



Solução da equação da onda elástica via funções de Green numéricas

Jonathan Esteban Arroyo Silva

jeas560@gmail.com

Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional, UFJF, 36036-330, JF, MG, Brasil

Felipe dos Santos Loureiro

felipe.loureiro@ufsj.edu.br

Departamento de Ciências Térmicas e dos Fluidos, UFSJ, 36307-352, SJDR, MG, Brasil

Webe João Mansur

webe@coc.ufrj.br

Departamento de Engenharia Civil, COPPE/UFRJ, 21945-970, Rio de Janeiro, RJ, Brasil

Abstract. Neste trabalho é apresentado um novo esquema de marcha no tempo para problemas de propagação de ondas elásticas no âmbito da Aproximação Explícita de Green, resultando numa expressão integral escrita em termos das funções de Green e de outras denominadas Degrau. Diferentemente do método dos elementos de contorno (MEC), o cálculo destas funções é realizado numericamente e de forma independente por meio da formulação semi-discreta do método dos elementos finitos (MEF) e o método Diferença Central, removendo, portanto, qualquer limitação quanto ao tipo de meio, i.e., o meio pode ser heterogêneo, anisotrópico, etc. Devido ao princípio da causalidade, as funções de Green e Degrau possuem um suporte compacto ao redor dos pontos fonte para um intervalo de tempo suficientemente pequeno, o qual é normalmente empregado nos métodos explícitos clássicos de integração temporal aplicados à modelagem de propagação de ondas. Neste sentido, as funções de Green e Degrau em $t = \Delta t$ podem ser eficientemente calculadas localmente através de subdomínios pequenos. Cada subdomínio local com sua respectiva sub-malha cobre somente pontos nodais onde os valores das funções de Green e Degrau são não nulos. A flexibilidade do esquema possibilita o cálculo das funções de Green e Degrau através de sub-passos de tempos melhorando assim a aproximação destas. A precisão e eficiência da metodologia proposta é demonstrada ao se analisar um exemplo numérico.

Keywords: Ondas elásticas, Funções de Green locais, Princípio da causalidade, Marcha no tempo, MEC, MEF

1 INTRODUÇÃO

Ao se estudar problemas complexos relacionados ao fenômeno de propagação de ondas em meios elásticos, governados pela equação da elastodinâmica, utilizam-se métodos de aproximação numérica, dos quais podem-se destacar os métodos das diferenças finitas (MDF), volumes finitos (MVF), elementos finitos (MEF) e elementos de contorno (MEC). Neste trabalho, porém, será utilizado tanto o MEF quanto conceitos do MEC.

Apesar do grande sucesso do MEF nas diversas áreas da engenharia, em determinados problemas como aqueles envolvendo domínios infinitos, e.g., problemas do tipo solo-fluido-estrutura, o MEC pode se tornar mais vantajoso que o MEF uma vez que domínios infinitos são facilmente incorporados na formulação do MEC. Neste sentido, quando enfrentado a problemas de natureza transiente, o MEC precisa de um tratamento especial dos efeitos de inercia introduzidos pelos termos transientes da equação diferencial governante. As varias estratégias existentes podem ser classificadas de acordo à natureza da função de Green (solução fundamental) adotada como métodos baseados em funções de Green dependentes do tempo ou em funções de Green estáticas (Brebbia e Wrobel, 1992; Dominguez, 1993). Os denominados “time-domain boundary element method” (TD-BEM), se encontram na primeira classe de métodos, nos quais a solução é efetuada no domínio espaço-tempo através de um processo convolutivo ou de marcha no tempo, já na segunda classe se encontram os denominados “Dual Reciprocity boundary element method” (DR-BEM) e “Domain boundary element method” (D-BEM), a partir dos quais um sistema de equações diferenciais ordinárias é obtido, similar ao resultante quando utilizado o MEF.

Neste trabalho é apresentado um novo método de marcha no tempo, o qual se baseia no método da aproximação explícita de Green “Explicit Green’s Approach” (ExGA). Este método foi proposto por Mansur et al. (2007) e Loureiro (2007) e consiste em calcular a função de Green dependente do tempo numericamente e de forma explícita; e difere do método dos elementos de contorno (formulação TD-BEM), que se baseia na utilização de funções de Green analíticas (Aliabadi e Wen, 2011; Wrobel, 2002). Os resultados apresentados neste trabalho se mostraram bastante precisos quando comparado aos métodos tradicionais de marcha no tempo utilizados usualmente para o MEF. Mais precisamente neste trabalho será feita a comparação unicamente com o método Diferença central (DC) uma vez que este é amplamente utilizado em problemas de propagação de ondas.

2 MÉTODO DA APROXIMAÇÃO EXPLÍCITA DE GREEN: EQUAÇÃO ELASTODINÂMICA

Nesta seção são apresentadas as equações governantes de problemas de propagação de ondas em meios elásticos e das funções de Green do problema em consideração. Na sequência, os procedimentos matemáticos necessários para a obtenção da expressão integral do método ExGA e suas funções de Green para a solução da equação elastodinâmica são detalhadamente apresentados.

2.1 Equações governantes

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ um domínio finito aberto qualquer com contorno $\partial\Omega = \Gamma$ do tipo Lipschitz, onde d representa o número de dimensões do problema e $I = (0, T] \subset \mathbb{R}^+$ o tempo de análise

(domínio temporal), a equação diferencial parcial que descreve problemas de propagação de ondas é expressa por (Graff, 1991):

$$\rho \ddot{u}_i - \sigma_{ij,j} = b_i \text{ em } \Omega \times I \quad (1)$$

onde $u_i : \Omega \times I \rightarrow \mathbb{R}$ representa o campo de deslocamentos, $f_i : \Omega \times I \rightarrow \mathbb{R}$ as forças de volume por unidade de volume, $\sigma_{ij} : \Omega \times I \rightarrow \mathbb{R}$ o tensor de *tensões de Cauchy* e $\rho : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$ a densidade. Considerando a partição $\partial\Omega = \Gamma = \Gamma_{D_i} \cup \Gamma_{N_i}$ sendo que $\Gamma_{D_i} \cap \Gamma_{N_i} = \emptyset$, as condições de contorno são dadas por:

$$u_i = \bar{u}_i \text{ em } \Gamma_{D_i} \times I, \quad \sigma_{ij} n_j = \bar{p}_i \text{ em } \Gamma_{N_i} \times I \quad (2)$$

onde $\bar{u}_i : \Gamma_{D_i} \times I \rightarrow \mathbb{R}$ são deslocamentos prescritos, $\bar{p}_i : \Gamma_{N_i} \times I \rightarrow \mathbb{R}$ são forças de superfície e n_j é o vetor normal. Ainda, as condições iniciais são dadas por:

$$u_i = u_{0i} \text{ em } \Omega \text{ quando } t = 0, \quad \dot{u}_i = v_{0i} \text{ em } \Omega \text{ quando } t = 0 \quad (3)$$

A fim de completar devidamente o problema, são dadas as relações constitutivas, que para o caso da elasticidade linear é $\sigma_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl}$, onde C_{ijkl} e ϵ_{ij} são respectivamente, os tensores de *elasticidade* e de *deformação infinitesimal*, este último por definição é a parte simétrica do gradiente de deslocamento, viz., $\epsilon_{ij} = \frac{u_{i,j} + u_{j,i}}{2}$, resultando na seguinte relação

$$\sigma_{ij,j} = (C_{ijkl} u_{k,l})_{,j} \quad (4)$$

2.2 Expressão integral do método da aproximação Explícita de Green

No método ExGA, a solução para o campo de deslocamentos é calculado utilizando as funções de Green do problema, as quais são consideradas como as funções teste para se aplicar às equações governantes num sentido de ponderação integral, desta forma torna-se importante definir as características das funções de Green utilizadas.

Como descrito na literatura (Stakgold, 1979; Wrobel, 2002; Beck et al., 1992), a função de Green pode ser interpretada como sendo o deslocamento na direção i de um ponto $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ (ponto campo) no tempo t , resultante da aplicação de uma fonte pontual instantânea na direção n numa determinada posição $\mathbf{y}$ (ponto fonte) e em um certo instante de tempo τ , i.e., matematicamente representado por $f_{in}(\mathbf{x}, t) = \delta_{in} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \delta(t - \tau)$, onde δ_{in} é o operador delta de Kronecker, e $\delta(\cdot)$ representa a função generalizada delta de Dirac.

Ainda, uma questão crucial para se inicializar uma metodologia baseada em funções de Green corresponde à escolha da função de Green para o problema, e.g., funções de Green de meio infinito, semi-infinito, etc. No método ExGA, considera-se a função de Green no mesmo domínio fechado $\bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$ e com as mesmas propriedades físicas do problema original a ser resolvido, mas com condições de contorno homogêneas:

$$\begin{aligned} \rho \ddot{G}_{in} - (C_{ijkl} G_{kn,l})_{,j} &= \delta_{in} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \delta(t - \tau) \text{ em } \Omega, t > \tau \\ G_{in} &= 0 \text{ em } \Gamma_{D_i}, t > \tau \\ C_{ijkl} G_{kn,l} n_j &= 0 \text{ em } \Gamma_{N_i}, t > \tau \end{aligned} \quad (5)$$

Além da função de Green será utilizado também uma função denominada Degrau (Clough e Penzien, 1993; Paz, 1997; Fung, 1997) a qual pode ser interpretada como a derivada a função

de Green no tempo, i.e., $H_{in}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t - \tau) = \dot{G}_{in}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t - \tau)$, desta forma, a partir da Eq. 5 obtém-se:

$$\begin{aligned} \rho \ddot{H}_{in} - (C_{ijkl} H_{kn,l})_{,j} &= \delta_{in} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \dot{\delta}(t - \tau) \text{ em } \Omega, t > \tau \\ H_{in} &= 0 \text{ em } \Gamma_{D_i}, t > \tau \\ C_{ijkl} H_{kn,l} n_j &= 0 \text{ em } \Gamma_{N_i}, t > \tau \end{aligned} \quad (6)$$

Vale ressaltar que obter a função Degrau através da resolução da Eq. 6 ou derivando diretamente a função de Green no tempo dá a mesma expressão de um ponto de vista analítico, entretanto, calcular numericamente a função Degrau a partir da Eq. 6 pode gerar resultados diferentes, dando a possibilidade de obter resultados com maior precisão (Loureiro, 2007).

Havendo escolhido a função de Green, utiliza-se a decomposição $u_i = \tilde{u}_i + \hat{u}_i$ onde $\hat{u}_i = \bar{u}_i$ em Γ_{D_i} , de forma a satisfazer a condição de contorno de Dirichlet de forma exata e evitar o cálculo da derivada da função de Green no contorno Γ_{D_i} (procedimento similar ao utilizado no MEF) (Loureiro, 2011), assim obtém-se um novo sistema resultante das Eqs. (1-4):

$$(C_{ijkl} \tilde{u}_{k,l})_{,j} + f_i + \psi_i = \rho \ddot{\tilde{u}}_i \text{ em } \Omega \times I \quad (7)$$

$$\tilde{u}_i(\mathbf{x}, 0) = u_{0i}(\mathbf{x}) - \hat{u}_i(\mathbf{x}, 0) \text{ em } \Omega, t = 0 \quad (8)$$

$$\dot{\tilde{u}}_i(\mathbf{x}, 0) = v_{0i}(\mathbf{x}) - \dot{\hat{u}}_i(\mathbf{x}, 0) \text{ em } \Omega, t = 0 \quad (9)$$

$$\tilde{u}_i = 0 \text{ em } \Gamma_{D_i} \times I, \quad C_{ijkl} (\tilde{u}_{k,l} + \hat{u}_{k,l}) n_j = \bar{t}_i \text{ em } \Gamma_{N_i} \times I \quad (10)$$

onde $\psi_i = (C_{ijkl} \hat{u}_{k,l})_{,j} - \rho \ddot{\hat{u}}_i$, pode ser interpretado como sendo uma nova fonte responsável pela introdução da condição de Dirichlet não nula na solução do problema.

Aplicando o método dos resíduos ponderados simultaneamente no domínio espaço tempo, ou seja, em Ω e em um intervalo de tempo qualquer $(t_0, t^+]$ e adotando a função de Green solução da Eq. 5 como função teste, a seguinte sentença integral é obtida:

$$\int_{t_0}^{t^+} \int_{\Omega} G_{in}(t - \tau) [(C_{ijkl} \tilde{u}_{k,l})_{,j} + f_i + \psi_i - \rho \ddot{\tilde{u}}_i] d\Omega d\tau = 0 \quad (11)$$

onde $t^+ = t + \epsilon$ (sendo ϵ um número positivo arbitrariamente pequeno) é utilizado para evitar que o limite superior da integral coincida com o pico da função delta de Dirac.

De maneira similar à formulação semi-discreta do MEF, no método ExGA o domínio do problema Ω é particionado em n_{el} domínios de elementos Ω_e não sobrepostos i.e., $\bar{\Omega} = \bar{\Omega}^h = \bigcup_{e=1}^{n_{el}} \bar{\Omega}_e$ e $\Omega_e \cap \Omega_{e'} = \emptyset$, onde se aproximam os campos desconhecidos (deslocamentos e funções de Green). Após a realização de alguns passos e levando em consideração as condições de contorno homogêneas da função de Green, Eq. 5, e a partição do tempo de análise I em N intervalos de tempo iguais, i.e., $[0, T] = \bigcup_{k=0}^{N-1} [t_k, t_{k+1}]$ onde, $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = t_f$, $\Delta t = t_{k+1} - t_k = t_f/N$ e $t_{k+1} = (k+1)\Delta t$, obtém-se a expressão do método ExGA (Loureiro, 2011; Loureiro, Silva e Mansur, 2015):

$$\begin{aligned} \mathbf{U}^{k+1} &= \mathbf{H}(\Delta t) \mathbf{M} \mathbf{U}^k + \mathbf{G}(\Delta t) \mathbf{M} \dot{\mathbf{U}}^k + \int_0^{\Delta t} \mathbf{G}(\Delta t - \tau) \mathbf{F}(t_k + \tau) d\tau \\ \dot{\mathbf{U}}^{k+1} &= \dot{\mathbf{H}}(\Delta t) \mathbf{M} \mathbf{U}^k + \dot{\mathbf{G}}(\Delta t) \mathbf{M} \dot{\mathbf{U}}^k + \int_0^{\Delta t} \dot{\mathbf{G}}(\Delta t - \tau) \mathbf{F}(t_k + \tau) d\tau \end{aligned} \quad (12)$$

onde $\mathbf{G} : t > t_0 \rightarrow \mathbb{R}^{nq \times nq}$ e $\mathbf{H} : t > t_0 \rightarrow \mathbb{R}^{nq \times nq}$ são as matrizes de Green e Degrau que armazenam seus valores nodais respectivamente, $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{nq \times nq}$ e $\mathbf{F} : (t_0, t_f) \rightarrow \mathbb{R}^{nq}$ são respectivamente, a matriz de massa padrão do MEF e o vetor de forças nodais (Bathe, 1996; Hughes, 2000), $\mathbf{U} : I \rightarrow \mathbb{R}^{nq}$ o vetor de deslocamentos nodais e nq o número total de equações ou graus de liberdade não nulos. Ainda, as integrais de convolução serão aproximadas pela regra do Trapézio (Loureiro, 2007; Mansur et al., 2007):

$$\int_0^{\Delta t} \mathbf{A}(\Delta t - \tau) \mathbf{F}(t_k + \tau) d\tau \approx [\mathbf{A}(0) \mathbf{F}^{k+1} + \mathbf{A}(\Delta t) \mathbf{F}^k] \frac{\Delta t}{2} \quad (13)$$

onde a matriz $\mathbf{A}$ pode ser $\mathbf{G}$ ou $\dot{\mathbf{G}}$ de acordo com a Eq. 12

Como dito anteriormente, ao utilizar a matriz Degrau na Eq. 12 se elimina a segunda derivada da matriz de Green com relação ao tempo (primeiro termo do lado direito da segunda equação) a qual poderia ser uma fonte de erros quando seu calculo é realizado numericamente como descrito por Loureiro (2007).

A equação do método ExGA apresentada anteriormente pode ser também interpretado a partir da equação integral utilizada no método dos elementos de contorno (formulação espaço-tempo). Entretanto, uma das principais diferenças com relação ao MEC reside justamente na adoção das condições de contorno homogêneas Eq. 5 para a função de Green. A solução para problemas elastodinâmicos em meios elásticos lineares pode ser descrita pela seguinte equação integral (Mansur, 1983):

$$\begin{aligned} u_n(\xi, t) = & \int_0^{t^+} \int_{\Gamma} u_{in}^*(\mathbf{x}, t; \xi, \tau) p_i(\mathbf{x}, \tau) d\Gamma d\tau - \int_0^{t^+} \int_{\Gamma} p_{in}^*(\mathbf{x}, t; \xi, \tau) u_i(\mathbf{x}, \tau) d\Gamma d\tau \\ & + \int_0^{t^+} \int_{\Omega} u_{in}^*(\mathbf{x}, t; \xi, \tau) b_i(\mathbf{x}, \tau) d\Omega d\tau + \rho \int_{\Omega} [v_{0i}(\mathbf{x}) u_{in}^*(\mathbf{x}, t; \xi, 0) \\ & + u_{0i}(\mathbf{x}) \dot{u}_{in}^*(\mathbf{x}, t; \xi, 0)] d\Omega \end{aligned} \quad (14)$$

onde u_{in}^* e p_{in}^* são as funções de Green de meio infinito (soluções fundamentais), a aplicação das condições de contorno homogêneas para a função de Green (agora para um meio finito do problema a ser resolvido) ocasionaria que as integrais de contorno da equação acima não sejam realizadas em todo o contorno, somente nas partes onde os valores prescritos são conhecidos, resultando numa expressão mais simples de ser resolvido sendo a dificuldade transferida para a obtenção das funções de Green que satisfazem as condições homogêneas do problema em questão.

3 FUNÇÕES DE GREEN LOCAIS

Nesta seção o conceito de função de Green local em duas dimensões (i.e., $d = 2$) é introduzido tendo em vista o princípio da causalidade a fim de reduzir o custo computacional na obtenção das funções de Green e Degrau. Além disso, para mostrar a flexibilidade dada pela formulação proposta, as funções de Green e Degrau serão calculadas independentemente pelo MEF no espaço e o esquema de Diferença central no tempo.

3.1 Princípio da Causalidade (sistema contínuo)

Tendo em mente que as funções de Green serão calculadas somente em $t = \Delta t$ de acordo com a Eq. 12 e motivado pelo princípio da causalidade, entende-se que a função de Green possui suporte compacto, i.e., seus valores serão não nulos somente numa pequena região ao redor do ponto fonte considerando um passo de tempo suficientemente pequeno (Loureiro, 2011; Loureiro, Silva e Mansur, 2015). De fato, ao se considerar um sistema contínuo, o princípio da causalidade afirma que o efeito de um impulso no tempo τ localizado em $\mathbf{y}$, dado em qualquer direção, não gera nenhuma influência para pontos $\mathbf{x}$ tais que $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| > c_d(t - \tau)$, i.e., a onda gerada pela fonte pontual instantânea não teve tempo suficiente de alcançar pontos fora da região $c_d(t - \tau)$. No caso elástico é utilizada a velocidade da onda-P (c_d) uma vez que seu valor é maior que o da onda-S (c_s), resultando na maior região possível. Assim, considerando $\tau = 0$ e $t = \Delta t$ pode-se definir o seguinte limitante superior do subdomínio local para a função de Green dada uma fonte pontual em $\mathbf{y}$ (ver Fig. 1 para uma descrição destes subdomínios locais)

$$\Omega_s = \{\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^d : \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \leq c_d \Delta t\} \subset \Omega \quad (15)$$

A fim de ilustrar este fato, considerando, por exemplo, que o subdomínio local tem propriedades de material homogêneas; e supondo que o subdomínio não intercepta o contorno original Γ do problema em consideração, a função de Green resultante é a conhecida solução fundamental que tem a sua expressão analítica dada por (Mansur, 1983):

$$u_{in}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \bar{t}) = \frac{1}{2\pi\rho} \left\{ \frac{1}{c_d} H\left(\frac{c_d \bar{t}}{r} - 1\right) \left[\left(2\left(\frac{c_d \bar{t}}{r}\right)^2 - 1 \right) \frac{r_{,i} r_{,n}}{\sqrt{c_d^2 \bar{t}^2 - r^2}} - \frac{\delta_{in}}{r^2} \sqrt{c_d^2 \bar{t}^2 - r^2} \right] \right. \\ \left. + \frac{1}{c_s} H\left(\frac{c_s \bar{t}}{r} - 1\right) \left[- \left(2\left(\frac{c_s \bar{t}}{r}\right)^2 - 1 \right) \frac{r_{,i} r_{,n}}{\sqrt{c_s^2 \bar{t}^2 - r^2}} + \delta_{in} \frac{c_s^2 \bar{t}^2}{r^2} \frac{1}{\sqrt{c_s^2 \bar{t}^2 - r^2}} \right] \right\} \quad (16)$$

onde $\bar{t} = t - \tau$, $r = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ e $H(\cdot)$ é a função Heaviside generalizada, garantindo desta forma o princípio da causalidade discutido anteriormente.

3.2 Princípio da Causalidade (Sistema discreto)

Devido a que as soluções analíticas da Eq. 5, são difíceis ou até mesmo impossíveis de se obter para um meio geral com geometria qualquer, a função de Green junto com a função Degrau serão tratadas numericamente com a formulação semi-discreta do MEF. Assim, a fonte pontual instantânea correspondente ($\delta_{in} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \delta(t - \tau)$ para as funções de Green e $\delta_{in} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \dot{\delta}(t - \tau)$ para as funções Degrau) é substituída por condições iniciais equivalentes (ver, por exemplo, Loureiro (2011) para mais detalhes).

Além disso, como as funções de Green são calculadas localmente através dos subdomínios Ω_s , são impostas condições de contorno de Dirichlet homogêneas (i.e., $G_{in} = 0$) no contorno Γ_s do subdomínio somente se este não intercepta o contorno original; caso contrário, serão impostas as condições de contorno originais com valores nulos.

Deste ponto em diante, o contorno local do subdomínio pode ser dividido como $\partial\Omega_s = \Gamma_s = \tilde{\Gamma}_{D_i} \cup \tilde{\Gamma}_{N_i} \cup \Gamma_{sD_i}$ de forma que $\tilde{\Gamma}_{D_i} \cap \tilde{\Gamma}_{N_i} = \tilde{\Gamma}_{D_i} \cap \Gamma_{sD_i} = \tilde{\Gamma}_{N_i} \cap \Gamma_{sD_i} = \emptyset$ onde $\tilde{\Gamma}_{D_i} = \Gamma_{D_i} \cap \Gamma_s$ e $\tilde{\Gamma}_{N_i} = \Gamma_{N_i} \cap \Gamma_s$ com as condições de contorno de Dirichlet sendo utilizadas em Γ_{sD_i} ao invés da de Neumann, a fim de evitar movimento de corpo rígido no caso onde o subdomínio não tenha influência do contorno de Dirichlet original (ver Fig. 1).

Assim, pode-se definir o seguinte conjunto de equações no subdomínio local

$$\rho \ddot{w}_{in} - (C_{ijkl} w_{kn,l})_{,j} = 0 \text{ em } \Omega_s, t > \tau \quad (17)$$

$$w_{in} = 0 \text{ em } \tilde{\Gamma}_{D_i} \cup \Gamma_{sD_i}, t > 0 \quad (18)$$

$$C_{ijkl} w_{kn,l} n_j = 0 \text{ em } \tilde{\Gamma}_{N_i}, t > 0 \quad (19)$$

$$w_{in} = w_{0i} \text{ em } \Omega, t = 0 \quad (20)$$

$$\dot{w}_{in} = \tilde{w}_{0i} \text{ em } \Omega, t = 0 \quad (21)$$

onde $w_{in} : \Omega \times \Omega \times (0, t) \rightarrow \mathbb{R}$ representa as componentes da função de Green ou a função Degrau devido às condições iniciais equivalentes.

Para a função de Green, as condições iniciais são dadas por $w_{0i} = 0$ e $\dot{w}_{0i} = \frac{\delta_{in}}{\rho} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})$, enquanto que para a função Degrau, $w_{0i} = \frac{\delta_{in}}{\rho} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ e $\tilde{w}_{0i} = 0$. Fisicamente, a função de Green pode agora ser interpretada como a resposta do sistema devido a uma velocidade inicial aplicada na direção n , ao passo que a função Degrau é a resposta do sistema devido à aplicação de um deslocamento inicial.

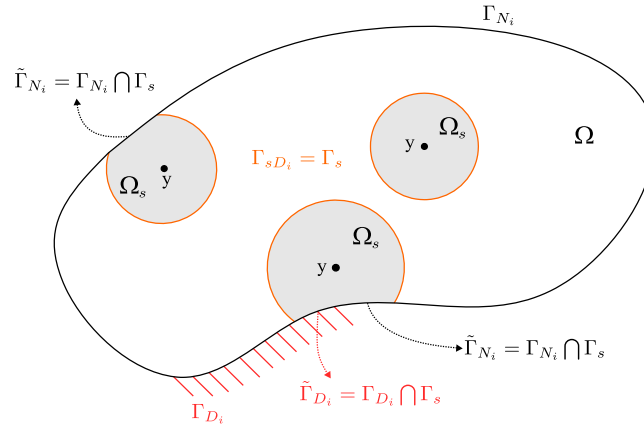


Figura 1: Representação dos subdomínios Ω_s

Aplicando a formulação semi-discreta do MEF às Eqs. 17-21 sobre o subdomínio local discreto $\bar{\Omega}_s^h = \Omega_s^h \cup \Gamma_s^h \subseteq \bar{\Omega}^h$ e considerando que os pontos fonte são dispostos em pontos nodais ($\mathbf{y} = \mathbf{y}_i$), as funções de Green ou Degrau discretas devido às condições iniciais na direção n de um dado ponto fonte nodal, em notação matricial se resume em encontrar $\mathbf{W}_j : t > 0 \rightarrow \mathbb{R}^{nq_s}$ tal que

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{W}}_j(t) + \mathbf{K} \mathbf{W}_j(t) = \mathbf{0}, t > 0 \quad (22)$$

$$\mathbf{M} \dot{\mathbf{W}}_j(0) = \mathbf{W}^0, t = 0 \quad (23)$$

$$\mathbf{M} \mathbf{W}_j(0) = \tilde{\mathbf{W}}^0, t = 0 \quad (24)$$

onde $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{nq_s \times nq_s}$ e $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{nq_s \times nq_s}$ são as matrizes de massa e de rigidez respectivamente, relativas ao subdomínio local discreto, sendo nq_s o número de equações associado a cada subdomínio local discreto $\bar{\Omega}_s^h$ com sua respectiva submalha.

Observe-se que $\mathbf{W}_j(t)$ denota o vetor de Green nodal se as condições iniciais forem dadas por $\mathbf{W}^0 = \mathbf{0}$ e $\tilde{\mathbf{W}}^0 = \mathbf{1}_j$ ou o vetor Degrau nodal se as condições iniciais forem dadas por $\mathbf{W}^0 = \mathbf{1}_j$ e $\tilde{\mathbf{W}}^0 = \mathbf{0}$ em que $\mathbf{1}_j \in \mathbb{R}^{nq_s}$ é o vetor unitário com as componentes definidas como $1_{ij} = \delta_{ij}$.

Efetivamente, o vetor $\mathbf{W}_j(t)$ representa somente os valores não-nulos de uma coluna da matriz de Green $\mathbf{G}(t)$ ou da matriz Degrau $\mathbf{H}(t)$ devido a uma condição inicial aplicada no grau de liberdade j , lembrando que os valores nodais fora do subdomínio local discreto (i.e., $\bar{\Omega}^h \setminus \bar{\Omega}_s^h$) são nulos devido ao princípio da causalidade.

Neste método aplica-se o esquema de Diferença Central para calcular as funções de Green e Degrau, que só precisam ser calculadas de $t = 0$ a $t = \Delta t$ (Eq. 12). Aqui no entanto será utilizado um esquema de sub-passo unicamente no cálculo da função de Green, a fim de obter um método de marcha no tempo de segunda ordem, como segue:

- A função de Green é calculada de $t = 0$ a $t = \Delta t/2$ e depois de $t = \Delta t/2$ a $t = \Delta t$
- A função Degrau é calculada de $t = 0$ a $t = \Delta t$

de maneira sucinta, um passo-a-passo do método pode ser visto na Tabela 1.

Tabela 1: Passo a passo do cálculo das matrizes de Green e Degrau

Para todos os nq graus de liberdade não nulos faça:

A. Cálculos iniciais:

1. Defina a submalha $\bar{\Omega}_s^h$ ao redor da fonte pontual nodal associada ao grau de liberdade j
2. Forme as matrizes locais de massa diagonal $\mathbf{M}$ e de rigidez $\mathbf{K}$
3. Defina as condições iniciais $\mathbf{W}_j(0) = \mathbf{W}_j^0 = \mathbf{0}$ e $\dot{\mathbf{W}}_j(0) = \dot{\mathbf{W}}_j^0 = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{1}_j$ para o vetor nodal de Green ou $\mathbf{W}_j(0) = \mathbf{W}_j^0 = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{1}_j$ e $\dot{\mathbf{W}}_j(0) = \dot{\mathbf{W}}_j^0 = \mathbf{0}$ para o vetor nodal Degrau

B. Para um passo de tempo $t = \Delta t$:

1. Aplique o esquema Diferença Central padrão pra calcular o vetor nodal Degrau e utilize dois sub-passos para o vetor nodal de Green
2. Insira os valores não nulos dos vetores $\mathbf{W}_j \equiv \mathbf{W}_j(\Delta t)$ e $\dot{\mathbf{W}}_j = \dot{\mathbf{W}}_j(\Delta t)$ na coluna j da matriz de Green (ou Degrau) e de sua derivada, respectivamente

3.3 Propriedades da função de Green e implementação computacional

Como descrito na seção anterior, as funções de Green e Degrau podem ser calculadas somente numa pequena região ao redor de cada ponto fonte nodal representada pelas submalhas para formar as matrizes $\mathbf{G}(\Delta t)$, $\dot{\mathbf{G}}(\Delta t)$, $\mathbf{H}(\Delta t)$ e $\dot{\mathbf{H}}(\Delta t)$. De fato, para um passo de tempo suficientemente pequeno, o número de equações de uma submalha do subdomínio discreto $\bar{\Omega}_s^h$ é muito menor que o número de equações de toda a malha, implicando que $nq_s \ll nq$ especialmente para malhas refinadas.

No contexto computacional, pode-se ter vantagens da *relação de reciprocidade* que pode ser usada para mostrar que as matrizes de Green e Degrau, assim como suas derivadas temporais, são simétricas, como visto nas Figs. 2 e 3, sendo assim, somente os coeficientes da parte superior ou inferior da matriz precisam ser calculadas, reduzindo pela metade o custo computacional. Além disso, os cálculos das funções de Green e Degrau são interdependentes uns dos outros assim como suas submalhas. Portanto, o armazenamento de memória e o tempo de processamento para a obtenção destas funções são consideravelmente reduzidos. É importante ressaltar que devido ao processo de semi-discretização, o princípio da causalidade não é

totalmente satisfeito (Graff, 1991) resultando num subdomínio discreto maior comparado ao subdomínio real obtido pelo princípio da causalidade.

Para analisar melhor o tamanho dos subdomínios discretos, serão feitos testes num modelo onde é considerado, num estado plano de deformação, um sólido homogêneo elástico linear de dimensões $1\text{m} \times 1\text{m}$ que possui as velocidades $c_s \approx 5,83 \text{ m/s}$ e $c_d \approx 9,53 \text{ m/s}$, $\rho = 2200 \text{ kg/m}^3$, $\nu = 0,2$ e $E = 1,8 \times 10^5 \text{ N/m}^2$, no qual é aplicada uma condição inicial no ponto nodal do centro em ambas as direções, uma por vez. Para este modelo considerou-se que todo o contorno será livre, tendo um total de 64 elementos regulares de tamanho $l_e = 0,125 \text{ m}$, e um $\Delta t = 1,0 \times 10^{-2} \text{ s}$ sendo igual ao tempo final, pois será feito o cálculo dos vetores nodais somente num passo de tempo. Para este problema $c_d \Delta t = 0,0953 \text{ m} < l_e$, resultando num subdomínio discreto maior que o contínuo.

Na figura 2 é possível observar as funções de Green numéricas e suas derivadas temporais respectivamente à direção aplicada no ponto fonte nodal.

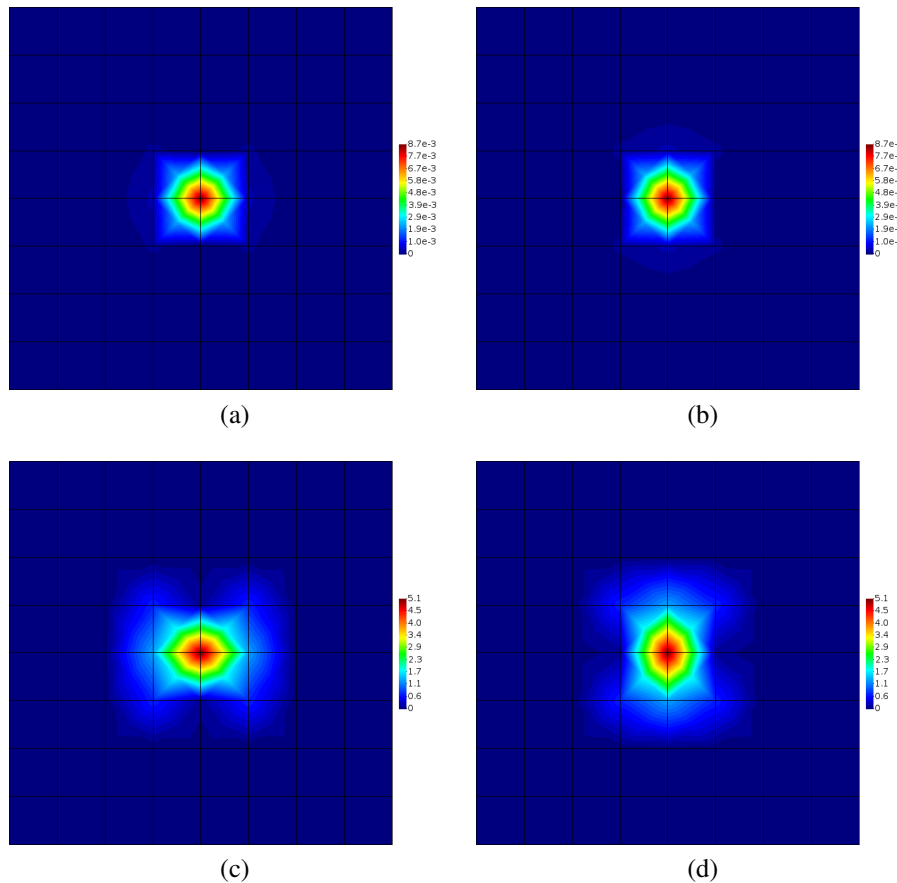


Figura 2: Função de Green numérica e sua derivada temporal para um dado ponto fonte nodal: (a) $\|G_1^h(\mathbf{x}, \mathbf{y}_i, \Delta t)\|$; (b) $\|G_2^h(\mathbf{x}, \mathbf{y}_i, \Delta t)\|$; (c) $\|\dot{G}_1^h(\mathbf{x}, \mathbf{y}_i, \Delta t)\|$; (d) $\|\dot{G}_2^h(\mathbf{x}, \mathbf{y}_i, \Delta t)\|$.

As funções de Green numéricas obtidas através do sub-passo se mostraram mais ricas quando comparadas às obtidas em trabalhos anteriores dos próprios autores (Loureiro, Silva e Mansur, 2015), mostrando assim.

Como é possível ver na Fig. 3, a derivada temporal da função Degrau numérica $\dot{H}^h(\Delta t)$ é quem possui um maior subdomínio.

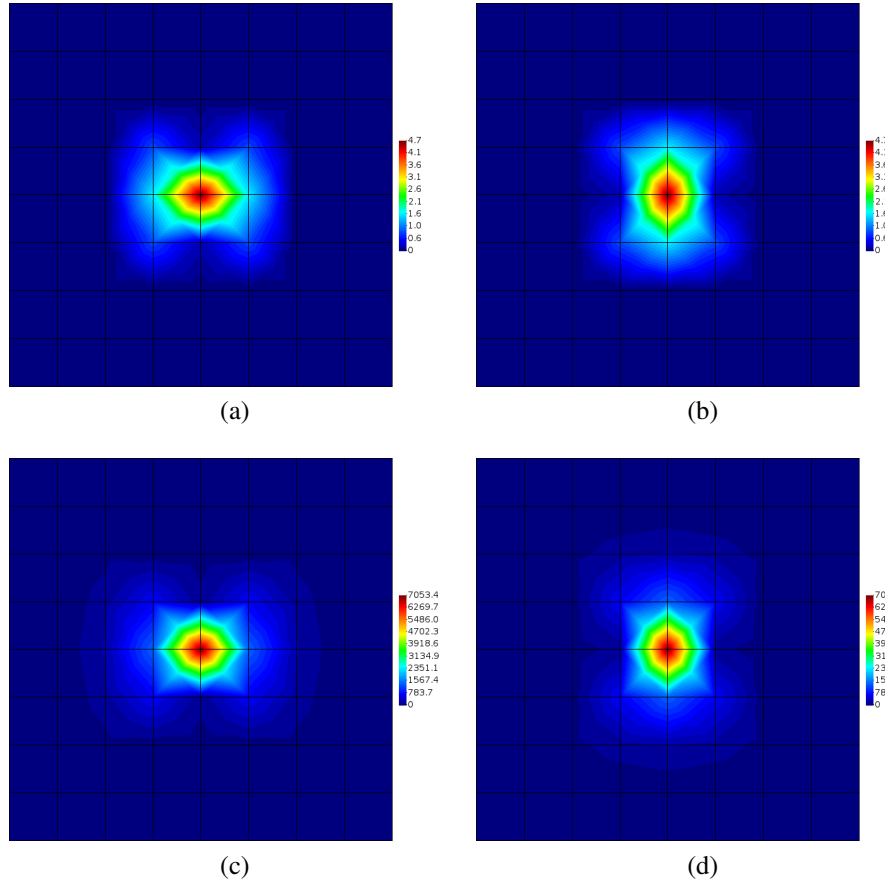


Figura 3: Função Degrau numérica e sua derivada temporal para um dado ponto fonte nodal: (a) $\|\mathbf{H}_1^h(\mathbf{x}, \mathbf{y}_i, \Delta t)\|$; (b) $\|\mathbf{H}_2^h(\mathbf{x}, \mathbf{y}_i, \Delta t)\|$; (c) $\|\dot{\mathbf{H}}_1^h(\mathbf{x}, \mathbf{y}_i, \Delta t)\|$; (d) $\|\dot{\mathbf{H}}_2^h(\mathbf{x}, \mathbf{y}_i, \Delta t)\|$.

Ainda, em algumas simulações práticas, é comum utilizar materiais homogêneos por partes e regulares em pelo menos alguma parte de toda a malha, o que também é vantajoso para o método, uma vez que pode-se utilizar unicamente a quarta parte da submalha para o cálculo das matrizes, reduzindo ainda mais o custo computacional.

4 EXEMPLO NUMÉRICO

Nesta seção, é considerado o modelo de um sólido bi-dimensional homogêneo no estado plano de deformações, sob o efeito de uma fonte triangular de período dominante $T_f = 0,2$ s aplicada no canto superior esquerdo do domínio. O modelo de elementos finitos pode ser visto na figura 4 e as constantes do material na tabela 2. O tamanho do elemento da malha é $l_e = 2.5$ m e o intervalo de tempo utilizado $\Delta t = 5.5 \times 10^{-3}$ s.

Note que este modelo, possui as características necessárias para utilizar as propriedades de simetria das matrizes de Green e Degrau (assim como suas respectivas derivadas) e a redução do subdomínio, vistas na seção anterior e assim diminuir consideravelmente o custo computacional.

Os resultados dos deslocamentos e velocidades verticais no ponto $\mathbf{A} = (40; 0)$ estão apresentados, respectivamente, na Fig. 5a and Fig. 5b, considerando os métodos ExGA e Diferença

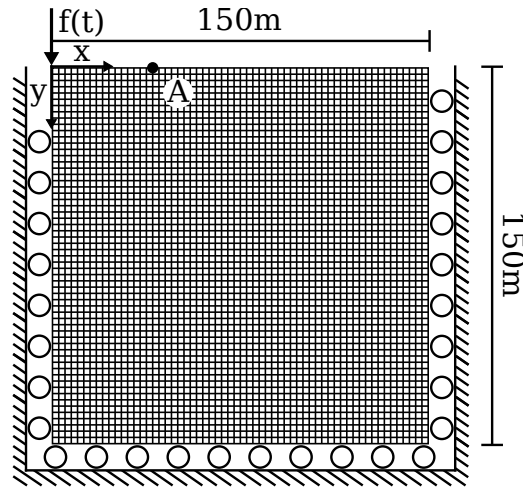


Figura 4: Modelo de elementos finitos.

Tabela 2: Propriedades físicas do material.

ν	$\rho(\text{kg/m}^3)$	$E(\text{N/m}^2)$	$c_d(\text{m/s})$	$c_s(\text{m/s})$	$c_r(\text{m/s})$
0.25	2000	2.5×10^8	388	224	205.54

central padrão (DC), o último foi escolhido para comparação por ser um método explícito clássico de marcha no tempo. As tensões σ_y no ponto de integração de Gauss B = (41, 25; 1, 125), perto do ponto A, são calculados, e os resultados apresentados na Fig. 5c.

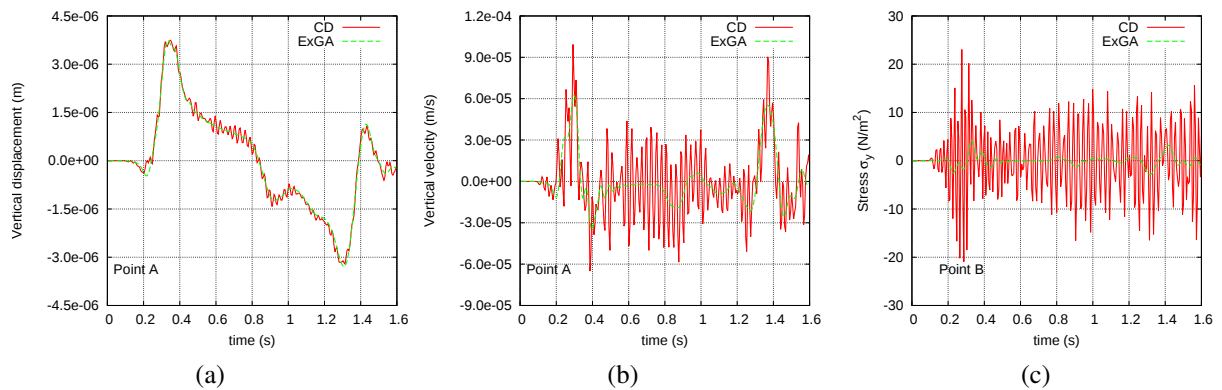


Figura 5: Comparação dos resultados numéricos: (a) Deslocamento vertical no ponto A; (b) Velocidade vertical no ponto A; (c) tensão σ_y no ponto de integração B.

Analisando as figuras anteriores, pode se observar a presença de elevadas oscilações espúrias na curva correspondente aos resultados obtidos pelo método DC, o que muitas vezes pode levar a interpretações incorretas.

Por outro lado, os resultados obtidos pelo método ExGA não apresentam oscilações, indicando que foram obtidos resultados precisos e confiáveis. Esta capacidade de filtrar oscilações espúrias é obtida devido ao *amortecimento numérico* presente no método.

Na figura 6 o raio espectral dos métodos ExGA e DC é apresentado, um método é dito

estável se para um Δt dado o raio espectral é menor ou igual a um (Bathe, 1996), assim, é possível ver que o método ExGA assim como o DC possuem um limite para o tamanho do Δt utilizado, este limitante é conhecido como Δt crítico, e ambos os métodos apresentam Δt críticos similares. Ainda, o amortecimento numérico pode ser visto quando o raio espectral é menor que um. É importante notar que apesar do amortecimento numérico ser um esquema não-conservativo, este poderá ser útil na solução de alguns problemas práticos na dissipação de frequências mais elevadas imprecisas, conforme apresentado no exemplo.

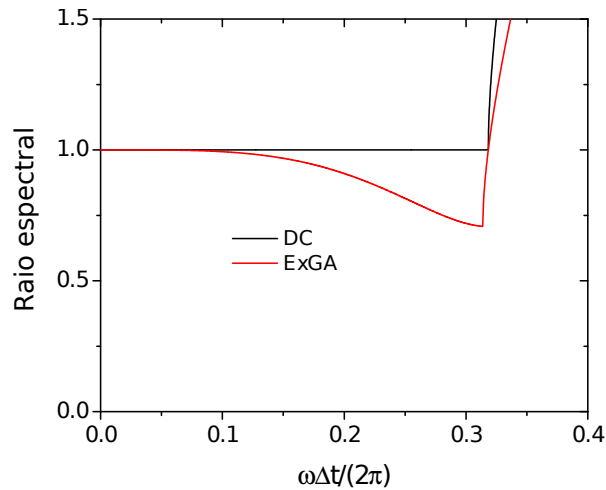


Figura 6: Raio espectral dos métodos ExGA e Diferença Central padrão.

A fim de visualizar melhor o problema resultante das oscilações espúrias e as vantagens da sua dissipação, na Fig. 7 são apresentadas snapshots da tensão de Von-Mises para o método DC e ExGA.

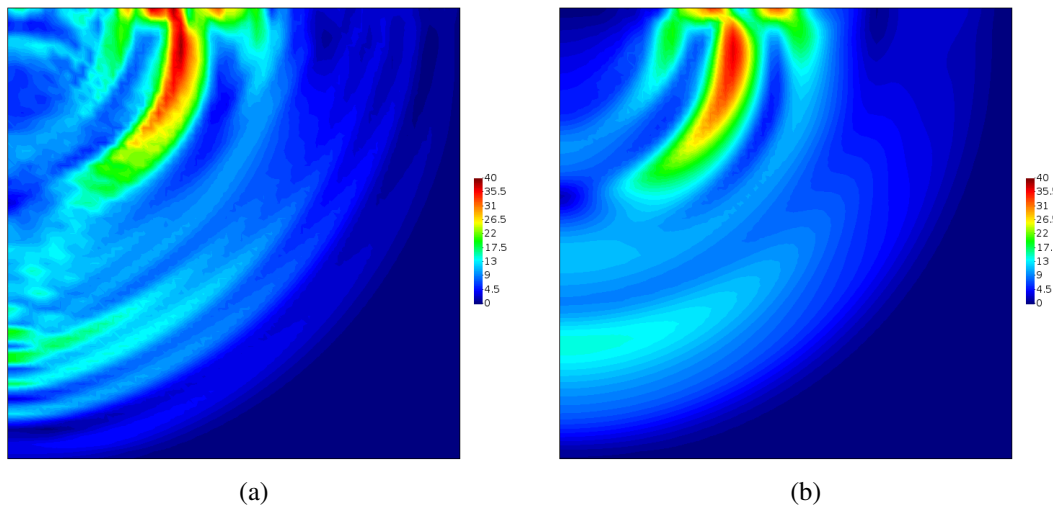


Figura 7: Snapshots da tensão de Von-Mises em $t = 0,385$ s: (a) Método DC; (b) Método ExGA.

Nos resultados obtidos pelo método DC pode-se observar claramente oscilações as quais não estão presentes nos resultados obtidos pelo método ExGA pois foram filtradas através do amortecimento numérico, resultando numa solução mais precisa.

5 CONCLUSÕES

Neste trabalho, foi apresentado o conceito por trás do método da Aproximação Explícita de Green (ou ExGA nas suas siglas em inglês), no qual as funções de Green e Degrau são calculadas numericamente, para problemas em elastodinâmica e foi proposta também uma melhoria para o método. A ideia de utilizar sub-passos no tempo para calcular somente as funções de Green no método ExGA resultou num esquema de marcha no tempo preciso. Uma das suas propriedades é o amortecimento numérico responsável por filtrar as oscilações espúrias que podem aparecer em algumas simulações. É importante ressaltar que o sub-passo no tempo é aplicado uma única vez em $t = \Delta t$ e que mas as funções de Green e Degrau são calculadas localmente a causa do princípio da causalidade, o que resulta em um baixo custo computacional. O exemplo numérico que foi analisado confirma a robustez e precisão do método ExGA proposto.

AGRADECIMENTOS

Se agradece ao CNPq, UFJF e FAPEMIG pelo apoio financeiro.

REFERÊNCIAS

- Achenbach, J., 1984. *Wave Propagation in Elastic Solids*. Elsevier Science.
- Aliabadi, H., Wen, P. H., 2011. *Boundary Element Methods in Engineering and Sciences*. Imperial College Press.
- Bathe, K. J., 1996. *Finite element procedures*. Prentice-Hall.
- Beck, J. V., et al., 1992. *Heat Conduction using Green's Functions*. Hemisphere Publishing Corporation.
- Brebbia, C. A., Wrobel, L. C., 1992. *Boundary Element Methods in Heat Transfer*. Springer Netherlands.
- Clough, R. W., Penzien, J., 1993. *Dynamics of Structures*. McGraw-Hill.
- Dominguez, J., 1993. *Boundary Elements in Dynamics*. Computational Mechanics Publications.
- Fung, T. C., 1997. A precise time-step integration method by step-response and impulsive-response matrices for dynamic problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 40, pp. 4501–4527.
- Graff, K. F., 1991. *Wave motion in elastic solid*. Dover Publications.
- Hughes, T. J. R., 2000. *The finite element method: linear static and dynamic finite element analysis*. Dover Publications.
- Loureiro, F. S., 2007. *Métodos de integração temporal baseados no cálculo numérico de funções de Green através do método dos elementos finitos*. Master thesis, COPPE/UFRJ/Rio de Janeiro.
- Loureiro, F. S., 2011. *Generalização do Método da Aproximação Explícita de Green para a solução de Equações parabólicas e hiperbólicas*. PhD thesis, COPPE/UFRJ/Rio de Janeiro.

Loureiro, F. S., Silva, J. E. A., Mansur, W. J., 2015. An explicit time-stepping technique for elastic waves under concepts of Green's functions computed locally by the FEM . *Engineering Analysis with Boundary Elements*, vol. 50, pp. 381–394.

Mansur, W. J., 1983. *A Time-stepping Technique to solve wave propagation problems using the boundary element method*. PhD thesis, University of Southampton, England.

Mansur, W. J., et al., 2007. Explicit time-domain approaches based on numerical Green's functions computed by finite differences - the ExGA family. *Journal of Computation Physics*, vol. 227, pp. 851–870.

Paz, M., 1997. *Structural Dynamics – Theory and Computation*. Chapman and Hall.

Stakgold, I., 1979. *Green's Functions and Boundary Value Problems*. John Wiley & Sons.

Wrobel, L. C. , 2002. *The boundary element method: applications in thermo-fluids and acoustics*. John Wiley & Sons.