contínuo para simulação numérica do comportamento de materiais quase-frágeis, por meio da redução de rigidez e propriedades de resistência do material. O modelo utiliza duas variáveis escalares de danos, uma para representar a degradação do concreto sujeito a tensões de tração e outra para a mesma situação sobre compressão. O comportamento da armadura é simulado numericamente como um modelo elastoplástico unidimensional com endurecimento isotrópico e cinemático do material. O modelo utiliza o algoritmo de integração implícita e explícita (IMPLEX), e é aplicado em análises de estruturas de concreto armado discretizadas utilizando-se o método dos elementos finitos. A validação dos resultados é feita analisando-se testes numéricos e comparando-os com resultados de ensaios experimentais realizados, que serão apresentados e discutidos neste artigo.*

Palavras chave: *Mecânica do dano, não-linearidade, elementos finitos, modelo constitutivo.*

1 INTRODUÇÃO

Na engenharia civil, para análise de estruturas, diversos modelos constitutivos têm sido desenvolvidos para simular o comportamento dos materiais, bem como as alterações que ocorrem na microestrutura dos mesmos quando solicitados a ações mecânicas ou não mecânicas.

A resposta não linear observada macroscopicamente no concreto, que pode ser verificada tanto pela plastificação do concreto como pelo escoamento do aço, decorre de processos irreversíveis que ocorrem em sua microestrutura que caracterizam a degradação do material e a perda de suas propriedades mecânicas. Nesta situação, a mecânica do dano é uma ferramenta importante, pois, leva em conta os efeitos da degradação difusa e progressiva por meio de redução de rigidez do material e de suas propriedades de resistência.

A Mecânica do Dano se ocupa do efeito, sobre a resposta material, de um processo de microfissuração distribuída que se desenvolve numa etapa preliminar à formação da fissura discreta (Araújo, 2003).

Os modelos que trabalham com a mecânica do dano seguem o conceito físico de crescimento gradual das microfissuras e tentam reproduzir o mecanismo interno de microfissuras e o crescimento de defeitos e microcavidades que surgem com o aumento das deformações em materiais frágeis (CEB 230, 1996), *apud* Bono (2008).

Segundo Simo e Ju (1987), formulações de dano isotrópico são extensivamente empregadas na literatura por causa de sua simplicidade, eficiência e adequação para muitas aplicações práticas.

Neste contexto, o presente trabalho apresenta a aplicação de um modelo constitutivo baseado na mecânica do dano contínuo, para simulação numérica do comportamento de materiais quase-frágeis, que utiliza duas variáveis escalares de danos; uma para representar a degradação do concreto quando sujeito a tensões de tração e outra para a mesma situação sobre compressão. O comportamento da armadura é simulado numericamente como um modelo elastoplástico unidimensional no qual são levados em consideração os efeitos do endurecimento isotrópico e cinemático do material.

O modelo apresentado neste trabalho é aplicado na análise de estruturas de concreto armado, discretizadas utilizando o método de elementos finitos, e tem por finalidade avaliar a capacidade do modelo proposto de simular o comportamento real de estruturas de concreto armado sob aplicação de cargas.

2 MODELO CONSTITUTIVO DA ARMADURA

Para simular numericamente o comportamento da armadura foi implementado computacionalmente um modelo elastoplástico unidimensional, detalhado em Simo & Hughes (1997), *apud* Fernandes (2010), no qual são levados em consideração os efeitos do endurecimento isotrópico e cinemático do material.

2.1 Modelo friccional unidimensional sem endurecimento

Dado um dispositivo friccional unidimensional de Coulomb que é constituído de uma mola com constante elástica E , e por um elemento de fricção de Coulomb, com constante $\sigma_y > 0$, que possui inicialmente comprimento e área unitários conforme Figura (1). As constantes E e σ_y representam respectivamente o módulo de elasticidade e a tensão de escoamento do material.

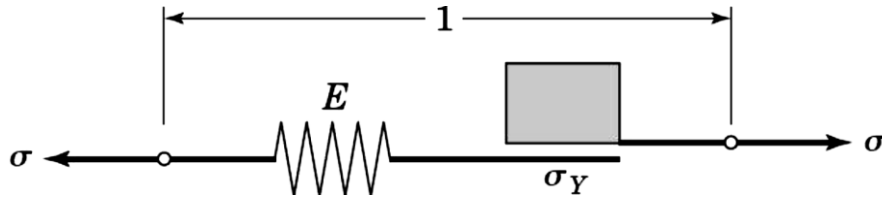


Figura 1. Dispositivo friccional de Coulomb (Simo e Hughes - 1997, *apud* Fernandes - 2010).

Num ponto da armadura submetido a um estado elastoplástico, a deformação total ε é dividida, em sua parte elástica ε_e , recuperável, e sua parte plástica ε_p , irrecuperável, conforme mostra a Equação (1) abaixo.

$$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_p \quad (1)$$

Assumindo que ε , ε_p e σ são funções do tempo, tem-se:

$$\dot{\varepsilon}_p = \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon_p \quad (2)$$

Uma mudança na configuração do ponto só é possível se $\dot{\varepsilon}_p \neq 0$. Para caracterizar essa mudança serão assumidas algumas hipóteses:

1. A tensão σ não pode ser maior em valor absoluto que $\sigma_y > 0$.

$$E_\sigma := \{\sigma \in R | f(\sigma) \leq 0\} \quad (3)$$

Seja E o módulo de elasticidade, a relação tensão-deformação desse ponto é representada por:

$$\sigma = E\varepsilon_e = E(\varepsilon - \varepsilon_p) \quad (4)$$

Sendo $f(\sigma)$ a função de escoamento, que tem a seguinte forma:

$$f(\sigma) = |\sigma| - \sigma_y \leq 0 \quad (5)$$

2. Se o valor absoluto da tensão aplicada for menor que a tensão de escoamento σ_y , nenhuma mudança em $\dot{\varepsilon}_p$ é observada, isto é, $\dot{\varepsilon}_p = 0$ caracterizando um regime elástico conforme Equação (6).

$$f(\sigma) = |\sigma| - \sigma_y \leq 0 \rightarrow \dot{\varepsilon}_p = 0 \rightarrow \sigma = E\varepsilon \quad (6)$$

3. Quando $f(\sigma) = |\sigma| - \sigma_y = 0$, considera-se que o elemento escoar na direção das tensões aplicadas com uma constante de escoamento $y \geq 0$. A variação da deformação plástica é representada pela regra do fluxo plástico apresentada pela Equação (7).

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_p &= y \geq 0 \text{ se } \sigma = \sigma_y > 0 \\ \dot{\varepsilon}_p &= -y \geq 0 \text{ se } \sigma = -\sigma_y < 0 \\ \dot{\varepsilon}_p &= y \operatorname{sign}(\sigma) \end{aligned} \quad (7)$$

Onde $\operatorname{sign}(\sigma)$ é uma função sinal definida como:

$$\operatorname{sign}(\sigma) = \begin{cases} +1 & \text{se } \sigma > 0 \\ -1 & \text{se } \sigma < 0 \end{cases} \quad (8)$$

As condições de carga e descarga são determinadas através das condições de Kuhn-Tucker conforme Equação (9) e pela condição de consistência (10). Tais condições têm a função de manter o estado de tensão sob o contorno da região elástica durante as deformações plásticas e determinar quais são as condições de carregamento.

$$\begin{array}{ll} \text{Condições de Kuhn – Tucker} & \begin{array}{l} f(\sigma) < 0 \rightarrow y = 0 \\ y < 0 \rightarrow f(\sigma) = 0 \end{array} \end{array} \quad (9)$$

$$\begin{array}{ll} \text{Condição de consistência} & \begin{array}{l} yf(\sigma) = 0 \\ y\dot{f}(\sigma) = 0 \end{array} \end{array} \quad (10)$$

Na tabela abaixo são resumidas as principais situações ocorridas durante o processo de carga-descarga.

Tabela 1 – Situações de carregamento para o modelo de elastoplasticidade.

Localização de $f(\sigma)$	Constante de escoamento	Situação de carga
$f < 0 \leftrightarrow f(\sigma) \in \text{int}(E_\sigma)$	$y = 0$	Elástico
$f = 0 \leftrightarrow f(\sigma) \in \partial(E_\sigma)$	$\dot{f} < 0 \rightarrow y = 0$	Descarga elástica
	$\dot{f} = 0 \rightarrow y = 0$	Carga neutra
	$\dot{f} = 0 \rightarrow y > 0$	Carga plástica
$f > 0$		Estado inadmissível

2.2 Modelo friccional unidimensional com endurecimento

Para que a influência do endurecimento isotrópico na função de escoamento $f(\sigma)$ seja considerada, introduz-se as variáveis K , denominada de módulo plástico e α , uma função não negativa, designada variável interna de endurecimento plástico isotrópico. Dessa maneira a Equação (5) passa a ter a seguinte forma:

$$f(\sigma, \alpha) = |\sigma| - [\sigma_y + K\alpha] \leq 0 \quad \alpha \geq 0 \quad (11)$$

A evolução da variável interna de endurecimento plástico isotrópico α é dada por:

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= |\dot{\varepsilon}_p| \\ \dot{\alpha} &= |y \text{sign}(\sigma)| \\ \dot{\alpha} &= y \end{aligned} \quad (12)$$

Sendo H o modelo de endurecimento cinemático e q uma variável que define a localização do centro da superfície de escoamento designada variável interna de endurecimento plástico, a Equação (11) toma a forma da Equação (13) para levar-se em consideração o efeito do endurecimento cinemático:

$$f(\sigma, q, \alpha) = |\sigma - q| - [\sigma_y + K\alpha] \leq 0 \quad (13)$$

A evolução da variável q é determinada pela Regra de Ziegler:

$$\dot{q} = H \dot{\varepsilon}_p \quad (14)$$

Onde:

$$\dot{\varepsilon}_p = y \operatorname{sign}(\sigma - q) \quad (15)$$

Portanto:

$$\dot{q} = y H \operatorname{sign}(\sigma - q) \quad (16)$$

Esse modelo constitutivo desenvolvido por Simo e Hughes (1997), *apud* Fernandes (2010), o qual considera os efeitos do endurecimento do material foi implementado dentro do programa 2D_CONCRETE_NL.f90 de Elementos Finitos utilizado nesse trabalho, que foi desenvolvido para fins de pesquisa por William Taylor Matias, Professor do Departamento de Engenharia Civil e Ambiental da Universidade de Brasília, e apresentado na dissertação de Fernandes (2010).

Tabela 2 - Sumário das principais equações governantes do modelo friccional unidimensional com endurecimento (Fernandes, 2010).

Relação tensão-deformação	$\sigma = E(\varepsilon - \varepsilon_p)$
Regra de fluxo plástico	$\dot{\varepsilon}_p = y \operatorname{sign}(\sigma - q)$
Lei de endurecimento isotrópico	$\dot{\alpha} = y$
Lei de endurecimento cinemático	$\dot{q} = y H \operatorname{sign}(\sigma - q)$
Condição de escoamento	$f(\sigma, q, \alpha) = \sigma - q - [\sigma_y + K\alpha] \leq 0$
Fechamento do domínio elástico	$E_\sigma := \{(\sigma, q, \alpha) \in R \times R_+ \times R f(\sigma, q, \alpha) \leq 0\}$
Condições de complementaridade	$y \geq 0; f(\sigma, q, \alpha) \leq 0; yf(\sigma, q, \alpha) = 0$
Condição de consistência	$y\dot{f}(\sigma, q, \alpha) = 0; (se f(\sigma, q, \alpha) = 0)$

2.3 Integração do modelo constitutivo da armadura

O problema da integração do modelo constitutivo é puramente localizado nos pontos de Gauss da armadura e obedecem as seguintes diretrizes:

1. Seja $x \in [0, L]$ um dado ponto que obedece às equações do modelo constitutivo apresentadas na Tabela (2).
2. Assume-se que o estado local do ponto x , no tempo atual t_n , é completamente definido no:

$$\{\varepsilon_n(x), \varepsilon_n^p(x), \alpha_n(x), q_n(x)\} \quad (17)$$

3. Portanto, o estado de tensão também é conhecido, sendo a tensão $\sigma_n(x)$ no ponto no tempo t_n determinada através da Equação (18).

$$\sigma_n(x) = [E_n(x) - \varepsilon_n^p(x)] \quad (18)$$

4. O incremento de tempo $t_{n+1} = t_n + \Delta t$ é gerado através de um incremento de deformação $\Delta\varepsilon(x)$, ou seja, a deformação é a variável independente básica.

Para integração das equações do modelo constitutivo adotado serão aplicados o método implícito *Backward-Euler* e o algoritmo *Return-Mapping* apresentados em Simo e Hughes (1997), *apud* Fernandes (2010).

2.3.1 Problemas de valor inicial incremental elastoplástico

Aplicando-se às equações da Tabela (2), o método *Backward-Euler* que leva ao algoritmo de mapeamento e retorno clássico, obtém-se:

$$\varepsilon_{n+1}^p = \varepsilon_n^p + \Delta y \operatorname{sign}(\sigma_{n+1}) \quad (19a)$$

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n + \Delta y \quad (19b)$$

$$q_{n+1} = q_n + \Delta y \quad (19c)$$

$$\sigma_{n+1} = E(\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_{n+1}^p) \quad (19d)$$

$$\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n + \Delta \varepsilon_n \quad (19e)$$

Onde Δy é um multiplicador *Lagrangeano* (a contrapartida algorítmica do parâmetro de consistência $y \geq 0$); e as variáveis $(\sigma_{n+1}, \alpha_{n+1})$, juntamente com Δy são restringidas pelas seguintes versões discretas de Kuhn-Tucker:

$$f_{n+1} := |\sigma_{n+1}| - [\sigma_y + K\alpha_{n+1}] \leq 0 \quad (20)$$

$$\Delta y \geq 0$$

$$\Delta y f_{n+1} = 0$$

2.3.2 Algoritmos Return-mapping

1. Estado elástico inicial

Será considerado um estado tensional auxiliar que não necessariamente corresponde ao estado real de tensão no ponto da armadura e é obtido considerando-se o fluxo plástico constante. O passo é puramente elástico e o estado auxiliar, indicado pelo sobrescrito *trial*, é definido pelas Equações (21).

$$\sigma_{n+1}^{trial} := E(\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n^p) \equiv \sigma_n + E\Delta \varepsilon_n \quad (21a)$$

$$\xi_{n+1}^{trial} := \sigma_{n+1}^{trial} - q_n \quad (21b)$$

$$\varepsilon_{n+1}^{p^{trial}} := \varepsilon_n^p \quad (21c)$$

$$\alpha_{n+1}^{trial} := \alpha_n \quad (21d)$$

$$q_{n+1}^{trial} := q_n \quad (21e)$$

$$f_{n+1}^{trial} := |\sigma_{n+1}^{trial}| - [\sigma_y + K\alpha_n] \quad (21f)$$

Onde ξ é uma variável auxiliar dada por $\xi = \sigma - q$, utilizada para fins de facilitar a notação.

Calculado f_{n+1}^{trial} podem ocorrer dois casos:

$$\checkmark \text{ CASO 1: } f_{n+1}^{trial} \leq 0$$

O estado auxiliar é admissível visto que atende à Equação (11). Assim, o estado teste é de fato a solução do problema e resulta nas seguintes afirmações:

$$\varepsilon_{n+1}^p = \varepsilon_n^p \quad (22a)$$

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n \quad (22b)$$

$$\sigma_{n+1} = \sigma_{n+1}^{trial} \quad (23)$$

$$\Delta y = 0 \quad (24)$$

✓ CASO 2: $f_{n+1}^{trial} > 0$

Essa situação não caracteriza uma solução real para o problema visto que não atende à Equação (11), se $(\sigma_{n+1}^{trial}, \alpha_n)$ viola a condição de consistência $f(\sigma, \alpha) \leq 0$. Assim, se requer que $\Delta y > 0$ de modo que $\varepsilon_{n+1}^p \neq \varepsilon_n^p$ para obter $\sigma_{n+1} \neq \sigma_{n+1}^{trial}$. Pelas condições de Kuhn-Tucker:

$$\Delta y > 0 \quad (25a)$$

$$\Delta y f_{n+1} = 0 \Rightarrow f_{n+1} = 0 \quad (25b)$$

Os casos analisados acima podem ser claramente verificados na Equação (26).

$$f_{n+1}^{trial} \begin{cases} \leq 0 \Rightarrow \text{Passo elástico } \Delta y = 0 \\ > 0 \Rightarrow \text{Passo plástico } \Delta y > 0 \end{cases} \quad (26)$$

2. Algoritmo *return-mapping* unidimensional

Considerando a condição inicial para implementação do processo incremental plástico determinado pela condição apresentada no CASO 2, tem-se:

$$f_{n+1}^{trial} > 0 \Leftrightarrow f(\sigma_{n+1}, \alpha_{n+1}) = 0 \quad (27a)$$

$$\Delta y > 0 \quad (27b)$$

Sendo assim, o estado final do ponto será expresso em termos da tensão obtida no estado auxiliar inicial e do multiplicador plástico, como segue:

$$\sigma_{n+1} = E(\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_{n+1}^p) \quad (28a)$$

$$\sigma_{n+1} = E\varepsilon_{n+1} - E\varepsilon_{n+1}^p \quad (28b)$$

$$\sigma_{n+1} = E(\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n^p) - E(\varepsilon_{n+1}^p - \varepsilon_n^p) \quad (28c)$$

$$\sigma_{n+1} = \sigma_{n+1}^{trial} - E\Delta y \text{sign}(\sigma_{n+1}) \quad (28d)$$

Uma vez que $\Delta y > 0$, à partir das Equações (28), as Equações (19) podem ser reescritas como segue:

$$\sigma_{n+1} = \sigma_{n+1}^{trial} - \Delta y E \text{sign}(\xi_{n+1}) \quad (29a)$$

$$\varepsilon_{n+1}^p = \varepsilon_n^p + \Delta y \text{sign}(\xi_{n+1}) \quad (29b)$$

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n + \Delta y \quad (29c)$$

$$q_{n+1} = q_n + \Delta y H \operatorname{sign}(\xi_{n+1}) \quad (29d)$$

$$f_{n+1} \equiv |\xi_{n+1}| - [\sigma_y + K\alpha_{n+1}] = 0 \quad (29e)$$

Onde:

$$\xi_{n+1} = \sigma_{n+1} - q_{n+1} \quad (30)$$

As Equações (29) podem ser resolvidas explicitamente em termos da variável ξ_{n+1} , subtraindo-se a Equação (29d) da (29a), obtendo-se então:

$$\xi_{n+1} = (\sigma_{n+1}^{trial} - q_n) - \Delta y(E + H)\operatorname{sign}(\xi_{n+1}) \quad (31)$$

Através das definições das Equações (21b) e (30) e rearranjando os termos, a Equação (31) toma a seguinte forma:

$$[|\xi_{n+1}| + \Delta y(E + H)]\operatorname{sign}(\xi_{n+1}) = |\xi_{n+1}^{trial}|\operatorname{sign}(\xi_{n+1}^{trial}) \quad (32)$$

Uma vez que $\Delta y > 0$ e $E > 0$, os termos entre parênteses na Equação (31) são necessariamente positivos, portanto:

$$\operatorname{sign}(\xi_{n+1}) = \operatorname{sign}(\xi_{n+1}^{trial}) \quad (33)$$

Considerando-se a definição contida em (33), a Equação (32) assume a seguinte forma:

$$[|\xi_{n+1}| + \Delta y(E + H)] = |\xi_{n+1}^{trial}| \quad (34)$$

Dessa forma, o multiplicador plástico Δy pode ser determinado pela Equação (29e) e utilizando-se as Equações (29c) e (34):

$$f_{n+1} = |\xi_{n+1}^{trial}| - (E + K)\Delta y - [\sigma_y + K\alpha_{n+1}] \quad (35)$$

Desenvolvendo os termos multiplicadores em K e adicionando-se os termos $+K\alpha_n$ e $-K\alpha_n$, considerando-se a Equação (35) tem-se:

$$f_{n+1} = |\xi_{n+1}^{trial}| - (E + K)\Delta y - [\sigma_y + K\alpha_n] - K[\alpha_{n+1} - \alpha_n] \quad (36)$$

$$f_{n+1} = |\xi_{n+1}^{trial}| - \Delta y[E + (K + H)] = 0$$

De forma explícita:

$$\Delta y = \frac{f_{n+1}^{trial}}{E + (K + H)} > 0 \quad (37)$$

3 MODELO DE DANO

Os modelos de dano isotrópico representam o comportamento não-linear do material através de uma variável interna de dano escalar conhecida por degradação ou dano, d .

Considere-se um sólido com defeitos em sua microestrutura, ver Figura (2). Considerando-se o elemento de volume representativo grande o suficiente para conter um número representativo de defeitos, o dano é definido pela Equação (38).

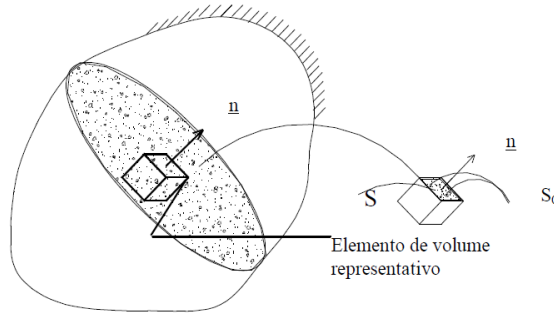


Figura 2 - Elemento de volume com dano (Pituba - 1998, *apud* Fernandes - 2010).

$$d = \frac{S - S_0}{S} = 1 - \frac{S_0}{S} \quad (38)$$

Na Equação (38) S_0 é a área efetiva restante.

Nota-se que a variável de dano pertence ao intervalo $0 \leq d \leq 1$, sendo que a variável de dano é nula, $d = 0$, quando o material apresenta-se no seu estado íntegro. Por outro lado, $d = 1$ correspondendo ao estado de degradação completa.

Considera-se que associada à área efetiva exista uma tensão efetiva $\bar{\sigma}$ expressa por:

$$\bar{\sigma} = \sigma \frac{1}{1 - d} \Rightarrow \sigma = (1 - d)\bar{\sigma} \quad (39)$$

Segundo Lemaitre (1978), *apud* Manzoli (1994); a Equação (39) advém da hipótese de equivalência de deformações que dispõe que a deformação associada a um estado danificado sob tensões aplicadas é equivalente às deformações associadas a um estado ileso sob tensões efetivas.

A representação gráfica da hipótese de equivalência de deformações é apresentada na Figura (3). Na representação da esquerda o material encontra-se sobre tensões aplicadas e danificado; na direita, o dano é nulo e o material está sobre tensões efetivas, no entanto a deformação nos dois estados é a mesma.

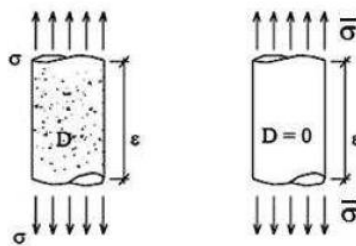


Figura 3 - Hipótese da equivalência de tensões (Adaptada - Pituba, 2003).

A Equação (40) apresenta a relação entre o tensor de tensões efetivas e o tensor de tensões de Cauchy e é determinada pelo parâmetro de dano.

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{1 - d} \sigma \quad (40)$$

3.1 Lei constitutiva não-linear para o concreto

Uma lei constitutiva linear-elástica padrão pode ser usada para descrever as relações tensão-deformação efetivas para pontos do material localizados na área efetiva, isto é:

$$\bar{\sigma} = D_0 : \varepsilon \quad (41)$$

Onde D_0 é o tensor constitutivo linear-elástico e ε é o tensor de deformações. A aplicação da hipótese de equivalência de tensões é feita através da associação das Equações (41) e (39), resultando em:

$$\sigma = (1 - d)\bar{\sigma} = (1 - d)D_0 : \varepsilon \quad (42)$$

Manzoli (1994) ressalta que por considerar a relação tensão-deformação linear-elástica no espaço efetivo, o comportamento geral não-linear é essencialmente dirigido pela evolução do dano. O dano é portanto interpretado como a medida da redução da rigidez inicial do material.

3.2 Critério de dano e lei de evolução do dano

Similarmente aos modelos de elastoplasticidade, é necessária a introdução de um critério que especifique o domínio elástico e o estado no qual se inicia o crescimento do dano. Simo e Ju (1987) consideram que o estado do dano no material é caracterizado por meio de um critério de dano na seguinte forma:

$$g(\tau(\tilde{\sigma}), r) = \tau(\tilde{\sigma}) - r \leq 0 \quad (43)$$

Onde $\tau(\tilde{\sigma})$ é a tensão equivalente dada por uma norma do tensor de tensões efetivas, e r é o dano escalar limite corrente. O critério de dano apresentado na Equação (43) define um conjunto de superfícies de dano, cuja forma é determinada pela escolha da norma para $\tau(\tilde{\sigma})$ e o tamanho é controlado pelo incremento dos valores de r . A Equação (43) também pode ser expressa em sua forma equivalente:

$$g'(\tau, r) = G(\tau) - G(r) \leq 0 \quad (44)$$

Onde $G(\cdot)$ é uma função escalar monotônica crescente a ser definida.

Diante da definição do parâmetro e critério de dano, é necessária a introdução de uma lei de evolução para o dano, de modo a caracterizar a degradação das propriedades mecânicas do material. A Equação (45) descreve a evolução do dano.

$$\dot{d} = \dot{\mu} \frac{\partial g'(\tau, r)}{\partial r} = \dot{\mu} \frac{\partial G(r)}{\partial r} \quad (45)$$

$$\dot{r} = \dot{\mu}$$

Onde $\dot{\mu}$ é o parâmetro de dano consistente que define as condições de carregamento ou descarregamento de acordo com as relações de Kuhn-Tucker adaptadas nesse capítulo às variáveis utilizadas:

$$\dot{\mu} \geq 0 \quad g' = 0 \quad \dot{\mu} g'(\tau, r) = 0 \quad (46)$$

Para $g' < 0$, o critério de dano não é satisfeito e, conforme a Equação (47), $\dot{\mu} = 0$, ou seja, não existe evolução do dano. No caso de $\dot{\mu} > 0$, o dano é crescente:

$$g' = 0 \rightarrow \tau - r = 0 \rightarrow \dot{\tau} = \dot{r} = \dot{\mu} \quad (47)$$

O que leva a uma forma explícita para a variável r :

$$r_t = \max[r_0, \max(\tau)] \quad (48)$$

Onde r_0 é o do dano limite inicial, assumido ser propriedade do material.

3.3 Modelo de dano com duas variáveis

A característica básica do modelo adotado consiste na utilização de duas variáveis de dano, uma para representar o dano a tração, d^+ , e a outra para o dano a compressão, d^- . Visto que o concreto apresenta um comportamento diferente quanto submetido à cargas compressivas e de tração, é importante que a degradação devido a tais situações seja tratada de forma diferenciada.

De modo a identificar claramente quais variáveis são referentes à tração e à compressão, os índices (+) e (-) são utilizados respectivamente.

O tensor de tensões efetivas é decomposto em partes tracionais e compressivas de acordo com Cervera et al. (1996):

$$\bar{\sigma}^+ = \langle \bar{\sigma} \rangle = \sum_{i=1}^3 \langle \bar{\sigma}_i \rangle p_i \otimes p_i \quad (49)$$

$$\bar{\sigma}^- \Rightarrow \bar{\sigma} \leq \sum_{i=1}^3 \bar{\sigma}_i p_i \otimes p_i \quad (50)$$

$$\bar{\sigma} = \bar{\sigma}^+ + \bar{\sigma}^- \quad (51)$$

Na Equação acima, $\bar{\sigma}_i$ representa a i -ésima tensão principal do tensor de tensões $\bar{\sigma}$; p_i é um vetor unitário associado a direção principal e o símbolo $\otimes$ denota o produto tensorial. O símbolo $\langle \cdot \rangle$ é a função de MacAuley (retornando o valor da expressão quando positiva, e zero em caso contrário) assim descrita na Equação (52), e o símbolo $\cdot \leq$ é tal que $\langle x \rangle + x \leq x$.

$$\langle \bar{\sigma}_i \rangle = \begin{cases} \bar{\sigma}_i, & \text{se } \bar{\sigma}_i > 0 \\ 0, & \text{se } \bar{\sigma}_i < 0 \end{cases} \quad (52)$$

3.3.1 Tensões equivalentes de tração

Para estabelecer as condições de carga, descarga e recarga; define-se o critério de dano empregando-se o conceito de tensão efetiva para tração dada pela seguinte expressão:

$$F(\bar{\tau}^+, r^+) = \bar{\tau}^+ (\bar{\sigma}^+) - r^+ \leq 0 \quad (53)$$

Sendo que $\bar{\tau}^+$ retorna um valor escalar em função da componente positiva das tensões efetivas.

Adota-se a norma energética do tensor:

$$\bar{\tau}^+ (\bar{\sigma}^+) = \sqrt{\bar{\sigma}^+ : D_0^{-1} : \bar{\sigma}^+} \quad (54)$$

Ou adotando a notação matricial, a Equação (54) toma a seguinte forma:

$$\bar{\tau}^+ (\bar{\sigma}^+) = \sqrt{\{\bar{\sigma}^+\}^T [D_0]^{-1} \{\bar{\sigma}^+\}} \quad (55)$$

onde $\{\bar{\sigma}^+\}$ é um vetor e $[D_0]^{-1}$ é a inversa da matriz constante elástica.

A matriz constante elástica $[D_0]$ e sua inversa $[D_0]^{-1}$ são dadas pelas Equações (56) e (57), onde ν é o coeficiente de Poisson.

$$[D_0] = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \quad (56)$$

$$[D_0]^{-1} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (57)$$

3.3.2 Tensões equivalentes de compressão

A expressão para tensão equivalente de compressão é inspirada no critério de Drucker-Prager e formulada por Cervera et al (1996) da seguinte forma:

$$\bar{\tau}^-(\bar{\sigma}^-) = \sqrt{\sqrt{3}(K\bar{\sigma}_{0ct}^- + \bar{\tau}_{0ct}^-)} \quad (58)$$

Na Equação (58) $\bar{\sigma}_{0ct}^-$ e $\bar{\tau}_{0ct}^-$ designam as tensões octaédricas normal e tangencial correspondentes ao tensor efetivo de compressão. Os valores para tais tensões octaédricas são dados pelas expressões a seguir:

$$\bar{\sigma}_{0ct}^- = \frac{>\bar{\sigma}_1<+>\bar{\sigma}_2<+>\bar{\sigma}_3<}{3} \quad (59)$$

$$\bar{\tau}_{0ct}^- = \frac{1}{3} \sqrt{(>\bar{\sigma}_1<->\bar{\sigma}_2<)^2 + (>\bar{\sigma}_2<->\bar{\sigma}_3<)^2 + (>\bar{\sigma}_3<->\bar{\sigma}_1<)^2} \quad (60)$$

Onde K, expressa pelas Equações (61) e (62), é definida por Faria et al (2000), *apud* Fernandes (2010), como uma propriedade do material.

$$K = \sqrt{2} \frac{R_0-1}{2R_0-1} \quad (61)$$

$$R_0 = \frac{f_{02D}^-}{f_{01D}^-} \quad (62)$$

Segundo Cervera et al (1996) os valores típicos para o concreto são $R_0 = 1,16$ e $K = 0,1714$.

3.4 Parâmetros r_0^+ e r_0^-

Os Parâmetros r_0^+ e r_0^- são considerados características do material, sendo assim um indicador de quando o material começa a danificar e de forma análoga às outras variáveis e equações, tem-se uma formulação para compressão e tração.

Seja para tração:

$$r_0^+ = \sqrt{f_{01D}^+ \cdot \frac{1}{E} \cdot f_{01D}^+} = \frac{f_{01D}^+}{\sqrt{E}} \quad (63)$$

Onde f_{01D}^+ é a máxima tensão elástica de tração.

Seja para compressão:

$$r_0^- = \sqrt{\frac{f_{01D}^-}{\sqrt{3}}} (\sqrt{2} - K) \quad (64)$$

3.5 Lei de evolução do dano

3.5.1 Tração:

A evolução do parâmetro de dano à tração é definida em função da variável limite de dano e apresentada pela Equação (65).

Nota-se que quando $r^+ = r_0^+$ o dano é nulo.

$$d^+ = G^+(r^+) = 1 - \frac{r_0^+}{r^+} \exp \left[A^+ \left(1 - r^+ / r_0^+ \right) \right] \quad (65)$$

Segundo Manzoli (1994), o parâmetro A^+ é obtido pela relação entre a energia total dissipada num processo de tração unidimensional e a energia de fratura do concreto, G_f , então:

$$A^+ = \left(\frac{G_f E}{l (f_0^+)^2} - \frac{1}{2} \right)^{-1} \quad (66)$$

Onde l é uma característica geométrica do elemento finito considerado. Desta maneira, para elemento unidimensional l é o comprimento; para elemento bidimensional l é a área; e para elemento tridimensional l é volume do elemento finito considerado.

3.5.2 Compressão:

A evolução do dano a compressão é dada por:

$$d^- = G^-(r^-) = 1 - \frac{r_0^-}{r^-} (1 - A^-) - A^- \exp \left[B^- \left(1 - r^- / r_0^- \right) \right] \quad (67)$$

Segundo Faria et al (1999), *apud* Fernandes (2010), os parâmetro A^- e B^- devem ser definidos pela imposição da curva tensão-deformação unidimensional numérica a compressão coincidir em dois pontos selecionados com a curva extraída do ensaio a compressão simples. Neste trabalho tais valores correspondem a $A^- = 1,0$ e $B^- = 0,744$.

3.5.3 Critério de dano

Separando as Equações (43) e (48) em termos de tração e compressão temos:

$$g^+ = \bar{\tau}^+ (\bar{\sigma}^+) - r^+ \leq 0, \quad r^+ = \max \left[r_0^+, \max(\bar{\tau}^+) \right] \quad (68)$$

$$g^- = \bar{\tau}^- (\bar{\sigma}^-) - r^- \leq 0, \quad r^- = \max \left[r_0^-, \max(\bar{\tau}^-) \right] \quad (69)$$

3.5.4 Lei constitutiva

O tensor de tensões de Cauchy é então dado por:

$$\sigma = (1 - d^+) \bar{\sigma}^+ + (1 - d^-) \bar{\sigma}^- \quad (70)$$

4 MÉTODO IMPLEX

Oliver et al. (2008), *apud* Fernandes (2010), propuseram um algoritmo de integração de tensões que associa a robustez dos métodos explícitos à utilização de informações de iterações passadas, assim como nos métodos implícitos. É baseado em duas famílias de modelos constitutivos, os modelos de dano contínuo e os modelos elastoplásticos.

A ideia é diminuir a não linearidade do algoritmo de retorno estimando o multiplicador plástico a partir das tensões, deformações e variáveis de história do passo anterior evitando-se assim a necessidade de calcular as derivadas do multiplicador plástico, simplificando o algoritmo de integração e a obtenção da matriz tangente consistente. Com essa simplificação, não se cumpri exatamente a condição de consistência, porém isso pode ser minimizado com a adoção de incrementos de cargas menores. Segundo os autores, para problemas onde se tem estados de tensões uniformes na malha, como nos casos de reprodução de ensaios, o algoritmo apresenta oscilações que também podem ser controladas com os tamanhos de passos de tempo dados durante a análise de elementos finitos.

Vale citar ainda que a ordem de precisão do algoritmo de integração IMPL-EX, é a mesma dos clássicos algoritmos implícitos de *Backward-Euler*. No entanto, o erro absoluto é maior para um mesmo tamanho de passo de carga, Fernandes (2010).

4.1 Aplicação do IMPL-EX para integração do modelo de dano

No Quadro 1 é descrito o procedimento de integração do modelo de dano.

Quadro 1. Método IMPLEX

1. Cálculo do tensor de tensões de Cauchy no passo de carga n+1

$$\sigma_{n+1} = (1 - d_{n+1}^+) \bar{\sigma}_{n+1}^+ + (1 - d_{n+1}^-) \bar{\sigma}_{n+1}^- \quad (71)$$

2. Cálculo do incremento do tensor de tensões de Cauchy no passo de carga n + 1

$$\Delta \sigma_{n+1}^d = \sigma_{n+1}^{trial} - \sigma_{n+1} \text{ com } \sigma_{n+1}^{trial} = D_0 \varepsilon_{n+1} \quad (72)$$

3. Cálculo final do tensor de tensões de Cauchy no passo de carga n + 1

$$\sigma_{n+1}^* = \sigma_{n+1}^{trial} - \Delta \sigma_n^d \quad (73)$$

Onde n é o incremento de tensões calculado em (2), porém no passo de carga n.

Na Equação (73), o termo $\Delta \sigma_n^d$ é uma informação do passo de carga anterior. No passo de carga atual ele é constante e tem sua derivada anulada:

$$\frac{\partial \sigma_{n+1}^*}{\partial \varepsilon_{n+1}} = \frac{\partial \sigma_{n+1}^{trial}}{\partial \varepsilon_{n+1}} \quad (74)$$

Aplicando a Equação (74) à Equação (72) tem-se:

$$\Delta \sigma_{n+1}^d = 0 = D_0 \varepsilon_{n+1} \quad (74a)$$

$$D_0 = 0 \quad (74b)$$

O tensor constitutivo elástico é positivo definido.

5 APLICAÇÃO NUMÉRICA DO MODELO DE DANO NA ANÁLISE DE VIGA-PAREDE DE CONCRETO ARMADO

Com o objetivo de validar o modelo de dano proposto, realizou-se a simulação numérica da Viga parede B1, enrijecida por pilares laterais, conforme definida por Guimarães (1980); que possui vão $l=120\text{cm}$, altura total $h=80\text{cm}$ e espessura $b=10\text{cm}$ conforme Figura (4).

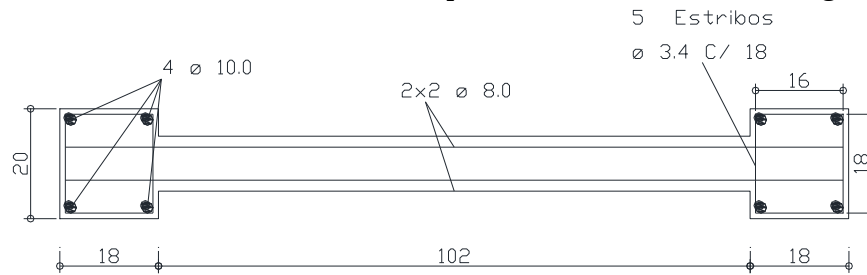


Figura 4 - Viga B1 – dimensões em centímetros (Guimarães, 1980).

As Tabelas (3) e (4) apresentam as propriedades dos materiais, utilizados na modelagem numérica para o concreto, para os aparelhos de apoio, bem como para as armaduras, sejam elas obtidas experimentalmente por Guimarães (1980) ou adotadas para fins de cálculo.

Tabela 3 – Propriedades do Concreto

Propriedade	Valor	Unidade
E_c	22,00	GPa
ν	0,20	-
ρ	$2,3 \times 10^3$	Kg/m ³
G_f	150	N/m
f_0^+	1,80	MPa
f_0^-	9,00	MPa
K	0,1714	-
A^-	1,00	-
B^-	0,744	-

Tabela 4 – Propriedades do aço

Propriedades dos apoios	Valor	Unidade
E_s	212,5	GPa
ν	0,33	-
ρ	$7,3 \times 10^3$	Kg/m ³
Propriedades das barras	Valor	Unidade
E_s	212,5	GPa
f_y	534	Mpa

Segundo Guimarães (1980), os deslocamentos foram medidos por quatro deflectômetros com precisão de 0,00245 mm localizados um na parte inferior central (D_2) e dois situados a 30cm do centro (D_1 e D_3), medindo as deflexões verticais; e o quarto na parte inferior direita (D_4), medindo deflexões horizontais.

Para análise numérica da viga parede B1, gerou-se uma malha no software SAP2000 utilizando-se 2104 elementos finitos quadriláteros, sendo 2072 para discretizar o concreto e 32 para discretizar as chapas de aço, e 332 elementos finitos lineares para discretizar as armaduras. A Figura (5) mostra a configuração da malha gerada.

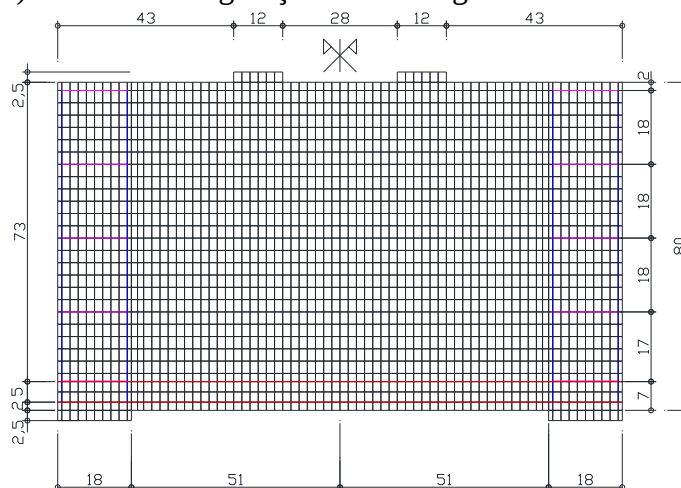


Figura 5 - Malha que representa a viga B1.

O modelo numérico foi utilizado para simular o comportamento da Viga B1, e os resultados obtidos com a modelagem numérica, utilizando-se o tamanho do passo de carga $d_s = 5,00E - 7$, bem como a comparação com os resultados experimentais, são apresentados a seguir.

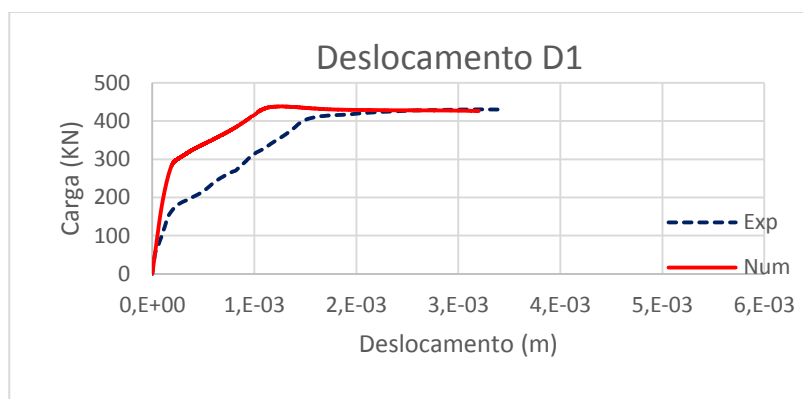


Figura 6 – Curva Carga-deslocamento D1 – Experimental e Numérica para $d_s = 5,00E - 7$

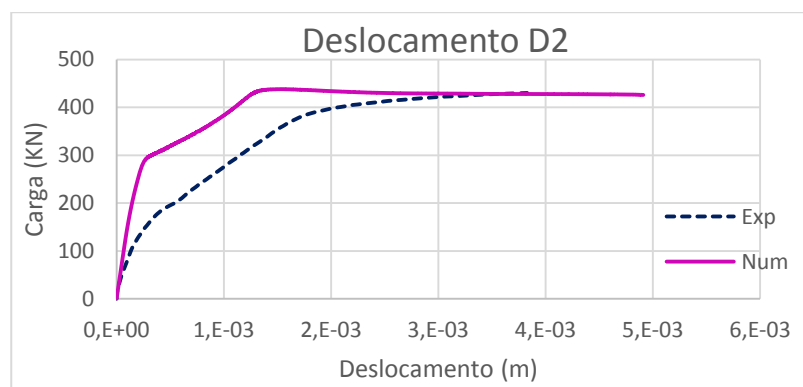


Figura 7 – Curva Carga-deslocamento D2 – Experimental e Numérica para $d_s = 5,00E - 7$

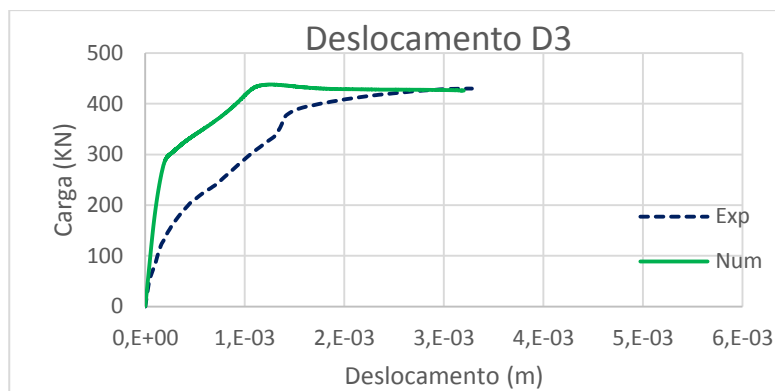


Figura 8 – Curva Carga-deslocamento D3 – Experimental e Numérica para $d_s = 5,00E - 7$

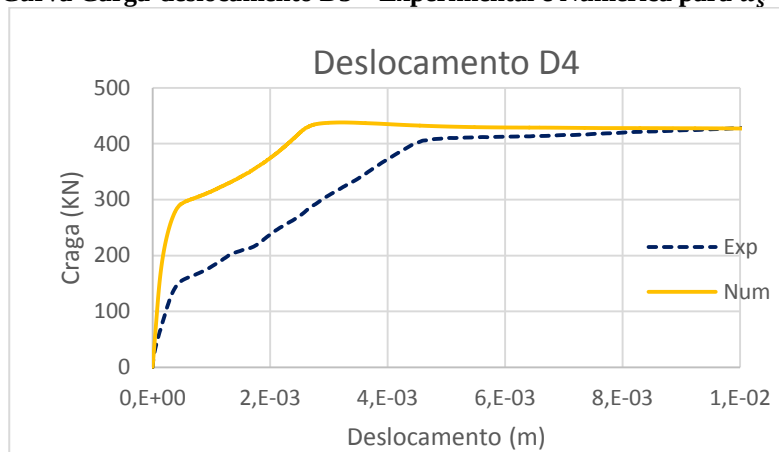


Figura 9 – Curva Carga-deslocamento D4 – Experimental e Numérica para $d_s = 5,00E - 7$

Os ensaios realizados por Guimarães(1980) tinham por objetivo obter as seguintes informações:

1. Resistência última:

A resistência última é um dos parâmetros de maior importância em projeto de estruturas de concreto armado. Em relação a este aspecto, o modelo proposto mostrou-se eficaz na predição da carga de ruptura conforme observado nas Figuras (6) a (9). A carga última obtida no ensaio experimental foi 430 kN; valor bem próximo ao da carga última obtida na modelagem numérica que foi de 438,07kN. O passo de carga utilizado foi $d_s = 5,00E - 7$ por apresentar melhor resultado para a determinação da carga de ruptura.

2. Mecanismo de ruptura:

Em geral, a ruptura dessas vigas é iniciada pelo escoamento do aço, seguido do esmagamento do concreto. No caso da Viga B1, a resistência última ao cisalhamento foi atingida antes do esmagamento total do concreto na zona de compressão; caracterizando a ruptura por “Flexão-cisalhamento”. O modelo numérico utilizado resulta numa rigidez inicial maior que a experimental; tal fato pode se justificar pela adoção equivocada do módulo de elasticidade do concreto, uma vez que esse dado não é fornecido pelo autor. De um modo geral, as curvas apresentam uma forma característica: após a fase inicial elástica, apresentam uma redução da rigidez seguida da ruptura. Após a ruptura é visível a existência de um patamar de escoamento seguido de uma queda brusca.

3. Curva carga deslocamento:

A curva carga-deslocamento é outro instrumento de comparação da eficiência do modelo numérico em simular o comportamento real da estrutura analisada. Embora as curvas experimentais assim como as curvas numéricas apresentam formas características com 3 trechos distintos correspondentes aos estados não fissurado, fissurado e plástico; a resposta

obtida pela modelagem numérica apresenta maior rigidez na fase elástica. Isso se atribui à adoção de valores estimados para alguns dados usados no modelo numérico como: Energia de fratura do concreto, além dos parâmetros A^- e B^- , bem como do módulo de elasticidade do concreto; que não são fornecidos pelo autor.

6 APLICAÇÃO NUMÉRICA DO MODELO DE DANO NA ANÁLISE DE VIGA DE CONCRETO ARMADO

O modelo de dano proposto foi utilizado para a simulação numérica de uma viga de concreto armado; cujo resultado será comparado com o resultado obtido experimentalmente por Bresler e Scordelis (1963), *apud* Bono (2008). A Viga OA1 possui armadura longitudinal composta por 4 barras com 28,7mm de diâmetro; não possui estribos; e suas dimensões e propriedades dos materiais, sejam elas obtidas experimentalmente por Bresler e Scordelis (1963) ou adotadas para fins de cálculo, são apresentadas nas Tabelas (5) e (6).

Tabela 5 – Propriedades do concreto

Propriedade	Valor	Unidade
Dimensão ($l \times h \times e$)	3,66 x 0,31 x 0,556	(m)
E_c	20,00	GPa
ν	0,20	-
ρ	$2,3 \times 10^3$	Kg/m ³
G_f	55	N/m
f_0^+	1,50	MPa
f_0^-	10,89	MPa
f_c	22,50	MPa
K	0,1714	-
A^-	1,00	-
B^-	0,744	-

Tabela 6 – Propriedades do aço

Propriedade	Valor	Unidade
Diâmetro	$28,7 \times 10^{-3}$	(m)
E_s	217,88	GPa
f_y	555	MPa

A Figura (10) apresenta a seção transversal da Viga OA1 segundo Bresler e Scordelis (1963), *apud* Bono (2008).

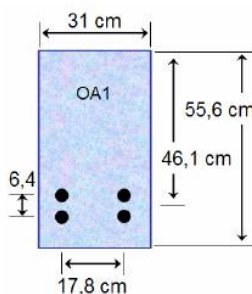


Figura 10 – Detalhe da seção transversal da viga OA1

A malha que representa viga OA1, gerada pelo software SAP2000, é apresentada na Figura (11). Utilizou-se a simetria da viga, aplicando-se as devidas condições de contorno na face da viga que representa a seção no ponto central da estrutura original. Utilizou-se 128 elementos finitos bidimensionais de 8 nós para representar o concreto, e 32 elementos finitos unidimensionais quadráticos de 3 nós para representar as armaduras.



Figura 11 – Malha que representa a viga OA1

Para a validação da análise numérica traçou-se a curva carga-deslocamento, conforme apresentado na Figura (12). Na Tabela (7), apresentam-se a carga de ruptura obtida pelo programa computacional e o correspondente resultado experimental. O resultado apresentado foi obtido utilizando o tamanho do passo de carga $d_s = 1,85 \times 10^{-5}$.

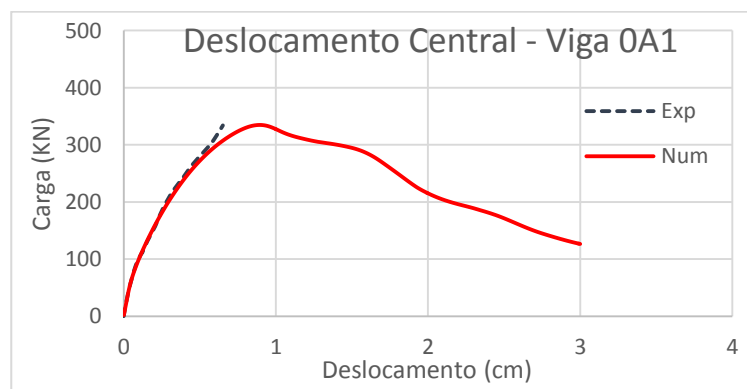


Figura 12 – Curva Carga-deslocamento – Experimental e Numérica para $d_s = 1,85E - 5$

No ensaio experimental a viga OA1, sem estribos, rompe por corte; e a ruptura ocorre imediatamente após a formação da primeira fissura crítica. O modelo proposto mostrou-se eficaz para determinar a carga de ruptura, conforme observa-se na Tabela (7), embora necessário adotar valores estimados para o módulo de elasticidade, cujo dado não é fornecido pelo autor, bem como pela adoção de valores para energia de fratura e para os parâmetros A^- e B^- , fundamentais na modelagem numérica.

Tabela 7 – Carga de Ruptura da viga 0A1

P_u Exp (KN)	P_u Num (KN)
334,00	334,78

7 CONCLUSÕES

De forma geral, os resultados numéricos obtidos são bons quando comparados aos valores experimentais apresentados neste trabalho. As curvas carga-deslocamento apresentadas, resultam em uma rigidez inicial maior do que as obtidas nos ensaios experimentais. Uma maneira de minimizar essa diferença é a utilização de dados precisos sobre as propriedades dos materiais, uma vez que nos ensaios experimentais os autores não forneceram todos os dados necessários para a modelagem numérica tais como: módulo de elasticidade do concreto e energia de fratura; sendo necessário estimá-los.

O método IMPLEX apresentou-se sensível ao tamanho do passo de carga, resultando em uma diminuição do valor da carga de ruptura para tamanho de passos de cargas menores. Apesar da sensibilidade apresentada pelo IMPLEX, observou-se que houve convergência dos incrementos com poucas iterações, o que torna o modelo proposto bastante eficiente.

Através dos ensaios apresentados, de um modo geral, observou-se uma ótima concordância entre os resultados numéricos e aqueles obtidos através dos ensaios experimentais. Então, pode-se dizer que o modelo numérico é apto para simular adequadamente o comportamento do concreto armado.

8 REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Araújo, F. A. 2003. *Contribuição ao emprego da Mecânica do Dano para a análise do comportamento dinâmico não-linear de vigas em concreto armado*. Dissertação de Mestrado - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 85p.

Bono, G. F. F. 2008. *Modelos constitutivos para análise tridimensional de estruturas de concreto armado através do método dos elementos finitos*. Tese de doutorado. Universidade Federal do Rio Grande do Sul. p 137-156.

Cervera M., Oliver J., Manzoli O. 1996. A rate-dependent isotropic damage model for the seismic analysis of concrete dams. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 25(9): 987-1010.

Fernandes, H. H. F. 2010. *Aplicação de um Modelo de Dano Isotrópico Escalar na Análise de Vigas Parede de Concreto Armado*. Dissertação de Mestrado, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 85p.

Guimarães, G. B. 1980 - *Análise experimental de vigas-parede de concreto armado enrijecidas por pilares laterais*, Dissertação de Mestrado, PUC- Rio, Rio de Janeiro, 133 p.

Manzoli, O. L. 1994. Rate dependent effects in an isotropic damage constitutive model for concrete. In: *International Center for Numerical Methods in Engineering - CIMNE*, Technical Report N° 126. Barcelona, Espanha.

Pituba, J. J. C. 2003. *Sobre a formulação de um modelo de dano para o concreto*. Tese de Doutorado, Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, 151p.

Simo J. C., Ju J. W. 1987. Strain and stress-based continuum damage models – I. Formulation. In: *International Journal of Solids and Structures*. V. 23, p. 821-840.