



USO DEL MÉTODO DE INTEGRACIÓN CLOSEST POINT PROJECTION METHOD EN ANÁLISIS ELASTOPLÁSTICOS.

María Paz Duque Gutiérrez

mpazduque@aluno.unb.br

Estudante Doutorado Estruturas e Construção Civil, UNB

Campus Universitário Darcy Ribeiro, Prédio SG-12, CEP 70910-900, Brasília, DF, Brasil.

William Taylor Matias Silva

taylor@unb.br

Professor Doutor Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, UNB

Campus Universitário Darcy Ribeiro, Prédio SG-12, CEP 70910-900, Brasília, DF, Brasil.

Resumen. El objetivo de este trabajo es la implementación del método de integración Closest Point Projection Method, CPPM, para evaluar aumentos en las tensiones dado un incremento en el vector de las deformaciones en análisis elastoplásticos. Para ello se considera un material con propiedades elásticas constantes, y se emplea el criterio de fluencia de von Mises con una regla asociativa de flujo para describir el comportamiento tensión - deformación del material. Es utilizada una ley de endurecimiento isotrópico no lineal para definir la evolución de las deformaciones plásticas. Son presentados resultados numéricos para el cálculo incremental de las tensiones y de las variables internas, y son validados con resultados existentes en la literatura.

Palabras Clave: Plasticidad, Endurecimiento no lineal, Modelo de von Mises.

1 INTRODUCCIÓN

En aplicaciones con elementos finitos de diferentes modelos constitutivos no lineales la respuesta del material se considera por medio de formulaciones incrementales, es decir, dado un incremento en las deformaciones $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}$, el correspondiente incremento en las tensiones $\Delta \boldsymbol{\sigma}$ debe ser calculado. Primero es necesario determinar si el incremento en la deformación causará un comportamiento elastoplástico o elástico. Dada la formulación incremental, el modelo constitutivo debe ser integrado a nivel local. En general, existe una clase de algoritmos, ampliamente utilizada, conocida como algoritmos predictor elástico–corrector plástico. El método fue introducido por Wilkins (1964), siendo después desarrollado y aplicado por Simo & Taylor (1985). Esencialmente los cálculos son realizados en dos pasos. En el primero, la respuesta inelástica del material se mantiene congelada, el incremento total es aplicado como si fuera puramente elástico, luego, es calculada una tensión elástica correspondiente, conocida como predictor elástico. En el segundo, si el comportamiento es elastoplástico, la tensión calculada es traída de vuelta a la superficie de fluencia, mediante la aplicación de una deformación inelástica adecuada. Este método equivale a encontrar la proyección más próxima del predictor elástico a la superficie de fluencia, por esta razón el método es referido como método de proyección al punto más próximo (*Closest Point Projection Method, CPPM*). En este trabajo el método es aplicado para el criterio de fluencia de von Mises. Una desventaja del método es que necesita los gradientes del flujo plástico con respecto al tensor de tensiones y el tensor de variables internas, que puede resultar una tarea difícil para ciertos modelos. CPPM es un método implícito que utiliza el procedimiento conocido como *Backward Euler*. Como el estado final de tensiones es forzado a permanecer en la superficie de fluencia, el algoritmo aplica la propiedad de consistencia de la expresión matemática de la superficie de fluencia. Es implementado el método descrito por Anandarajah (2010). Ejemplos simples con diferentes reglas de endurecimiento son presentados en el capítulo final, para conferir la robustez del método.

2 ESTRUCTURA GENERAL DE LA TEORIA DE LA PLASTICIDAD

La teoría de plasticidad, cuando son consideradas pequeñas deformaciones y para materiales cuya respuesta es independiente de la velocidad de deformación, tiene como principales conceptos: el tensor de deformaciones totales en un punto es calculado como la suma de las deformaciones recuperables (elásticas) y las no recuperables (plásticas), lo cual puede ser representado por la siguiente ecuación:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^p \quad (1)$$

Para el caso de modelos envolviendo comportamiento no lineal de los materiales, dado un incremento de deformación, no solo debe ser obtenido el incremento en las tensiones, sino también el incremento de las variables internas $\boldsymbol{\zeta}$ que cuantifican el efecto del comportamiento anterior del material. Es decir:

$$\boldsymbol{\sigma} = (\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\zeta}) \quad (2)$$

Otro concepto fundamental es la definición de una superficie de fluencia φ que limita el tipo de respuesta del material. El dominio dentro de la superficie es un dominio puramente elástico, el dominio fuera de la superficie no puede ser alcanzado por el material por lo que representa un comportamiento inaccesible y en la superficie es definido como un comportamiento elastoplástico. La función de fluencia debe ser definida matemáticamente tal que cuando se trata de un comportamiento elastoplástico, se cumpla la siguiente expresión:

$$\varphi(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\zeta}) = 0 \quad (3)$$

La superficie de fluencia debe cambiar su tamaño, forma o lugar de tal forma que cuando el comportamiento sea elastoplástico, el estado de tensiones siempre permanezca en la superficie, lo que es representado por la siguiente ecuación:

$$\dot{\varphi}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\zeta}) = 0 \quad (4)$$

La forma matemática de la función de fluencia debe ser tal que exista un tensor normal a ella en el estado actual de tensiones, este tensor define la dirección del tensor de deformaciones plásticas, y es definido como:

$$\mathbf{r} = \frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (5)$$

Para definir la evolución de las variables internas se hace necesaria la definición de una función de endurecimiento s , que varía con cada modelo constitutivo.

3 DESCRIPCIÓN DEL MÉTODO

Puesto que la relación entre las tensiones y las deformaciones es no lineal, es necesario transformar el problema continuo en uno discreto, esto se logra aplicando un esquema implícito *Backward Euler*. Para el caso de materiales con propiedades elásticas constantes, como el caso de los metales, el predictor elástico permanece constante dentro cada iteración. Conocidos los valores de tensiones y variables internas en un determinado paso de carga n , es decir conocidos $\boldsymbol{\sigma}_n$ y $\boldsymbol{\zeta}_n$, el objetivo de la implementación del método es encontrar los valores correspondientes al siguiente paso de carga, $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$ y $\boldsymbol{\zeta}_{n+1}$. El valor final de $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$ será la suma del tensor de prueba inicial, calculado a su vez como la suma del estado actual de tensiones y el predictor elástico, y el corrector plástico.

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \boldsymbol{\sigma}_n + \Delta \boldsymbol{\sigma}^{ep} + \Delta \boldsymbol{\sigma}^{pc} = \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{tr} + \Delta \boldsymbol{\sigma}^{pc} \quad (6)$$

El tensor de prueba es calculado como si el incremento en las tensiones fuera puramente elástico, así el predictor elástico es calculado como:

$$\Delta \boldsymbol{\sigma}^{ep} = \mathbf{C} \Delta \boldsymbol{\varepsilon} \quad (7)$$

Donde $\mathbf{C}$ es el tensor constitutivo del modelo en la fase elástica. El corrector plástico trae de vuelta el tensor de prueba hacia la superficie de fluencia, y es calculado por:

$$\Delta\boldsymbol{\sigma}^{pc} = -\Delta\lambda\mathbf{C}\mathbf{r}^{n+1} \quad (8)$$

El tensor de variables internas actualizado es:

$$\boldsymbol{\zeta}_{n+1} = \boldsymbol{\zeta}_n + \Delta\boldsymbol{\zeta}, \quad \Delta\boldsymbol{\zeta} = \Delta\lambda\mathbf{s}^{n+1} \quad (9)$$

Los valores finales de tensiones y variables internas deben ser tales que:

$$\varphi^{n+1}(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, \boldsymbol{\zeta}_{n+1}) = 0 \quad (10)$$

El proceso de integración consiste entonces en aplicar un incremento elástico en las tensiones dado un incremento en el tensor de deformaciones y mediante un esquema iterativo calcular el tensor corrector hasta satisfacer el criterio de fluencia. Para el modelo de von Mises el tensor constitutivo es calculado mediante la siguiente expresión:

$$C_{ijkl} = \left(K - \frac{2}{3}G\right)\delta_{ij}\delta_{kl} + G(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \quad (11)$$

El tensor δ_{ij} es conocido como operador Delta de kronecker. Es utilizado el tensor de prueba para una primera estimación del valor de las tensiones y variables internas, es decir:

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^1 = \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{tr} - \Delta\lambda\mathbf{C}\mathbf{r}^{tr} \quad (12a)$$

$$\boldsymbol{\zeta}_{n+1}^1 = \boldsymbol{\zeta}_n + \Delta\lambda\mathbf{s}^{tr} \quad (12b)$$

Donde:

$$\mathbf{r}^{tr} = \frac{\partial\varphi}{\partial\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{tr}} \quad (13)$$

Para modelos simples (como el modelo de von Mises con reglas simples de endurecimiento) es posible combinar las ecuaciones anteriores en una simple ecuación escalar en $\Delta\lambda$. Se puede resolver esta ecuación y encontrar los valores de tensiones y de variables internas en el incremento $n+1$. Este es el caso para endurecimiento isotrópico no lineal cuando las ecuaciones son basadas en el campo de tensiones desviadoras. Una estimación inicial de $\Delta\lambda$ puede ser:

$$\Delta\lambda_1 = \frac{\varphi^{tr}}{[\mathbf{r}^T\mathbf{C}\mathbf{r} + K_p]^{tr}} \quad (14)$$

Como fue verificado antes de comenzar el proceso iterativo que el tensor de prueba no cumple el criterio de fluencia, es decir $\varphi > 0$, son definidos las siguientes ecuaciones residuales:

$$\mathbf{R}_\sigma = \sigma_{n+1} - [\sigma_n + \mathbf{C}\Delta\epsilon - \Delta\lambda\mathbf{C}\mathbf{r}^{n+1}] = \mathbf{R}_\sigma(\sigma_{n+1}, \zeta_{n+1}, \Delta\lambda) \quad (15a)$$

$$\mathbf{R}_\zeta = \zeta_{n+1} - [\zeta_n + \Delta\lambda s^{n+1}] = \mathbf{R}_\zeta(\sigma_{n+1}, \zeta_{n+1}, \Delta\lambda) \quad (15b)$$

$$R_\varphi = \varphi^{n+1}(\sigma_{n+1}, \zeta_{n+1}) \quad (15c)$$

Durante la primera iteración, los residuales son calculados utilizando σ_{n+1}^1 , ζ_{n+1}^1 y $\Delta\lambda_1$ para σ_{n+1} y ζ_{n+1} . Esto requiere el cálculo de $\mathbf{r}^{n+1}$ en el estado σ_{n+1}^1 y ζ_{n+1}^1 . Cuando la función de fluencia tiene una regla de endurecimiento isotrópico, lineal o no lineal, ζ y $\mathbf{R}_\zeta$ son cantidades escalares. Ahora las ecuaciones residuales son linealizadas en torno a σ_{n+1}^1 y ζ_{n+1}^1 .

$$R^1_{\sigma_{ij}} + \left[\frac{\partial R_{\sigma_{ij}}}{\partial \sigma_{kl}} \right]_1 \partial \sigma_{kl} + \left[\frac{\partial R_{\sigma_{ij}}}{\partial \zeta_{kl}} \right]_1 \partial \zeta_{kl} + \left[\frac{\partial R_{\sigma_{ij}}}{\partial \Delta\lambda} \right]_1 \partial \Delta\lambda = 0 \quad (16a)$$

$$R^1_{\zeta_{ij}} + \left[\frac{\partial R_{\zeta_{ij}}}{\partial \sigma_{kl}} \right]_1 \partial \sigma_{kl} + \left[\frac{\partial R_{\zeta_{ij}}}{\partial \zeta_{kl}} \right]_1 \partial \zeta_{kl} + \left[\frac{\partial R_{\zeta_{ij}}}{\partial \Delta\lambda} \right]_1 \partial \Delta\lambda = 0 \quad (16b)$$

$$R^1_\varphi + \left[\frac{\partial R_\varphi}{\partial \sigma_{kl}} \right]_1 \partial \sigma_{kl} + \left[\frac{\partial R_\varphi}{\partial \zeta_{kl}} \right]_1 \partial \zeta_{kl} = 0 \quad (16c)$$

Las ecuaciones residuales pueden ser formuladas también en notación tensorial, así:

$$R_{\sigma_{ij}} = \sigma_{ij}^{n+1} - \sigma_{ij}^n - C_{ijpq}\Delta\epsilon_{pq} + \Delta\lambda C_{ijpq}r_{pq}^{n+1} \quad (17a)$$

$$R_{\zeta_{ij}} = \zeta_{ij,n+1} - \zeta_{ij,n} - \Delta\lambda s_{ij}^{n+1} \quad (17b)$$

$$R_\varphi = \varphi^{n+1}(\sigma_{ij}^{n+1}, \zeta_{ij,n+1}) \quad (17c)$$

Los coeficientes de las Ecs. (16) son derivados a seguir. Representan valores numéricos pues son evaluados en σ_{n+1}^1 y ζ_{n+1}^1 . El subíndice 1 es suprimido para simplificar la notación.

$$\frac{\partial R_{\sigma_{ij}}}{\partial \sigma_{kl}} = \delta_{ik}\delta_{jl} - \frac{\partial C_{ijpq}}{\partial \sigma_{kl}} [\Delta\epsilon_{pq} - \Delta\lambda r_{pq}^{n+1}] + \Delta\lambda C_{ijpq} \frac{\partial r_{pq}^{n+1}}{\partial \sigma_{kl}} \quad (18a)$$

$$\frac{\partial R_{\sigma_{ij}}}{\partial \zeta_{kl}} = \Delta \lambda C_{ijpq} \frac{\partial r_{pq}^{n+1}}{\partial \zeta_{ij}} \quad (18b)$$

$$\frac{\partial R_{\sigma_{ij}}}{\partial \Delta \lambda} = C_{ijpq} r_{pq}^{n+1} \quad (18c)$$

$$\frac{\partial R_{\zeta}}{\partial \sigma_{kl}} = -\Delta \lambda \frac{\partial s^{n+1}}{\partial \sigma_{kl}} \quad (18d)$$

$$\frac{\partial R_{\zeta_{ij}}}{\partial \zeta_{kl}} = 1 - \Delta \lambda \frac{\partial s_{ij}^{n+1}}{\partial \zeta_{kl}} \quad (18e)$$

$$\frac{\partial R_{\zeta_{ij}}}{\partial \Delta \lambda} = -s_{ij}^{n+1} - \Delta \lambda \frac{\partial s_{ij}^{n+1}}{\partial \Delta \lambda} \quad (18f)$$

$$\frac{\partial R_{\varphi}}{\partial \sigma_{kl}} = \frac{\partial \varphi^{n+1}}{\partial \sigma_{kl}} = r_{kl}^{n+1} \quad (18g)$$

$$\frac{\partial R_{\varphi}}{\partial \zeta_{ij}} = \frac{\partial \varphi^{n+1}}{\partial \zeta_{ij}} \quad (18h)$$

Para el cálculo de los anteriores coeficientes son necesarias las siguientes cantidades: valores de $\mathbf{C}$, $\mathbf{r}$, $\partial \varphi / \partial \zeta$, $\Delta \lambda$ y $\mathbf{s}$ en el punto $n+1$ de la iteración actual. Gradientes $\partial \mathbf{C} / \partial \boldsymbol{\sigma}$, $\partial \mathbf{r} / \partial \boldsymbol{\sigma}$, $\partial \mathbf{r} / \partial \zeta$, $\partial \mathbf{s} / \partial \boldsymbol{\sigma}$, $\partial \mathbf{s} / \partial \zeta$, $\partial \mathbf{s} / \partial \Delta \lambda$. Las Ecs. (16) son solucionadas simultáneamente para encontrar las tres incógnitas, $\delta \sigma_{ij}$, $\delta \zeta$, y $\delta \Delta \lambda$ y así calcular los nuevos valores estimados, estos son calculados como:

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^2 = \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^1 + \delta \boldsymbol{\sigma} \quad (19a)$$

$$\zeta_{n+1}^2 = \zeta_{n+1}^1 + \delta \zeta \quad (19b)$$

$$\Delta \lambda^2 = \Delta \lambda^1 + \delta \Delta \lambda \quad (19c)$$

Son evaluados de nuevo los residuales definidos en las Ecs. (15). Como es posible que los valores obtenidos no sean lo suficientemente pequeños, el procedimiento es repetido usando ahora los valores actualizados, o sea $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^2$, ζ_{n+1}^2 y $\Delta \lambda^2$. El corrector plástico $\Delta \boldsymbol{\sigma}^{pc}$ gradualmente converge al valor correcto dentro de la tolerancia adoptada. Es utilizado el siguiente criterio de convergencia:

$$e_{\sigma} = \|\mathbf{R}_{\sigma}^{i+1}\|/\|\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^i\| \leq TOL \quad (20a)$$

$$e_{\zeta} = \|\mathbf{R}_{\zeta}^{i+1}\|/\|\boldsymbol{\zeta}_{n+1}^i\| \leq TOL \quad (20b)$$

$$R_{\varphi}^{i+1} = \varphi^{i+1} \leq TOL \quad (20c)$$

4 INTEGRACIÓN DEL MODELO DE VON MISES

El criterio de von Mises es adecuado como criterio de fallo o de rotura en metales, en los que, típicamente estados de tensión hidrostática (tanto en tracción como en compresión) tienen un comportamiento elástico y la rotura se produce debido a la presencia de componentes desviadoras de la tensión. Es utilizada una regla de endurecimiento isotrópico en la cual la superficie se expande uniformemente en todas las direcciones en el espacio de tensiones sin sufrir cambios en su forma o en su centro. El modelo es ampliamente utilizado en plasticidad independiente de la tasa y para reglas de flujo asociativas. Modelos con endurecimiento isotrópico son generalmente utilizados para aplicaciones de carga monotónica. La regla de endurecimiento es no lineal y es aplicada en el campo de tensiones y en el campo de tensiones desviadoras. La relación tensión-deformación es dada por:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e \quad (21)$$

Donde:

$$C_{ijkl} = \left(K - \frac{2}{3}G\right)\delta_{ij}\delta_{kl} + G(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \quad (22)$$

G es el módulo de cortante y K el módulo de *bulk*). $\mathbf{C}$ es el operador tangente elástico continuo, $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ es la tasa del tensor de tensiones, y $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e$ es la tasa de la deformación elástica. Los dos primeros invariantes, I y J, del tensor de tensiones, son definidos como:

$$I = \sigma_{kl}\delta_{kl} \quad (23a)$$

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}I\delta_{ij} \quad (23b)$$

$$J = \left(\frac{1}{2}s_{kl}s_{kl}\right)^{1/2} \quad (23c)$$

La superficie de fluencia es un cilindro en el espacio de tensiones con su eje coincidiendo con la diagonal del espacio de tensiones, su proyección en el plano octaédrico es un círculo dado por:

$$\varphi(s, k) = s_{ij}s_{ij} - \frac{2}{3}k^2 = 0 \quad (24)$$

Donde la variable k , es la única variable interna en el modelo, geoméricamente representa el tamaño de la superficie de fluencia, se tiene entonces que, para las variables internas:

$$\zeta \equiv k \quad (25)$$

Asumiendo una regla de flujo asociativa, las ecuaciones involucradas en las relaciones constitutivas plásticas son:

$$\dot{\varepsilon}^p = \dot{\lambda} r; r = \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma}; \dot{\lambda} = \frac{1}{K_p} r \dot{\sigma} \quad (26)$$

Donde $\dot{\varepsilon}^p$ es la tasa de la deformación plástica, $\dot{\lambda}$ es el índice de carga y K_p es conocido como modulo plástico. Uno de los principales aspectos de la teoría de plasticidad es la condición de consistencia de la función de fluencia representada matemáticamente por la Ec. (4). Esta condición lleva a:

$$K_p = -\frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} s \quad (27)$$

La tasa de cambio de la variable de endurecimiento k será dada por:

$$\dot{k} = g \dot{\xi}^p \quad (28)$$

Es utilizada la siguiente relación hiperbólica para el modelo de endurecimiento no lineal:

$$g = \frac{m(k_f - k_0)^2}{[(k_f - k_0) + m\xi^p]^2} = \frac{a_1}{[a_2 + b\xi^p]^2} \quad (29)$$

Donde $a_1 = m(k_f - k_0)^2$; $a_2 = (k_f - k_0)$; $b = m$ y ξ^p representa la longitud de la trayectoria en el espacio de deformaciones plásticas desviadoras, y es definida por:

$$\xi^p = \left[\frac{1}{2} \dot{\varepsilon}_{ij}^p \dot{\varepsilon}_{ij}^p \right] \quad (30)$$

Siendo $\dot{\varepsilon}_{ij}$ la tasa de cambio del tensor de deformaciones desviadoras;

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij} - \frac{1}{3} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \quad (31)$$

De la Ec. (26) se tiene que:

$$\dot{\xi}^p = \left[\frac{1}{2} \dot{e}_{ij}^p \dot{e}_{ij}^p \right] = \left[\frac{1}{2} r_{ij}^d r_{ij}^d \right]^{1/2} \dot{\lambda} = \bar{r}^d \dot{\lambda} \quad (32)$$

$$\bar{r}^d = \left[\frac{1}{2} r_{ij}^d r_{ij}^d \right]^{1/2} \quad (33)$$

Donde r_{ij}^d es la parte desviadora de r_{ij} , y puede ser calculado como:

$$r_{ij}^d = r_{ij} - \frac{1}{3} r_{pp} \delta_{ij} \quad (34)$$

Combinando las ecuaciones anteriores, se tiene que para el modelo no lineal:

$$\dot{k} = g \bar{r}^d \dot{\lambda} = \bar{g} \dot{\lambda} \quad (35)$$

Finalmente, la función de endurecimiento en la Ec. (9), es un escalar dado por:

$$s = \bar{g} = g \bar{r}^d \quad (36)$$

Son definidos los gradientes de la función de fluencia respecto a las variables de estado, derivando la Ec. (23b) respecto al tensor de tensiones, se tiene que:

$$\frac{\partial s_{kl}}{\partial \sigma_{ij}} = \delta_{ki} \delta_{lj} - \frac{1}{3} \delta_{il} \delta_{kj} \quad (37)$$

La derivada de la función de fluencia dada por la Ec. (24), respecto al tensor de tensiones desviadoras es calculada como:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s_{kl}} = 2 \delta_{ik} \delta_{jl} s_{ij} = 2 s_{kl} \quad (38)$$

Usando la regla de la cadena y las dos ecuaciones anteriores, el vector de flujo plástico es definido como:

$$r_{ij} = \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial \varphi}{\partial s_{kl}} \frac{\partial s_{kl}}{\partial \sigma_{ij}} = 2 s_{kl} \left(\delta_{ki} \delta_{lj} - \frac{1}{3} \delta_{il} \delta_{kj} \right) = 2 s_{ij} \quad (s_{kk} = 0) \quad (39)$$

Se puede observar de la ecuación anterior que el vector de flujo plástico r_{ij} es puramente desviador, es decir su parte volumétrica es igual a cero, lo que es:

$$r_{ij}^d = r_{ij} \quad (40)$$

Ahora de las Ecs. (23c) y (40), se tiene que:

$$\bar{r}^d = \left[\frac{1}{2} r_{ij}^d r_{ij}^d \right]^{1/2} = \left[\frac{1}{2} r_{ij} r_{ij} \right]^{1/2} = 2 \left[\frac{1}{2} s_{ij} s_{ij} \right]^{1/2} = 2J \quad (41)$$

La derivada de la función de fluencia respecto a k es:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial k} = -\frac{4}{3}k \quad (42)$$

De la Ec. (4) que determina la consistencia y de las ecuaciones anteriores el módulo plástico puede ser expresado como:

$$K_p = \frac{4}{3}k g \bar{r}^d \quad (43)$$

La integración del modelo constitutivo puede ser realizada o en el espacio de tensiones σ , o en el espacio de tensiones desviadoras s . En el modelo de von Mises, por tratarse de un modelo simple, puede ser utilizado el espacio de tensiones desviadoras, disminuyendo considerablemente el consumo computacional. En este trabajo el usuario puede escoger en que campo de tensiones prefiere integrar el modelo constitutivo.

4.1 Aplicación del método CPPM, formulación en el espacio de tensiones σ .

Las ecuaciones principales *Backward Euler* son:

$$\sigma_{n+1} = \sigma_n + \mathbf{C} \Delta \varepsilon - \Delta \lambda \mathbf{C} \mathbf{r}^{n+1}(\sigma_{n+1}, k_{n+1}) \quad (44a)$$

$$k_{n+1} = \bar{k}(\sigma_{n+1}, k_{n+1}, \Delta \lambda) \quad (44b)$$

$$\varphi^{n+1}(\sigma_{n+1}, k_{n+1}) = 0 \quad (44c)$$

La evolución de la variable interna k , que determina el tamaño de la función de fluencia, es determinada en este trabajo por medio de dos aproximaciones:

$$\bar{k} = k_n + \Delta \lambda \bar{g}^{n+1}(\sigma_{n+1}, k_{n+1}) \quad \text{Aproximación 1} \quad (45a)$$

$$\bar{k} = k_0 + \frac{m(k_f - k_0)\xi^p}{(k_f - k_0) + m\xi^p} \quad \text{Aproximación 2} \quad (45b)$$

Donde k_0 es la tensión de fluencia de un espécimen inalterado, m es un parámetro de endurecimiento y k_f es la tensión de ruptura, son parámetros del modelo. Discretizando la Ec. (30)

$$\xi_{n+1}^p = \xi_n^p + \Delta \xi; \Delta \xi = \bar{r}_{n+1}^d \Delta \lambda \quad (46)$$

Los coeficientes de las Ecs. (18) para el modelo de von Mises con endurecimiento isotrópico son evaluados a seguir en el estado actual de tensiones $n+1$, para simplificar la notación el subíndice es dejado atrás, es decir $\sigma_{ij}^{n+1} = \sigma_{ij}$.

$$\frac{\partial C_{ijpq}}{\partial \sigma_{kl}} = 0; \quad \frac{\partial r_{pq}^{n+1}}{\partial \sigma_{kl}} = 2 \frac{\partial s_{pq}^{n+1}}{\partial \sigma_{kl}} = 2 \left(\delta_{pk} \delta_{ql} - \frac{1}{3} \delta_{pq} \delta_{kl} \right) \quad (47)$$

Aproximación 1:

$$g^{n+1} = \frac{m(k_f - k_0)^2}{[(k_f - k_0) + m\xi^p]^2} = \frac{a_1}{[a_2 + b\xi^p]^2} = \frac{a_1}{(a_2 + b\xi^p_n + b\bar{r}_{n+1}^d \Delta\lambda)^2} \quad (48a)$$

$$\frac{\partial \bar{g}^{n+1}}{\partial \sigma_{kl}} = \bar{r}_{n+1}^d \frac{\partial g^{n+1}}{\partial \sigma_{kl}} + g^{n+1} \frac{\partial \bar{r}_{n+1}^d}{\partial \sigma_{kl}} \quad (48b)$$

$$\frac{\partial \bar{g}^{n+1}}{\partial k} = \bar{r}_{n+1}^d \frac{\partial g^{n+1}}{\partial k} + g^{n+1} \frac{\partial \bar{r}_{n+1}^d}{\partial k} \quad (48c)$$

$$\frac{\partial \bar{g}^{n+1}}{\partial \Delta\lambda} = \bar{r}_{n+1}^d \frac{\partial g^{n+1}}{\partial \Delta\lambda} + g^{n+1} \frac{\partial \bar{r}_{n+1}^d}{\partial \Delta\lambda} \quad (48d)$$

$$\frac{\partial \bar{r}_{n+1}^d}{\partial \sigma_{kl}} = \frac{1}{2\bar{r}_{n+1}^d} \frac{2}{2} \frac{\partial r_{ij}}{\partial \sigma_{kl}} r_{ij} = \frac{1}{2\bar{r}_{n+1}^d} 2r_{ij} \left(\delta_{ik} \delta_{jl} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{kl} \right) = \frac{1}{\bar{r}_{n+1}^d} r_{kl} \quad (48e)$$

$$\frac{\partial \bar{r}_{n+1}^d}{\partial k} = 0 \quad (48f)$$

$$\frac{\partial \bar{r}_{n+1}^d}{\partial \Delta\lambda} = 0 \quad (48g)$$

$$\frac{\partial g^{n+1}}{\partial \sigma_{kl}} = - \frac{2a_1 b \Delta\lambda}{(a_2 + b\xi^p_n + b\bar{r}_{n+1}^d \Delta\lambda)^3} \frac{\partial \bar{r}_{n+1}^d}{\partial \sigma_{kl}} = - \frac{2a_1 b \Delta\lambda}{(a_2 + b\xi^p_{n+1})^3} \frac{r_{kl}}{\bar{r}_{n+1}^d} \quad (48h)$$

$$\frac{\partial g^{n+1}}{\partial k} = 0 \quad (48i)$$

$$\frac{\partial g^{n+1}}{\partial \Delta\lambda} = - \frac{2a_1 b \bar{r}_{n+1}^d}{(a_2 + b\xi^p_n + b\bar{r}_{n+1}^d \Delta\lambda)^3} = - \frac{2a_1 b \bar{r}_{n+1}^d}{(a_2 + b\xi^p_{n+1})^3} \quad (48j)$$

Finalmente los gradientes para la función de endurecimiento en el paso $n+1$ pueden ser calculados como:

$$\frac{\partial \bar{g}^{n+1}}{\partial \sigma_{kl}} = \left[\frac{g^{n+1}}{\bar{r}_{n+1}^d} - \frac{2a_1 b \Delta \lambda}{(a_2 + b \xi_{n+1}^p)^3} \right] r_{kl} \quad (49a)$$

$$\frac{\partial \bar{g}^{n+1}}{\partial k} = 0 \quad (49b)$$

$$\frac{\partial \bar{g}^{n+1}}{\partial \Delta \lambda} = - \frac{2a_1 b (\bar{r}_{n+1}^d)^2}{(a_2 + b \xi_{n+1}^p)^3} \quad (49c)$$

Aproximación 2:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{k}}{\partial \sigma_{kl}} &= \frac{m(k_f - k_0)}{(a_2 + b \xi_{n+1}^p)^2} [\Delta \lambda (a_2 + b \xi_{n+1}^p) - m \Delta \lambda \xi_{n+1}^p] \frac{\partial \bar{r}_{n+1}^d}{\partial \sigma_{kl}} \\ &= \frac{a_1 \Delta \lambda}{(a_2 + b \xi_{n+1}^p)^2} \frac{\partial \bar{r}_{n+1}^d}{\partial \sigma_{kl}} = \frac{a_1 \Delta \lambda}{(a_2 + b \xi_{n+1}^p)^2} \frac{r_{kl}}{\bar{r}_{n+1}^d} \end{aligned} \quad (50a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{k}}{\partial k} &= \frac{m(k_f - k_0)}{(a_2 + b \xi_{n+1}^p)^2} [\Delta \lambda (a_2 + b \xi_{n+1}^p) - m \Delta \lambda \xi_{n+1}^p] \frac{\partial \bar{r}_{n+1}^d}{\partial k} \\ &= \frac{a_1 \Delta \lambda}{(a_2 + b \xi_{n+1}^p)^2} \frac{\partial \bar{r}_{n+1}^d}{\partial k} \end{aligned} \quad (50b)$$

$$\frac{\partial \bar{k}}{\partial \Delta \lambda} = \frac{m(k_f - k_0)}{(a_2 + b \xi_{n+1}^p)^2} [(a_2 + b \xi_{n+1}^p) - m \xi_{n+1}^p] \bar{r}_{n+1}^d = \frac{a_1}{(a_2 + b \xi_{n+1}^p)^2} \bar{r}_{n+1}^d \quad (50c)$$

Así los coeficientes de las Ecs. (18) para el modelo de von Mises con una regla de endurecimiento isotópico no lineal son:

$$\frac{\partial R_{\sigma_{ij}}}{\partial \sigma_{kl}} = \delta_{ik} \delta_{jl} + \Delta \lambda C_{ijpq} \frac{\partial r_{pq}^{n+1}}{\partial \sigma_{kl}} = \delta_{ik} \delta_{jl} + 2 \Delta \lambda (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) - \frac{4}{3} G \delta_{ij} \delta_{kl} \Delta \lambda \quad (51a)$$

$$\frac{\partial R_{\sigma_{ij}}}{\partial \zeta} = \Delta \lambda C_{ijpq} \frac{\partial r_{pq}^{n+1}}{\partial \zeta} = \Delta \lambda C_{ijpq} \frac{\partial r_{pq}^{n+1}}{\partial k} = 0 \quad (51b)$$

$$\frac{\partial R_{\sigma_{ij}}}{\partial \Delta \lambda} = C_{ijpq} r_{pq}^{n+1} = \left[\left(K - \frac{2}{3} G \right) \delta_{ij} \delta_{kl} + G (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \right] 2s_{pq} = 4G s_{ij} \quad (51c)$$

$$\frac{\partial R_{\varphi}}{\partial \sigma_{kl}} = \frac{\partial \varphi^{n+1}}{\partial \sigma_{kl}} = r_{kl} = 2s_{kl} \quad (51d)$$

$$\frac{\partial R_{\varphi}}{\partial \zeta} = \frac{\partial \varphi^{n+1}}{\partial k} = -\frac{4}{3} k \quad (51e)$$

Las demás expresiones dependen del tipo de aproximación de la variable de endurecimiento. Aproximación 1:

$$\frac{\partial R_{\zeta}}{\partial \sigma_{kl}} = -\frac{\partial \bar{k}}{\partial \sigma_{kl}} = -\Delta \lambda \frac{\partial \bar{g}^{n+1}}{\partial \sigma_{kl}} = -\Delta \lambda \left[\frac{g^{n+1}}{\bar{r}_{n+1}^d} - \frac{2a_1 b \Delta \lambda}{(a_2 + b \xi_{n+1}^p)^3} \right] r_{kl} \quad (52a)$$

$$\frac{\partial R_{\zeta}}{\partial \zeta} = 1 - \frac{\partial \bar{k}}{\partial k} = 1 - \Delta \lambda \frac{\partial \bar{g}^{n+1}}{\partial k} = 1 \quad (52b)$$

$$\frac{\partial R_{\zeta}}{\partial \Delta \lambda} = -\frac{\partial \bar{k}}{\partial \Delta \lambda} = -\bar{g}^{n+1} - \Delta \lambda \frac{\partial \bar{g}^{n+1}}{\partial \Delta \lambda} = -\bar{g}^{n+1} + \Delta \lambda \frac{2a_1 b (\bar{r}_{n+1}^d)^2}{(a_2 + b \xi_{n+1}^p)^3} \quad (52c)$$

Aproximación 2:

$$\frac{\partial R_{\zeta}}{\partial \sigma_{kl}} = -\frac{\partial \bar{k}}{\partial \sigma_{kl}} = \frac{a_1 \Delta \lambda}{(a_2 + b \xi_{n+1}^p)^2} \frac{r_{kl}}{\bar{r}_{n+1}^d} \quad (53a)$$

$$\frac{\partial R_{\zeta}}{\partial \zeta} = 1 - \frac{\partial \bar{k}}{\partial k} = 1 - \frac{a_1 \Delta \lambda}{(a_2 + b \xi_{n+1}^p)^2} \frac{\partial \bar{r}_{n+1}^d}{\partial k} = 1 \quad (53b)$$

$$\frac{\partial R_{\zeta}}{\partial \Delta \lambda} = -\frac{\partial \bar{k}}{\partial \Delta \lambda} = -\frac{a_1}{(a_2 + b \xi_{n+1}^p)^2} \bar{r}_{n+1}^d \quad (53c)$$

4.2 Aplicación del método CPPM, formulación en el espacio de tensiones desviadoras S.

Las ecuaciones de Euler para tensiones pueden ser descompuestas en parte esférica y desviadora, así:

$$p_{n+1} = p_n + K\Delta\varepsilon_{pp} - K\Delta\lambda r_{pp}^{n+1} \quad (54a)$$

$$\mathbf{s}_{n+1} = \mathbf{s}_n + 2G\Delta\mathbf{e} - 2G\Delta\lambda \mathbf{r}_{n+1}^d \quad (54b)$$

Donde $p_{n+1} = \sigma_{kk}$ es la parte esférica de $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$, $\mathbf{s}_{n+1} = \boldsymbol{\sigma}_{n+1} - p_{n+1}\boldsymbol{\delta}$ es la parte desviadora de $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$ y $\Delta\mathbf{e} = \Delta\boldsymbol{\varepsilon} - \Delta\varepsilon_{pp}\boldsymbol{\delta}/3$ es el incremento desviador de la deformación. En modelos independientes de la presión hidrostática, como el modelo de von Mises considerado en este trabajo, $r_{pp}^{n+1} = 0$, la variación de p es puramente elástica. Por lo tanto, solo es necesario incluir la ecuación desviadora en el proceso iterativo. El método puede ser simplificado a una simple ecuación escalar en $\Delta\lambda$, resultando en un proceso más eficiente. Para el cálculo de la variable de endurecimiento k , son utilizadas las dos aproximaciones definidas en la sección anterior por las Ecs. (45). Aproximación 1:

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_{n+1} &= \mathbf{s}_n + 2G(\Delta\mathbf{e} - \Delta\mathbf{e}^p) = \mathbf{s}^{tr} - 2G\Delta\lambda \mathbf{r}_{n+1} = \mathbf{s}^{tr} - 4G\Delta\lambda \mathbf{s}_{n+1}; \\ \mathbf{s}^{tr} &= \mathbf{s}_n + 2G\Delta\mathbf{e} \end{aligned} \quad (55)$$

Es utilizado la descomposición aditiva de las deformaciones, es decir que la deformación total es calculada como la suma de la deformación elástica y la deformación plástica. Así:

$$\mathbf{s}_{n+1} = \frac{1}{1+4G\Delta\lambda} \mathbf{s}^{tr} = \frac{\mathbf{s}^{tr}}{x_0}; x_0 = 1 + 4G\Delta\lambda \quad (56)$$

De la ecuación anterior se sigue que:

$$J_{n+1} = \frac{J^{tr}}{x_0} \quad (57)$$

Notando que x_0 es un valor escalar, lo cual implica que $\mathbf{s}_{n+1}$ y $\mathbf{s}^{tr}$ son colineales. La superficie de fluencia en el estado actual de tensiones es calculada y usando la Ec. (41) la variable de endurecimiento puede ser expresada como:

$$k_{n+1} = k_n + \Delta\lambda \bar{r}_{n+1}^d g_{n+1} = k_n + 2\Delta\lambda J_{n+1} g_{n+1} \quad (58)$$

Donde:

$$J_{n+1} = \left(\frac{1}{2} \mathbf{s}_{n+1} : \mathbf{s}_{n+1} \right)^{1/2}; J^{tr} = \left(\frac{1}{2} \mathbf{s}^{tr} : \mathbf{s}^{tr} \right)^{1/2} \quad (59)$$

Combinando las dos ecuaciones anteriores, se tiene que:

$$k_{n+1} = k_n + \frac{2\Delta\lambda J^{tr} g_{n+1}}{x_0} \quad (60)$$

La función de endurecimiento dada por la Ec. (48a) por medio de la Ec. (46) y haciendo uso de la Ec. (57) puede ser expresada como:

$$\begin{aligned} g_{n+1} &= \frac{a_1}{(a_2 + b\xi_n^p + b\Delta\lambda\bar{r}_{n+1}^d)^2} = \frac{a_1}{(a_2 + b\xi_n^p + 2b\Delta\lambda J_{n+1})^2} \\ &= \frac{a_1}{\left(a_2 + b\xi_n^p + 2b\Delta\lambda \frac{J^{tr}}{x_0}\right)^2} = \frac{a_1 x_0^2}{(a_2 x_0 + b\xi_n^p x_0 + 2b\Delta\lambda J^{tr})^2} \end{aligned} \quad (61)$$

La Ec. (60) resulta en:

$$k_{n+1} = k_n + \frac{2\Delta\lambda J^{tr}}{x_0} \frac{a_1 x_0^2}{(a_2 x_0 + b\xi_n^p x_0 + 2b\Delta\lambda J^{tr})^2} \quad (62)$$

Combinando las Ecs. (56) y (62), dentro del criterio de fluencia (Ec. (24):

$$\begin{aligned} J_{n+1} - \frac{k_{n+1}}{\sqrt{3}} &= 0 \\ \frac{J^{tr}}{x_0} - \frac{k_n}{\sqrt{3}} - \frac{2\Delta\lambda J^{tr}}{\sqrt{3}x_0} \frac{a_1 x_0^2}{(a_2 x_0 + b\xi_n^p x_0 + 2b\Delta\lambda J^{tr})^2} &= 0 \\ J^{tr}\sqrt{3} - k_n x_0 - 2\Delta\lambda J^{tr} \frac{a_1 x_0^2}{(a_2 x_0 + b\xi_n^p x_0 + 2b\Delta\lambda J^{tr})^2} &= 0 \\ J^{tr}\sqrt{3} - k_n(1 + 4G\Delta\lambda) - 2\Delta\lambda J^{tr} \frac{a_1(1 + 4G\Delta\lambda)^2}{(a_2 x_0 + b\xi_n^p(1 + 4G\Delta\lambda) + 2b\Delta\lambda J^{tr})^2} &= 0 \\ J^{tr}\sqrt{3} - k_n(1 + 4G\Delta\lambda) - 2\Delta\lambda J^{tr} a_1 \frac{(1 + 8G\Delta\lambda + 16G^2\Delta\lambda^2)}{(a_2 x_0 + b\xi_n^p(1 + 4G\Delta\lambda) + 2b\Delta\lambda J^{tr})^2} &= 0 \end{aligned} \quad (63)$$

Para simplificar la notación son definidas las siguientes cantidades: $\alpha_1 = J^{tr}\sqrt{3} - k_n$; $\alpha_2 = -4Gk_n$; $\beta_1 = a_2 + b\xi_n^p$; $\beta_2 = 4Ga_2 + 4Gb\xi_n^p + 2bJ^{tr}$. La Ec. (63) anterior resulta en:

$$(\alpha_1 + \alpha_2\Delta\lambda)(\beta_1 + \beta_2\Delta\lambda) = 2\Delta\lambda J^{tr} a_1(1 + 16G^2\Delta\lambda^2 + 8G\Delta\lambda) \quad (64)$$

Introduciendo las siguientes constantes:

$$B_1 = \alpha_2\beta_2^2 - 32G^2J^{tr}a_1 \quad (65a)$$

$$B_2 = 2\beta_1\beta_2\alpha_2 + \alpha_1\beta_2^2 - 16GJ^{tr}a_1 \quad (65b)$$

$$B_3 = \alpha_2 \beta_1^2 + 2\beta_1 \beta_2 \alpha_1 - 2J^{tr} a_1 \quad (65c)$$

$$B_4 = \alpha_1 \beta_1^2 \quad (65d)$$

Usando las Ecs. (65) para desarrollar la Ec. (64), se tiene la siguiente ecuación cúbica en $\Delta\lambda$:

$$B_1 \Delta\lambda^3 + B_2 \Delta\lambda^2 + B_3 \Delta\lambda + B_4 = 0 \quad (66)$$

Aproximación 2: Las expresiones para las cantidades $\mathbf{s}_{n+1}$, $\mathbf{s}^{tr}$ y x_0 son definidas como en la Aproximación 1. Ahora, para la variable de endurecimiento k , se tiene que:

$$k_{n+1} = k_0 + \frac{m(k_f - k_0)[\xi_n^p + \bar{r}_{n+1}^d \Delta\lambda]}{(k_f - k_0) + m[\xi_n^p + \bar{r}_{n+1}^d \Delta\lambda]} = k_0 + \frac{c_1[\xi_n^p + \bar{r}_{n+1}^d \Delta\lambda]}{a_2 + b[\xi_n^p + \bar{r}_{n+1}^d \Delta\lambda]} \quad (66)$$

Donde $c_1 = m(k_f - k_0)$; $a_2 = k_f - k_0$; $b = m$. Utilizando la Ec. (59) para J_{n+1} y la Ec. (66) en el criterio de von Mises se tiene que:

$$\frac{J^{tr}}{x_0} \sqrt{3} = k_0 + \frac{c_1[\xi_n^p + \bar{r}_{n+1}^d \Delta\lambda]}{a_2 + b[\xi_n^p + \bar{r}_{n+1}^d \Delta\lambda]} \quad (68)$$

Reorganizando la ecuación anterior y utilizando las Ecs. (41) y (57):

$$(J^{tr} \sqrt{3} - k_0 x_0)(a_2 x_0 + b x_0 \xi_n^p + b 2 J^{tr} \Delta\lambda) = x_0 (c_1 \xi_n^p x_0 + 2 c_1 J^{tr} \Delta\lambda) \quad (69)$$

Reemplazando la Ec. (56) en la ecuación anterior:

$$\begin{aligned} (J^{tr} \sqrt{3} - k_0 - 4G\Delta\lambda k_0)(a_2 + b \xi_n^p + 4G\Delta\lambda a_2 + 4G\Delta\lambda b \xi_n^p + b 2 J^{tr} \Delta\lambda) \\ = (1 + 4G\Delta\lambda)(c_1 \xi_n^p + 4G\Delta\lambda c_1 \xi_n^p + 2 c_1 J^{tr} \Delta\lambda) \end{aligned} \quad (70)$$

Nuevamente son introducidas las siguientes cantidades para simplificar la notación:

$$B_1 = -8Gk_0(2Ga_2 + 2Gb\xi_n^p + J^{tr}b) - 8Gc_1(2G\xi_n^p + J^{tr}) \quad (71a)$$

$$B_2 = -4Gk_0(a_2 + b\xi_n^p) + 2(J^{tr}\sqrt{3} - k_0)(2Ga_2 + Gb\xi_n^p + J^{tr}b) - 8c_1G\xi_n^p - 2c_1J^{tr} \quad (71b)$$

$$B_3 = (J^{tr}\sqrt{3} - k_0)(a_2 + b\xi_n^p) - c_1\xi_n^p \quad (71c)$$

Mediante las cuales, desarrollando la Ec. (70), es encontrada una expresión cuadrática en $\Delta\lambda$, dada por:

$$B_1\Delta\lambda^2 + B_2\Delta\lambda + B_3 = 0 \quad (72)$$

5 EJEMPLOS NUMÉRICOS.

Es presentado un ejemplo numérico para ambos espacios de integración (Tensiones σ , Desviador s). Una regla de endurecimiento isotrópico no lineal es utilizada, la variable de endurecimiento k es calculada por medio de las dos aproximaciones descritas. El ejemplo es desarrollado en el espacio de tensiones principales. Los parámetros del modelo (para tensiones, tensión de fluencia y módulos, es utilizada la unidad Gpa) son:

$$k_0 = 0.25, k_f = 0.4, m = 20, E=200, \nu = 0.3, a_1 = 0.45, a_2 = 0.15, b = 20$$

$$\text{TOL}=1\text{e-}10$$

Tensor elástico constitutivo, de la Ec. (22):

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 269.2308 & 115.3846 & 115.3846 \\ 115.3846 & 69.2308 & 115.3846 \\ 115.3846 & 115.3846 & 69.2308 \end{bmatrix}$$

Las variables de estado de tensiones para un tiempo n son:

$$\sigma_n = \{0.1 \quad 0.05 \quad 0.075\}, k_n = 0.25, \Delta\varepsilon = \{0.03 \quad -0.028 \quad 0.01\}, \xi_n = 0,$$

$$p_n = 0.0750, s_n = \{0.0250 \quad -0.0250 \quad 0\}, J_n = 0.0250.$$

Utilizando la Ec. (24) se obtiene el valor de la función de fluencia para el paso de carga n : $\varphi^n = -0.0404$

Para el estado de tensión inicial se tiene que, $\varphi^n < 0$, lo que representa un comportamiento elástico. En seguida es aplicado el incremento adoptado de deformación $\Delta\varepsilon$. Las propiedades del predictor elástico son:

$$\sigma^{tr} = \{6.1000 \quad -2.8731 \quad 2.9981\}, \varphi^{tr} = 41.4945, J^{tr} = 4.5572,$$

$$s^{tr} = \{4.0250 \quad -4.9481 \quad 0.9231\}$$

Lo que resulta en un comportamiento elastoplástico. El valor del predictor elástico será la primera estimación del estado de tensiones, es decir $\sigma^{tr} = \sigma_{n+1}$

$$r_{n+1} = 2s_{n+1} = \{8.0500 \quad -9.8962 \quad 1.8462\}$$

5.1 Formulación en el espacio de tensiones σ .

Utilizando el procedimiento descrito en 4.1, es realizado un proceso iterativo utilizando el método CPPM para encontrar los valores de las variables de estado en el paso $n+1$. En las Tablas 1 y 2 pueden ser observados los resultados para las tensiones y para las variables internas para un paso de carga. Son utilizadas las dos aproximaciones descritas en capítulos

anteriores. Los resultados son basicamente iguales, con una pequeña diferencia que puede se despreciable. Las dos aproximaciones entonces pueden ser aplicadas en un programa con elementos finitos. Enseguida, en la Ilustración 1, es presentado el valor de la función de fluencia para cada iteración, puede observarse que la tasa de convergencia es cuadrática.

Tabla 1. Resultados del proceso iterativo para la Aproximación 1.

Iteración	Aproximación 1					
	σ_{n+1}	k_{n+1}	$e\sigma$	$e\zeta$	$E\varphi$	$\delta\lambda$
1	{4,0943 -0,4074 2,5381}	0,2835	0,3310	0,0141	10,4006	0,0016
2	{3,0900 0,8272 2,3078}	0,2880	0,5056	0,0110	2,5860	0,0140
3	{2,5922 1,4392 2,1936}	0,2756	0,5554	0,0243	0,6352	0,0300
4	{2,3525 1,7339 2,1386}	0,2741	0,5230	0,0234	0,1473	0,0563
5	{2,2489 1,8612 2,1149}	0,2739	0,3721	0,0161	0,0275	0,0825
6	{2,2182 1,8990 2,1078}	0,2743	0,1099	0,0050	0,0024	0,0900
7	{2,2151 1,9028 2,1071}	0,2747	0,0032	0,0002	2,46E-05	0,0901
8	{2,2151 1,9028 2,1071}	0,2747	4,39E-07	1,05E-07	1,60E-10	0,0901
9	{2,2151 1,9028 2,1071}	0,2747	2,57E-14	1,01E-15	6,94E-18	0,0901

Tabla 2. Resultados del proceso iterativo para la Aproximación 2.

Iteración	Aproximación 2					
	σ_{n+1}	k_{n+1}	$e\sigma$	$e\zeta$	$e\varphi$	$\delta\lambda$
1	{4,0943 -0,4074 2,5381}	0,3495	0,3310	0,0714	10,4006	0,0016
2	{3,0947 0,8214 2,3089}	0,3990	0,5014	0,2863	2,5860	0,0140
3	{2,5926 1,4387 2,1937}	0,2756	0,5578	0,0245	0,6352	0,0300
4	{2,3527 1,7336 2,1387}	0,2741	0,5237	0,0235	0,1473	0,0563
5	{2,2490 1,8611 2,1149}	0,2739	0,3725	0,0161	0,0275	0,0825
6	{2,2182 1,8989 2,1078}	0,2743	0,1102	0,0050	0,0024	0,0900
7	{2,2151 1,9028 2,1071}	0,2747	0,0032	0,0002	2,46E-05	0,0901
8	{2,2151 1,9028 2,1071}	0,2747	4,46E-07	1,06E-07	1,60E-10	0,0901
9	{2,2151 1,9028 2,1071}	0,2747	3,39E-14	1,01E-15	6,94E-18	0,0901

5.2 Formulación en el espacio de tensiones s .

Siguiendo el procedimiento descrito en 4.2, es utilizado el método CPPM para encontrar los valores de las variables de estado en el paso $n+1$. Se puede observar que la formulación en el espacio de tensiones σ envuelve significativamente más cálculos que la formulación en el espacio de tensiones desviadoras s . No obstante, los resultados son fundamentalmente los mismos, con una pequeña tolerancia. En la Ilustración 2 es posible observar la convergencia cuadrática del método y en la Ilustración 2 se puede observar el comportamiento tensión–

deformación para un problema con un único elemento, aplicando el modelo de endurecimiento isotrópico no lineal descrito.

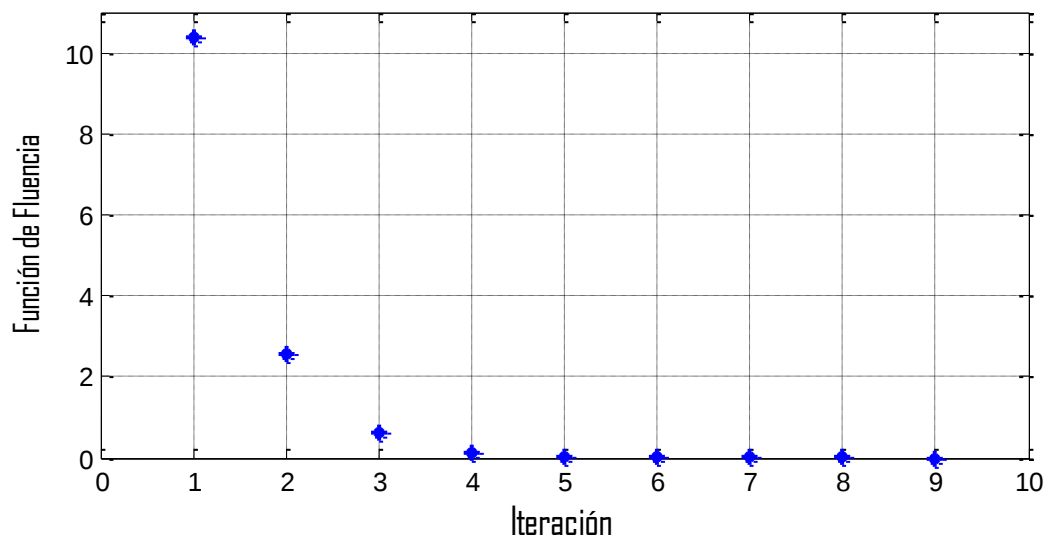


Ilustración 1. Convergencia del método.

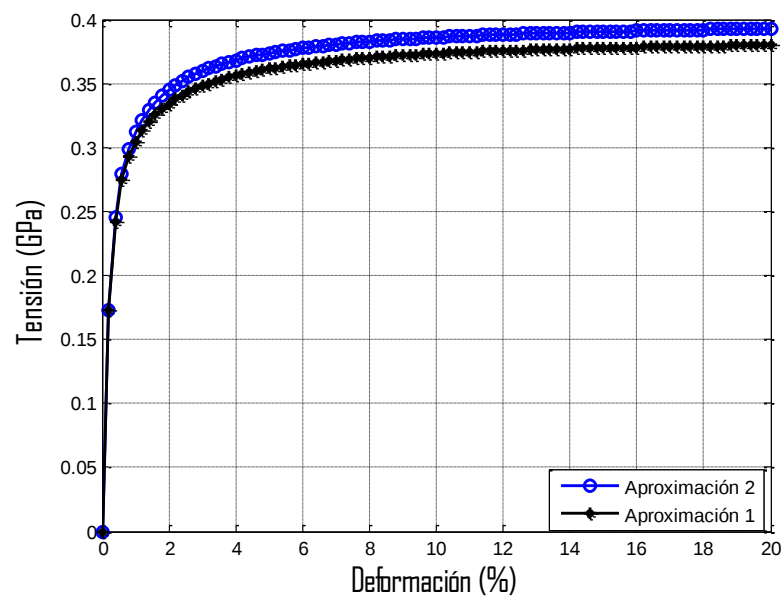


Ilustración 2. Tensión-Deformación para un cuerpo sometido a carga uniaxial.

Tabla 3. Resultados para el método con tensiones desviadoras.

	Aproximación 1	Aproximación 2
x_0	28,7349	21,4188
σ_{n+1}	{2,2151 1,9028 2,1071}	{2,2629 1,8439 2,1181}
J_{n+1}	0,1586	0,2128
ξ^p_{n+1}	0,0286	0,0282
g_{n+1}	0,8637	--
k_{n+1}	0,2747	0,3685

CONCLUSIONES.

En este trabajo fue presentado el modelo constitutivo de von Mises para un problema con un solo elemento. Para el análisis con elementos finitos resultará entonces más conveniente computacionalmente el uso del espacio de tensiones desviadoras, siempre que sea posible, pues existen modelos constitutivos donde será necesario el uso de la formulación en el espacio de tensiones. El método CPPM está basado en el esquema iterativo de Newton y sufre los inconvenientes inherentes al método. Por ejemplo, el método converge solo cuando la estimación inicial está cerca de la solución. Esto varía dependiendo del grado de no linealidad de la regla de endurecimiento, del criterio de endurecimiento, entre otros. Puede existir entonces no convergencia en diferentes casos: Cuando el tensor de tensiones de prueba está muy alejado de la solución, por ejemplo en modelos que combinan endurecimiento y ablandamiento. En algunos casos el cambio en variables internas durante iteraciones a nivel local puede ser muy grande, resultando en divergencia. Pueden aparecer también dificultades de convergencia cuando la solución final cae cerca de “esquinas” en las superficies de fluencia o de potencial plástico. La satisfacción de la condición de consistencia de la función de fluencia mejora la precisión del método. Así, la precisión del método depende del tamaño de cada incremento.

REFERENCIAS

- Anandarajah, A.2010. *Computational Methods in Elasticity and Plasticity*, pp. 375-412. Springer New York.
- Simo, J.C., Taylor, R.L. 1985. Consistent tangent operators for rate-independent elasto-plasticity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, pp.101-118.
- Wilkins, M.L. 1964. Calculation of elasto-plastic flow. *In Methods of Computational Physics* 3, Academic, New York.