



CONSIDERAÇÃO DE FIBRAS NA ANÁLISE NÃO LINEAR FÍSICA DE PLACAS LAMINADAS REFORÇADAS DESENVOLVENDO GRANDES DESLOCAMENTOS

Maria S. M. Sampaio

ssampaio@sc.usp.br

Rodrigo R. Paccola

rpaccola@sc.usp.br

Humberto B. Coda

hbcoda@sc.usp.br

Escola de Engenharia de São Carlos/Universidade de São Paulo

Avenida Trabalhador São Carlense, 400, 13566-590, São Paulo, São Carlos, Brasil

Abstract. Short fibers are randomly spread in an elastoplastic laminated matrix. Triangular laminated plate finite elements with ten nodes and seven degrees of freedom per node are used to discretize the laminated matrix. The elastoplastic constitutive model adopted to simulate the nonlinear physical behavior of the matrix follows a multi-linear non associative flow rule and a general failure surface is respected to consider orthotropic material. Any order one-dimensional finite elements with three degrees of freedom per node are used to discretize fibers and stiffeners. The geometrical nonlinear strategy is total Lagrangian and the Saint-Venant-Kirchhoff Constitutive Law is adopted to model the material. Kinematics relationships allow place the fibers nodes in any layer of the laminated medium without necessity of match fiber nodes with matrix nodes in the discretization of the problem. The Principle of Minimum Total Potential Energy and the Newton-Raphson iterative procedure are employed to solve the nonlinear equilibrium problem. The proposed numerical example shows the potential of the proposed formulation in the analysis of fiber-reinforced steel-concrete composite structures.

Keywords: Fiber-reinforced laminated plates, Geometrically nonlinear analysis, Physical nonlinear analysis, Finite Element Method

1 INTRODUÇÃO

Fibras curtas, também denominadas por armadura descontínua, são adicionadas ao concreto buscando-se, dentre diferentes finalidades, melhorar a resistência à tração (Abrishami, Mitchell, 1997; Fields, Bischoff, 2004; Fischer, Li, 2002; Noghabai, 2000) e reduzir e/ou controlar a fissuração (Balaguru, Shah, 1992).

Neste trabalho, fibras curtas, em diferentes proporções, são espalhadas aleatoriamente em uma matriz laminada elastoplástica. Os resultados obtidos para o caso particular de placa quadrada reforçada em duas direções solicitada por carregamento uniformemente distribuído são comparados qualitativamente com aqueles preditos pela teoria das charneiras plásticas (Johansen, 1961; Langendonck, 1970; Pinheiro, 1988; Sawczuk, Jaeger, 1963) e com a observação experimental (Chamecki, 1948). Para modelar a matriz, de concreto, elementos finitos de placa laminada com dez nós e sete graus de liberdade por nó totalizando setenta graus de liberdade por elemento são utilizados. Os parâmetros nodais, em posições, são as três translações, as três componentes de um vetor generalizado e a taxa de variação da deformação ao longo da espessura que evita o fenômeno do travamento volumétrico (Coda, Paccola, 2008; Coda et al., 2013). Somente a superfície de referência do elemento é discretizada e a consideração de um número qualquer de lâminas não aumenta o número de graus de liberdade do elemento. Para simular a plastificação da matriz, um modelo constitutivo elastoplástico multi-linear não associativo e uma superfície geral de ruína para a consideração de material ortotrópico são utilizados (Coda et al., 2015).

Os elementos finitos utilizados para discretizar as fibras e a armadura podem ser inseridos em qualquer posição da matriz ou das lâminas por meio de relações cinemáticas que asseguram a aderência fibra-matriz e não exigem a coincidência de nós na discretização do problema (Sampaio et al., 2013; Sampaio, 2014; Sampaio et al., 2015). A estratégia de introdução das fibras nas lâminas não aumenta o número de graus de liberdade do problema.

A formulação não linear geométrica é Lagrangeana total e a Lei Constitutiva de Saint-Venant-Kirchhoff que relaciona de forma linear o tensor de tensões de Piola-Kirchhoff de segunda espécie e o tensor de deformações de Green-Lagrange é utilizada para modelar tanto o material das fibras quanto o material da matriz. O equilíbrio é encontrado a partir do Princípio da Estacionariedade da Energia Potencial e o sistema não linear de equações é resolvido utilizando-se o procedimento iterativo de Newton-Raphson. Um exemplo numérico em que se consideram diferentes taxas de fibras é apresentado para demonstrar as potencialidades da formulação.

O artigo está organizado da seguinte forma: na Seção 2 descreve-se o elemento finito de placa laminada onde as fibras são incorporadas; na Seção 3, o modelo constitutivo adotado para simular a plastificação da matriz é apresentado; na Seção 4, a descrição cinemática, o vetor de forças internas e a matriz Hessiana do elemento finito de fibra utilizado para discretizar a armadura e as fibras descontínuas são apresentados; na Seção 5, o processo iterativo de Newton-Raphson utilizado na resolução do problema de equilíbrio não linear geométrico é descrito; na Seção 6, os resultados obtidos com a presente formulação são comparados qualitativamente com modelos de referência demonstrando as potencialidades da formulação proposta para a análise de meios reforçados com fibras e, por fim, as conclusões são apresentadas na Seção 7.

2 MODELAGEM DA MATRIZ LAMINADA

Para discretizar a matriz laminada são utilizados elementos finitos de casca laminada, triangulares, curvos, isoparamétricos, com dez nós e sete graus de liberdade por nó totalizando setenta graus de liberdade por elemento. Os parâmetros nodais, em posições, são as três translações, as três componentes de um vetor generalizado e a taxa de variação da deformação ao longo da espessura que evita o fenômeno do travamento volumétrico (Coda, Paccola, 2008; Coda et al., 2013). Somente a superfície de referência do elemento finito é discretizada e a consideração de um número qualquer de lâminas não aumenta o número de graus de liberdade do elemento. A Fig.1 mostra a cinemática utilizada para mapear o elemento finito de casca laminada da configuração inicial Ω^0 para a configuração atual Ω .

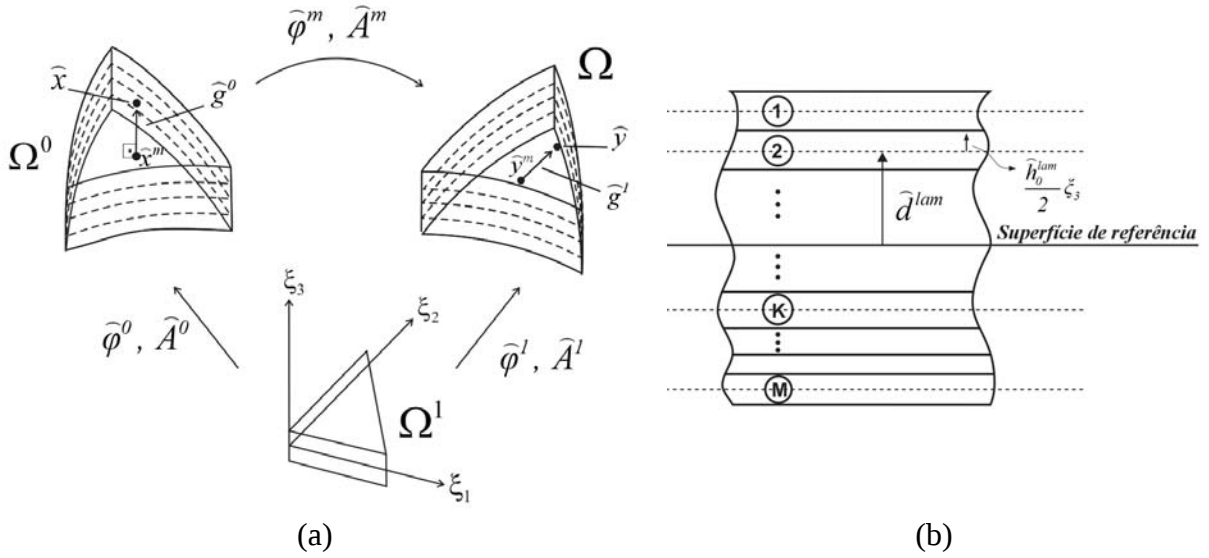


Figura 1. Mapeamento posicional do elemento finito de casca laminada

Além das grandezas indicadas na Fig. 1a, considera-se que o elemento finito é formado por m lâminas conforme mostrado na Fig. 1b, onde $\hat{d}^{lam}$ é a distância da superfície de referência do laminado até o centro de uma lâmina considerada segundo a direção $\hat{g}_i^0$ e $\hat{h}_0^{lam}$ a espessura desta lâmina, definidos na configuração inicial. A função $\hat{\varphi}_i^{0lam}$ que mapeia os pontos da configuração auxiliar Ω^1 para a configuração inicial Ω^0 e a função $\hat{\varphi}_i^{1lam}$ que mapeia os pontos da configuração auxiliar Ω^1 para a configuração corrente Ω podem ser escritas, respectivamente, como:

$$\hat{\varphi}_i^{0lam} = \hat{\phi}_l(\xi_1, \xi_2) \hat{X}_{li} + \left(\hat{d}^{lam} + \frac{\hat{h}_0^{lam}}{2} \xi_3 \right) \hat{\phi}_l(\xi_1, \xi_2) \hat{N}_{il}^0, \quad (1)$$

$$\hat{\varphi}_i^{1lam} = \hat{\phi}_l(\xi_1, \xi_2) \hat{Y}_{li} + \left[\left(\hat{d}^{lam} + \frac{\hat{h}_0^{lam}}{2} \xi_3 \right) + \hat{\phi}_l(\xi_1, \xi_2) \hat{a}_l \left(\hat{d}^{lam} + \frac{\hat{h}_0^{lam}}{2} \xi_3 \right)^2 \right] \hat{\phi}_k(\xi_1, \xi_2) \hat{G}_{ik}, \quad (2)$$

onde $\hat{\phi}_l(\xi_1, \xi_2) \hat{X}_{li} = \hat{x}_i^m$ e $\hat{\phi}_l(\xi_1, \xi_2) \hat{Y}_{li} = \hat{y}_i^m$ são, respectivamente, pontos na superfície de referência da casca na configuração inicial e corrente, e

$$\hat{g}_i^0 = \left(\hat{d}^{lam} + \frac{\hat{h}_0^{lam}}{2} \xi_3 \right) \hat{\phi}_l(\xi_1, \xi_2) \hat{N}_{il}^0, \quad (3)$$

$$\hat{g}_i^1 = \left[\left(\hat{d}^{lam} + \frac{\hat{h}_0^{lam}}{2} \xi_3 \right) + \hat{\phi}_l(\xi_1, \xi_2) \hat{a}_l \left(\hat{d}^{lam} + \frac{\hat{h}_0^{lam}}{2} \xi_3 \right)^2 \right] \hat{\phi}_k(\xi_1, \xi_2) \hat{G}_{ik}, \quad (4)$$

são vetores generalizados nas configurações inicial e corrente, respectivamente.

Nas Eqs. (1)-(4), $\hat{\phi}_l(\xi_1, \xi_2)$ são funções de forma avaliadas nas coordenadas adimensionais ξ_i ; $\hat{X}_{li}$ e $\hat{Y}_{li}$ são as coordenadas dos nós l nas configurações inicial e corrente, respectivamente; $\hat{N}_{il}^0$ e $\hat{G}_{ik}$ são valores nodais dos vetores generalizados nas configurações inicial e corrente, respectivamente; e $\hat{a}_l$ são valores nodais da taxa de variação linear da espessura que evita o travamento volumétrico e por cisalhamento usuais em formulações de casca homogênea e casca laminada (Coda et al., 2013; Coda, Paccola, 2008).

As funções $\hat{\phi}_i^{0lam}$ e $\hat{\phi}_i^{1lam}$ são utilizadas para encontrar seus respectivos gradientes $\hat{A}_{ij}^{0lam}$ e $\hat{A}_{ij}^{1lam}$ e a composição destes dois valores para cada ponto de integração fornece o valor numérico do gradiente da função mudança de configuração $\hat{A}^{lam}$ de Ω^0 para Ω , ou seja:

$$\hat{A}_{ij}^{0lam} = \frac{\partial \hat{\phi}_i^{0lam}}{\partial \xi_j}, \quad \hat{A}_{ij}^{1lam} = \frac{\partial \hat{\phi}_i^{1lam}}{\partial \xi_j}, \quad \hat{A}^{lam} = \hat{A}^{1lam} \cdot (\hat{A}^{0lam})^{-1}. \quad (5)$$

3 MODELO CONSTITUTIVO ELASTOPLÁSTICO PARA A MATRIZ

As equações constitutivas são fundamentais na modelagem matemática de qualquer problema estrutural, pois estabelecem relação entre as tensões internas e as deformações desenvolvidas pelo material. Em análises elásticas, essas equações são lineares e a Lei de Hooke é utilizada. Em análises inelásticas, a relação tensão-deformação é não-linear e variáveis internas adicionais devem ser consideradas na construção do modelo matemático.

Para descrever o modelo constitutivo elastoplástico utilizado neste trabalho são necessários: i) uma decomposição aditiva para o tensor das deformações totais; ii) uma lei de elasticidade; iii) um critério de plastificação; iv) uma lei de evolução do tensor das deformações plásticas; v) uma lei de evolução do vetor de endurecimento e; vi) condições de complementaridade e consistência.

Em regime elastoplástico a deformação total é composta por uma parcela elástica e outra plástica. Neste trabalho, consideram-se pequenas deformações associadas a materiais usuais de engenharia, como por exemplo, aço e concreto. Para tanto, adota-se a medida de deformação de Green e a decomposição aditiva da deformação é escrita como:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^e + \mathbf{E}^p, \quad (6)$$

onde $\mathbf{E}^e$ e $\mathbf{E}^p$ são as partes elástica e plástica de $\mathbf{E}$. Consequentemente, a Lei de Elasticidade dada por:

$$\mathbf{S} = \mathfrak{C} : \mathbf{E}^e = \mathfrak{C} : (\mathbf{E} - \mathbf{E}^p) \quad (7)$$

é determinada em função da deformação total $\mathbf{E}$ e da parcela de deformação plástica $\mathbf{E}^p$ definindo a *formulação no espaço das deformações*. Na Eq. (7), $\mathcal{C}$ é o tensor de quarta ordem com as constantes elásticas do material, $\mathbf{S}$ é o tensor das tensões de Piola-Kirchhoff de segunda espécie e estados admissíveis de tensão devem obedecer a seguinte condição conhecida como Critério de Plastificação ou Lei de Plastificação:

$$f = \sqrt{\mathbf{S} : \mathcal{P} : \mathbf{S}} + \mathcal{L} : \mathbf{S} - \chi - S_y \leq 0, \quad (8)$$

onde $\mathcal{P}$ é o tensor de quarta ordem que define o comportamento das tensões no plano de Nadai (Nadai, 1950), $\mathcal{L}$ é o tensor de segunda ordem que define a influência da tensão hidrostática no modelo e S_y é o nível de tensão de falha equivalente. Na Eq. (8) assume-se que χ é um escalar.

A partir do critério de plastificação, matematicamente expresso por uma função dependente do estado de tensões $f(\mathbf{S})$, é possível identificar os regimes de resposta imediata elástica ou elasto-plástica do material analisando-se as seguintes possibilidades:

Se $f(\mathbf{S}) < 0$, as tensões estão no interior da superfície de plastificação caracterizando comportamento elástico;

Se $f(\mathbf{S}) = 0$, as tensões estão sobre a superfície de plastificação caracterizando comportamento plástico;

Se $f(\mathbf{S}) > 0$, as tensões estão fora da superfície de plastificação caracterizando estado inadmissível;

ou seja, a Superfície de Plastificação, obtida ao se representar o critério de plastificação $f(\mathbf{S}) = 0$ no espaço das tensões, é o lugar geométrico dos pontos que representam estados de tensões correspondentes ao início das deformações plásticas e constitui a fronteira do domínio que limita internamente estados de tensões correspondentes às deformações elásticas.

Como a superfície de plastificação define apenas o nível de tensão para o qual a plasticidade ocorre, para o cálculo da magnitude das deformações deve-se definir também uma Lei de Fluxo ou lei de evolução do tensor das deformações plásticas. Em geral, esta lei é definida por uma função chamada de potencial plástico $F(\mathbf{S}, \chi)$ e as componentes da deformação plástica são ortogonais a esta. Neste trabalho, o fluxo de deformação plástica pode ser escrito como:

$$\dot{\mathbf{E}}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial \mathbf{S}} = \dot{\lambda} \boldsymbol{\eta}, \quad (9)$$

onde λ é o multiplicador plástico. Quando a função potencial plástico F é igual à Lei de plastificação f , diz-se que o fluxo é associado. Caso contrário, o fluxo é chamado não-associado. No caso particular do presente modelo, F não é escrito explicitamente, mas $\boldsymbol{\eta}$ é um tensor que garante a convexidade da solução, veja por exemplo Botta et al., (2007).

Quando a superfície de plastificação admite mudanças em função das deformações plásticas ocorridas, diz-se que o material apresenta endurecimento, ou seja, há incremento de tensão com o incremento de deformação. Neste caso, a evolução da superfície de plastificação pode ocorrer de duas formas: uma mantendo sua forma original e mudando apenas o tamanho

(neste caso o endurecimento é dito isotrópico), e na outra forma, a superfície é deslocada no espaço de tensões sem mudar o tamanho, denominando-se endurecimento cinemático.

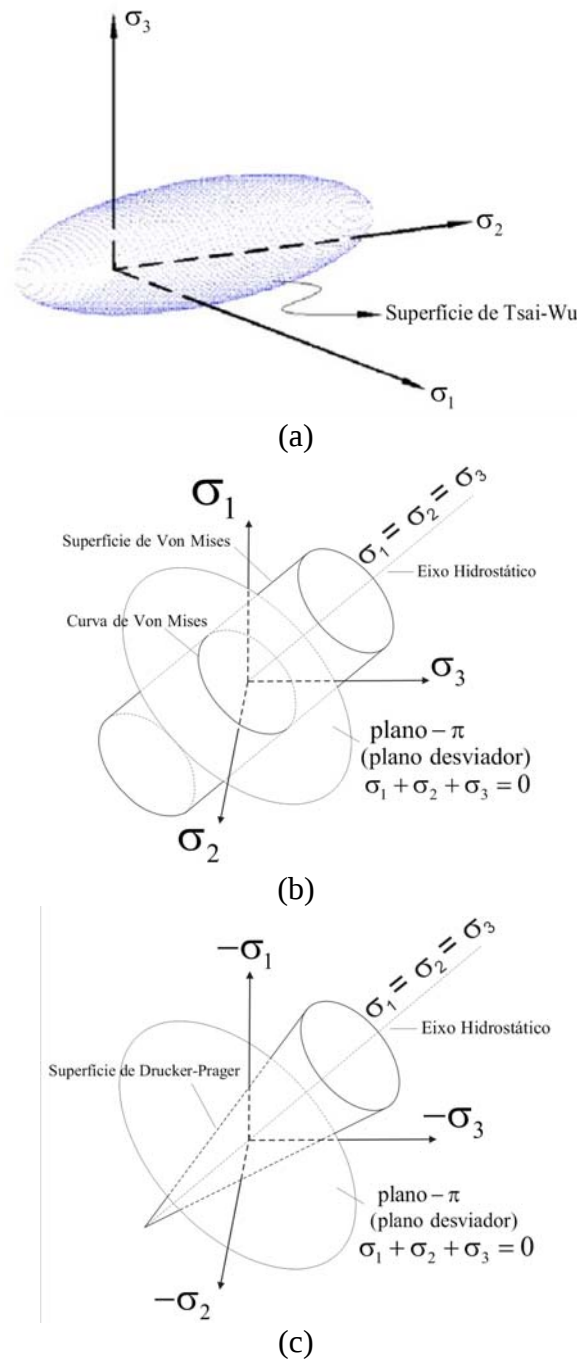


Figura 2. Superfícies de plastificação: (a) Tsai-Wu (Tsai, Wu, 1972) ; (b) Von Mises; (c) Drucker-Prager (Drucker, Prager, 1952)

Para definir o efeito do endurecimento por deformação plástica, define-se a força interna termodinâmica χ pela expressão:

$$\chi = -\frac{\partial \theta}{\partial \alpha} = -\mathbf{H} \cdot \boldsymbol{\alpha}, \quad (10)$$

onde θ é o potencial de energia livre adotado escrito como:

$$\theta(E - E^p, \alpha) = \frac{1}{2} E^e : \mathfrak{C} : E^e + \frac{1}{2} \alpha \cdot H \cdot \alpha, \quad (11)$$

H é o tensor de segunda ordem com parâmetros de endurecimento e α é um conjunto de variáveis de endurecimento. No potencial plástico $F(S, \chi)$, χ , α e H são considerados escalares, ou seja, χ , α e H e declara-se:

$$\dot{\alpha} = \dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial \chi}, \quad (12)$$

Nas relações anteriores, $\dot{\lambda} \geq 0$ é um escalar que fica determinado a partir das condições gerais de complementaridade dada na Eq. (13) e de consistência dada na Eq. (14), que caracterizam a irreversibilidade do processo:

$$\dot{\lambda} \geq 0, \quad f \leq 0, \quad \dot{\lambda} f = 0, \quad (13)$$

$$f = 0, \quad \dot{f} \leq 0, \quad \dot{\lambda} \dot{f} = 0. \quad (14)$$

O critério utilizado no presente trabalho é basicamente a raiz quadrada do modelo de Tsai-Wu (Tsai, Wu, 1972) cuja superfície de plastificação é descrita por um elipsoide (Fig. 2a), que permite a análise de materiais anisotrópicos. Uma escolha apropriada dos parâmetros de entrada do modelo permite que a superfície de plastificação seja degenerada na superfície de von Mises (Fig. 2b) ou na superfície de Drucker-Prager (Fig. 2c) (Drucker, Prager, 1952). Maiores detalhes podem ser encontrados em Coda et al., (2015).

4 MODELAGEM DAS FIBRAS

As fibras são discretizadas com elementos finitos unidimensionais curvos de ordem qualquer com 3 graus de liberdade por nós. Estes elementos são desenvolvidos para considerar a não linearidade geométrica usando a Lei Constitutiva de Saint-Venant-Kirchhoff dada na Eq. (10) e o mapeamento cinemático mostrado na Fig. 3.

$$\tilde{w} = \frac{1}{2} \tilde{\mathcal{E}} \tilde{E}^2. \quad (15)$$

Na Eq. (15), $\tilde{\mathcal{E}}$ e $\tilde{E}$ são, respectivamente, o módulo de elasticidade tangente e a deformação de Green unidimensional.

Da Fig. 3, os pontos $\tilde{x}_i$ na configuração inicial Ω^0 e os pontos $\tilde{y}_i$ na configuração corrente Ω podem ser mapeados a partir da configuração auxiliar Ω^1 com coordenadas adimensionais η usando funções de forma de ordem qualquer, $\tilde{\phi}_p(\eta)$, e as coordenadas dos nós p na configuração inicial $\tilde{X}_i^p$ e na configuração corrente $\tilde{Y}_i^p$, respectivamente, como:

$$\tilde{x}_i = \tilde{\phi}_i^0 = \tilde{\phi}_p(\eta) \tilde{X}_i^p \quad e \quad \tilde{y}_i = \tilde{\phi}_i^1 = \tilde{\phi}_p(\eta) \tilde{Y}_i^p, \quad (16)$$

onde $p = 1, \dots, N$ e $i = 1, 2, 3$ são, respectivamente, os nós do elemento finito de fibra e os graus de liberdade associados a estes nós.

A deformação de Green, $\tilde{E}$ na Eq. (15) é definida como:

$$\tilde{E} = \frac{1}{2} \left(\frac{|\tilde{T}^\Omega|^2 - |\tilde{T}^{\Omega^0}|^2}{|\tilde{T}^{\Omega^0}|^2} \right), \quad (17)$$

onde $|\tilde{T}^{\Omega^0}|$ e $|\tilde{T}^\Omega|$ são os módulos dos vetores tangentes nas configurações inicial e corrente dados, respectivamente, por:

$$|\tilde{T}^{B_0}|^2 = \left(\frac{d\tilde{\phi}_p(\eta)}{d\eta} \tilde{X}_1^p \right)^2 + \left(\frac{d\tilde{\phi}_p(\eta)}{d\eta} \tilde{X}_2^p \right)^2 + \left(\frac{d\tilde{\phi}_p(\eta)}{d\eta} \tilde{X}_3^p \right)^2, \quad (18)$$

$$|\tilde{T}^B|^2 = \left(\frac{d\tilde{\phi}_p(\eta)}{d\eta} \tilde{Y}_1^p \right)^2 + \left(\frac{d\tilde{\phi}_p(\eta)}{d\eta} \tilde{Y}_2^p \right)^2 + \left(\frac{d\tilde{\phi}_p(\eta)}{d\eta} \tilde{Y}_3^p \right)^2. \quad (19)$$

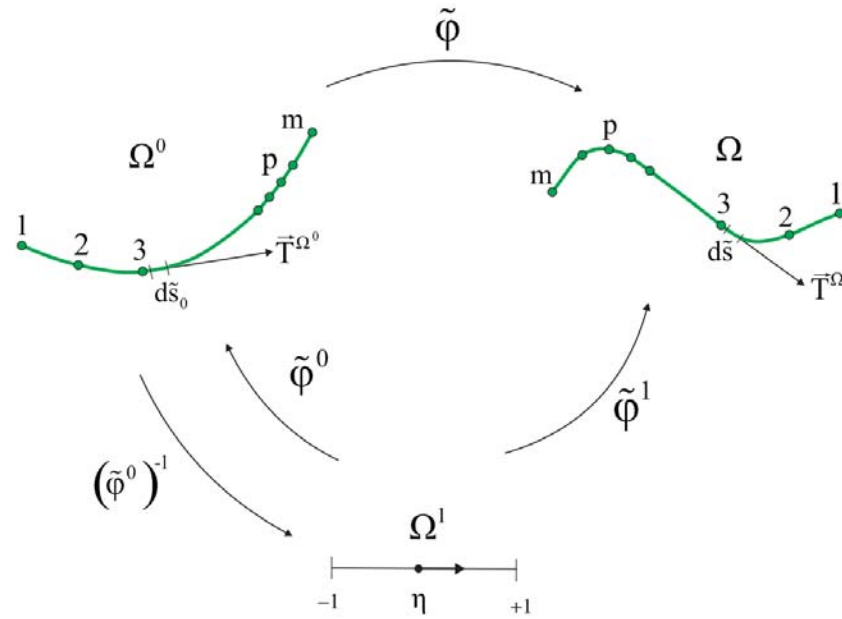


Figura 3. Mapeamento posicional do elemento finito de fibra

Para realizar a análise de equilíbrio é necessário conhecer a primeira e a segunda derivada da energia de deformação em função das posições dos nós de fibra, ou seja,

$$\frac{\partial \tilde{W}}{\partial \tilde{Y}_k^j} = \int_{\tilde{V}_0} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{Y}_k^j} d\tilde{V}_0 \quad e \quad \frac{\partial^2 \tilde{W}}{\partial \tilde{Y}_k^j \partial \tilde{Y}_\alpha^\beta} = \int_{\tilde{V}_0} \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial \tilde{Y}_k^j \partial \tilde{Y}_\alpha^\beta} d\tilde{V}_0. \quad (20)$$

Substituindo as Eqs. (12)-(16) nas Eqs. (17) e desenvolvendo as operações necessárias obtém-se o vetor de forças internas e a matriz Hessiana do elemento finito de fibra curva de ordem qualquer, expressos, respectivamente, por:

$$\frac{\partial \tilde{W}}{\partial \tilde{Y}_k^j} = \int_0^1 \tilde{\mathcal{B}} \tilde{E} \left(\frac{d\tilde{\phi}_p(\eta)}{d\eta} \tilde{Y}_k^p \right) \frac{d\tilde{\phi}_j(\eta)}{d\eta} \frac{d\eta}{|\tilde{T}^{\Omega^0}|^2} \tilde{A} d\tilde{S}_0 = \int_{-1}^1 \tilde{\mathcal{B}} \tilde{E} \left(\frac{d\tilde{\phi}_p(\eta)}{d\eta} \tilde{Y}_k^p \right) \frac{d\tilde{\phi}_j(\eta)}{d\eta} \frac{d\eta}{|\tilde{T}^{\Omega^0}|^2} \tilde{J}_0(\eta) \tilde{A} d\eta \quad (21)$$

e

$$\frac{\partial^2 \tilde{W}}{\partial \tilde{Y}_k^l \partial \tilde{Y}_a^\beta} = \int_{-1}^1 \left(\frac{\tilde{E}}{|\tilde{T}^{\alpha^s}|^4} \left(\frac{d\tilde{\phi}_p(\eta)}{d\eta} \tilde{Y}_a^p \right) \frac{d\tilde{\phi}_p(\eta)}{d\eta} \left(\frac{d\tilde{\phi}_p(\eta)}{d\eta} \tilde{Y}_k^p \right) \frac{d\tilde{\phi}_j(\eta)}{d\eta} + \frac{\tilde{E}\tilde{E}}{|\tilde{T}^{\alpha^s}|^2} \frac{d\tilde{\phi}_p(\eta)}{d\eta} \frac{d\tilde{\phi}_j(\eta)}{d\eta} \delta_{ka} \right) \tilde{J}_0(\eta) \tilde{A} d\eta, \quad (22)$$

onde $\tilde{J}_0(\eta) = |\tilde{T}^{\alpha^s}| = \sqrt{\left(\frac{d\tilde{x}_1}{d\eta}\right)^2 + \left(\frac{d\tilde{x}_2}{d\eta}\right)^2 + \left(\frac{d\tilde{x}_3}{d\eta}\right)^2}$ é o Jacobiano de $\tilde{x}_i$.

As Eqs. (18) e (19) são resolvidas numericamente com quadratura de Gauss–Legendre.

As fibras são incorporadas em qualquer posição do domínio sem aumentar o número de graus de liberdade do sistema de equações não lineares e sem a necessidade de coincidência dos nós das fibras com os nós da matriz na discretização do problema, escrevendo-se as posições dos nós das fibras em função das posições dos nós do elemento finito de casca laminada. Para acoplar as fibras à matriz laminada é necessário calcular a primeira e a segunda derivada da energia de deformação em relação aos parâmetros nodais dos elementos finitos de casca laminada empregando-se a regra da cadeia. Essas derivadas resultam em uma matriz de transformação análoga à apresentada por Sampaio; Paccola; Coda (2015) e não é repetida aqui.

5 O PROBLEMA DE EQUILÍBRIO NÃO LINEAR GEOMÉTRICO

Para a análise não linear geométrica considera-se que o processo de mudança de configuração é governado pela Primeira Lei da Termodinâmica. Assim, a energia potencial total gerada pelo sistema, desprezando-se a contribuição da energia cinética e considerando-se que o processo é adiabático pode ser escrita como:

$$\Pi = W + T, \quad (23)$$

onde $T = -F_k Y_k$ é a energia potencial das forças externas F_k aplicadas nas posições atuais Y_k e $W = \hat{W} + \tilde{W}$ é a energia de deformação armazenada no corpo incluindo a energia de deformação da matriz $\hat{W}$ e a energia de deformação das fibras $\tilde{W}$. Como todas as quantidades envolvidas são Lagrangeanas, escritas em função dos parâmetros nodais dos elementos finitos de casca, a energia de deformação W armazenada no volume inicial do corpo na Eq. (1) é dada por:

$$W = \int_{\tilde{V}_0} \hat{w}(\tilde{Y}_i^l) d\tilde{V}_0 + \int_{\tilde{V}_0} \tilde{w}(\tilde{Y}_j^p(\tilde{Y}_i^l)) d\tilde{V}_0, \quad (24)$$

onde $\hat{w}$ e $\tilde{w}$ são, a energia de deformação por unidade de volume inicial dos elementos finitos de casca e fibra, respectivamente; $\tilde{Y}_i^l$ são posições nodais do elemento de casca; $\tilde{Y}_j^p$ são as posições dos nós do elemento de fibras; $\tilde{V}_0$ é o volume inicial do elemento finito de casca; e $\tilde{V}_0$ é o volume inicial do elemento finito de fibra.

Na Eq. (24), os índices $l = 1, \dots, 10$ e $i = 1, \dots, 7$ representam, respectivamente, os nós do elemento finito de casca laminada e os graus de liberdade associados a estes nós e os índices $p = 1, \dots, N$ e $j = 1, 2, 3$ representam, respectivamente, os nós do elemento finito de fibra e os graus de liberdade associados a estes nós.

Lembrando que as forças externas são conservativas, aplica-se o princípio da mínima energia potencial total na Eq. (23) que passa a ser escrita como:

$$g_k = \frac{\partial \Pi}{\partial Y_k} = \frac{\partial W}{\partial Y_k} - F_k = 0, \quad (25)$$

onde $\partial W / \partial Y_k$ é o gradiente da energia de deformação entendido como a força interna do sistema. Da Eq. (25) observa-se que o sólido está em equilíbrio quando o vetor de forças internas é igual ao vetor de forças externas aplicadas.

Como a posição atual ou a posição de equilíbrio é a incógnita do problema, quando uma solução tentativa (Y_l^0) é testada, aparece um vetor não nulo g_k na Eq. (25). Nesta situação, g_k entendido como o vetor desbalanceamento do sistema mecânico, é não linear em relação aos parâmetros nodais e uma correção deve ser aplicada na posição tentativa para alcançar o equilíbrio. Para encontrar esta correção é necessário expandir g_k em Série de Taylor em torno de (Y_l^0) pela expressão:

$$g_j(Y_l) = g_j(Y_l^0) + \left. \frac{\partial g_j}{\partial Y_k} \right|_{(Y_l^0)} \Delta Y_k + O_j^2 = 0. \quad (26)$$

Desprezando-se os termos de ordem superior na Eq. (26) tem-se:

$$\Delta Y_k = - \left(\left. \frac{\partial g_j}{\partial Y_k} \right|_{(Y_l^0)} \right)^{-1} g_j(Y_l^0), \quad (27)$$

onde $\left. \frac{\partial g_j}{\partial Y_k} \right|_{(Y_l^0)} = \left. \frac{\partial^2 W}{\partial Y_k \partial Y_j} \right|_{(Y_l^0)}$ é a matriz Hessiana do problema.

Da Eq. (5) tem-se o método de Newton-Raphson para resolver sistemas de equações não lineares descrito resumidamente a seguir: Primeiramente escolhe-se uma posição tentativa Y_l^0 e calcula-se o vetor de forças $g_j(Y_l^0)$ de acordo com a Eq. (25). Com a Eq. (27) encontra-se uma posição correção ΔY_k que ao ser aplicada sobre a solução tentativa Y_l^0 resulta em um novo vetor posição dado por $Y_l = Y_l^0 + \Delta Y_l$. Com este novo vetor posição, repete-se o procedimento até que ΔY_l ou $g_j(Y_l^0)$ sejam suficientemente pequenos ou menores que um valor tolerância assumido. As ações externas que dão início ao processo iterativo podem ser introduzidas ao sistema de forma total ou incremental e a energia de deformação por unidade de volume inicial utilizada para o elemento finito de casca $\hat{w}$ e para os elementos finitos de fibras $\tilde{w}$ descreve um material de Saint-Venant-Kirchhoff, isto é, a sua Lei constitutiva é dada pela relação linear entre o tensor das tensões de Piola-Kirchhoff de segunda espécie $\hat{S}_{ij}$ é o tensor das deformações de Green-Lagrange $\hat{E}_{ij}$ dados, respectivamente, por:

$$\hat{w} = \frac{1}{2} \hat{E}_{ij} \hat{C}_{ijkl} \hat{E}_{kl}; \quad \tilde{w} = \frac{1}{2} \tilde{E} \tilde{E}^2; \quad \hat{S}_{ij} = \frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{E}_{ij}} = \hat{C}_{ijkl} \hat{E}_{kl}; \quad \hat{E}_{ij} = \frac{1}{2} (\hat{C}_{ij} - \delta_{ij}) = \frac{1}{2} (\hat{A}_{ki} \hat{A}_{kj} - \delta_{ij}), \quad (28)$$

onde $\hat{C}_{ijkl}$, $\tilde{E}$, $\tilde{E}$, $\hat{C}_{ij}$, $\hat{A}_{ki}$ e δ_{ij} são, respectivamente, o tensor constitutivo elástico linear de quarta ordem, o módulo de elasticidade unidimensional, a tensão unidimensional de Green, o tensor dos estiramentos à direita de Cauchy-Green, o gradiente de deformação e o tensor Identidade.

6 EXEMPLO NUMÉRICO

O exemplo numérico apresentado tem por objetivo demonstrar as potencialidades da formulação para a análise de meios reforçados com diferentes frações volumétricas de fibras considerando a não linearidade física do material da matriz.

6.1 Laje de concreto armado em regime elastoplástico reforçada com fibras

Este exemplo foi inspirado em um teste experimental apresentado em Chamecki (1948). Para efeito de uma análise qualitativa considerou-se a mesma geometria, carregamento e condição de contorno utilizadas no ensaio experimental. Desta forma, uma laje de concreto armado simplesmente apoiada de lado $L = 200cm$, altura $h = 12cm$ submetida a um carregamento uniformemente distribuído conforme mostrado na Fig. 4a é analisada.

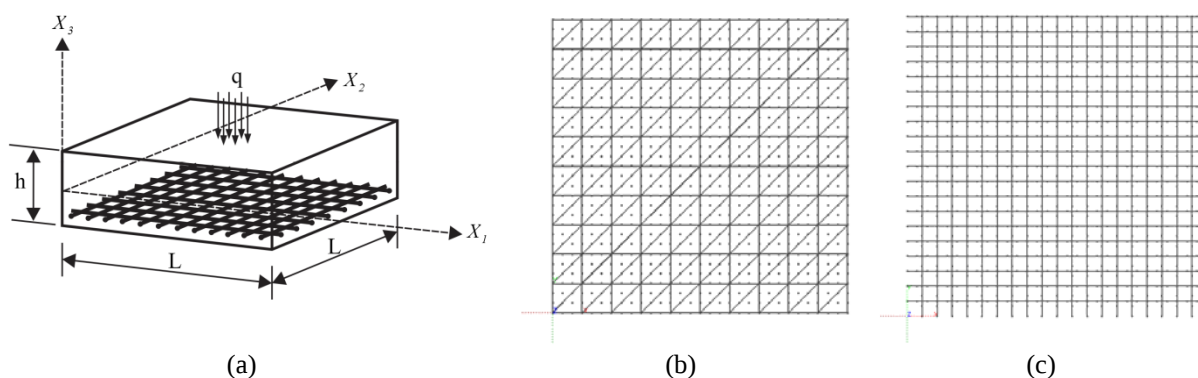


Figura 4. Geometria do problema e discretização: (a) placa armada em duas direções; (b) malha da superfície de referência da matriz; (c) malha da armadura

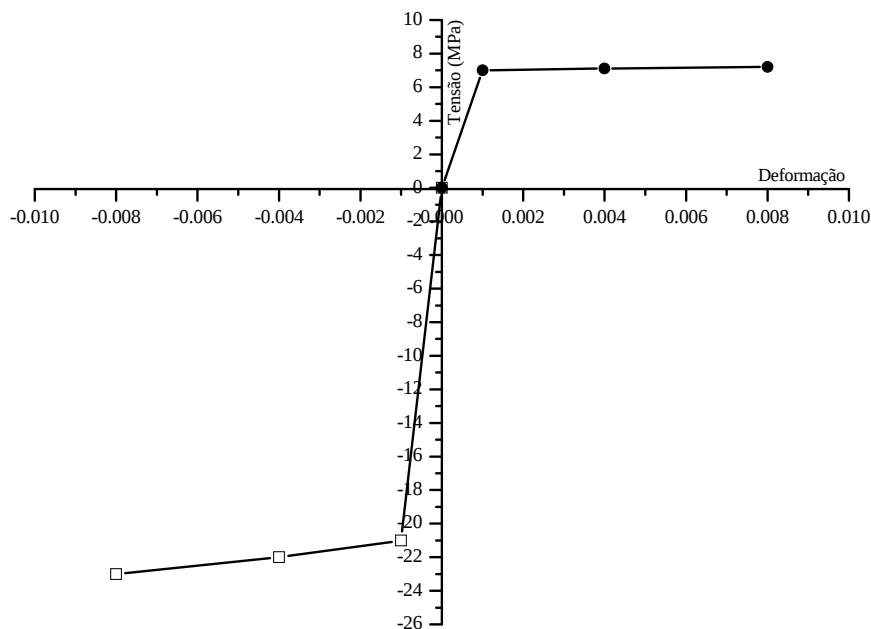


Figura 5. Modelo constitutivo para o concreto

A laje está armada em duas direções por uma área de aço dada por $S_x = S_y = 3,84cm^2/m$ e as distâncias do centro de gravidade destas armaduras à face comprimida são dadas,

respectivamente por, $h_x = 10,65\text{cm}$ e $h_y = 9,95\text{cm}$. A carga de fissuração e a carga de ruptura observadas no ensaio experimental são dadas, respectivamente, $P_f = 13,5\text{t}$ e $P_u = 40,23\text{t}$. As unidades dos dados apresentados estão de acordo com a referência de onde foram extraídos.

Tabela 1. Discretização das fibras aleatórias

PLACA	Número total de fibras	Número total de nós
+0,5%	51340	205360
+0,75%	77020	308080
+1,0%	102700	410800
+1,5%	154040	616160

Tabela 2. Carga de início da fissuração, carga de ruptura e deslocamento no centro da placa

PLACA	Passo de início da formação das charneiras		Carga para início da formação das charneiras (kN)		Carga de Ruptura (kN)	Acréscimo (%)	Deslocamento (m)
	Face inferior	Face superior	Face inferior	Face superior			
ELÁSTICA	NA	NA	NA	NA	NA	NA	0,008866
PLÁSTICA	19	30	95	150	385	Ref.	0,009990
+0,5%	19	30	95	150	390	1,299	0,009904
+0,75%	18	30	90	150	390	1,299	0,009781
+1,0%	18	31	90	155	400	3,896	0,009992
+1,5%	19	31	95	155	405	5,195	0,009915

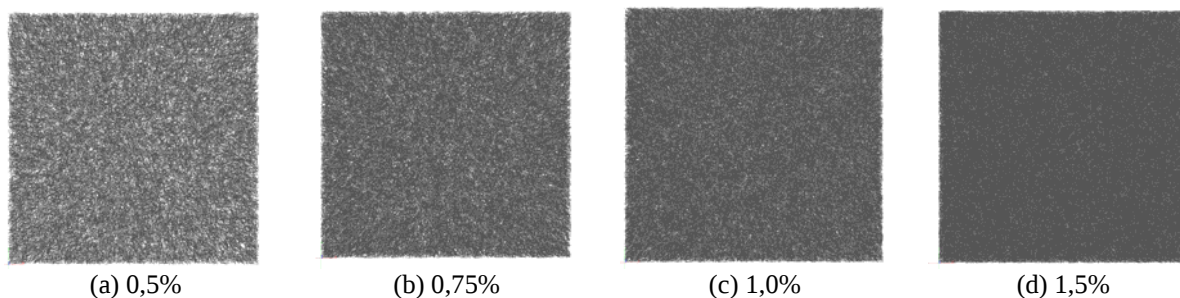


Figura 6. Malha para as diferentes proporções adotadas de armadura descontínua

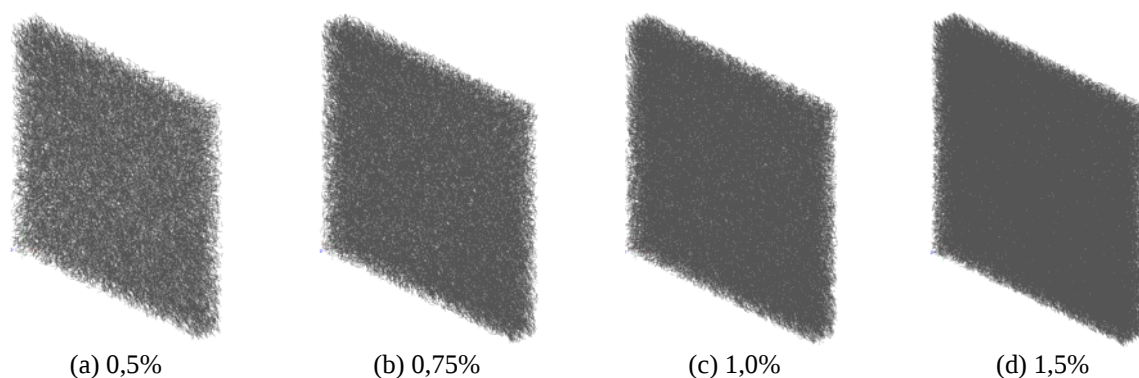


Figura 7. Perspectiva das malhas para armadura descontínua

Neste trabalho, para a área de armadura foram adotadas, em cada direção, 20 barras de aço CA-50 com diâmetro nominal de $\phi = 16\text{mm}$ e área da seção transversal de $S_f = 2\text{cm}^2$. Para a análise numérica do problema, considerou-se a dupla simetria e somente um quarto da

laje foi discretizada em uma malha homogênea com 200 elementos finitos cúbicos, totalizando 961 nós e 6727 graus de liberdades (Fig. 4b). Cada barra da armadura foi discretizada em 10 elementos finitos com aproximação cúbica para as variáveis totalizando 400 elementos e 1240 nós. As barras estão espaçadas a cada 5cm e a malha adotada pode ser visualizada na Fig. 4c.

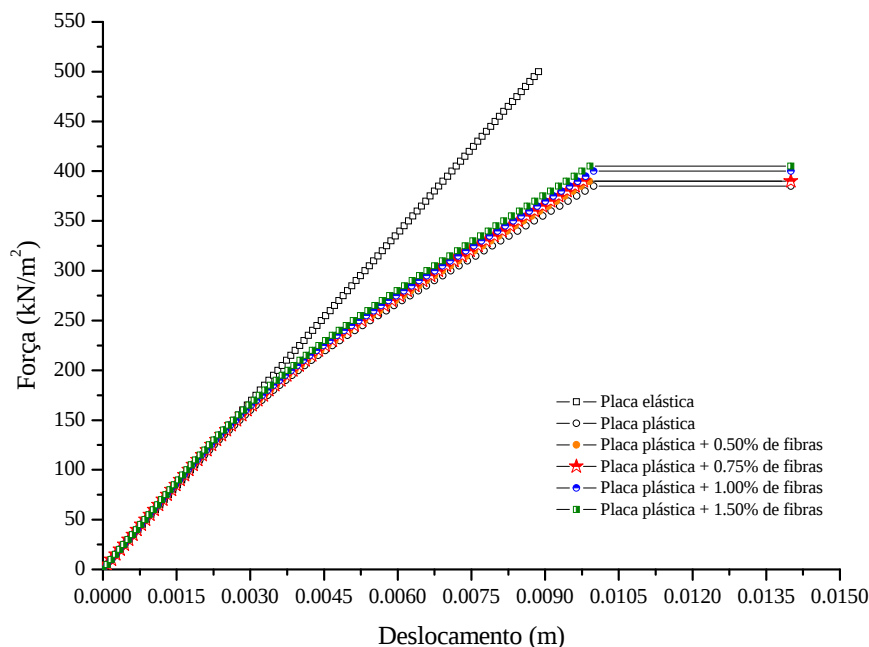


Figura 8. Curvas força x deslocamento para todos os casos analisados

Os módulos de elasticidade à tração e à compressão adotados para o concreto são dados, respectivamente, por $E_c^t = 7GPa$ e $E_c^c = 21GPa$. O coeficiente de Poisson adotado para o concreto é dado por $\nu_c = 0.25$. As fibras seguem regime elástico-linear com módulo de elasticidade $E_f = 210GPa$. Na ausência de valores de referência, idealizou-se um modelo constitutivo para o concreto conforme mostrado na Fig. 5. Os módulos tangentes à tração e à compressão na fase de endurecimento podem ser extraídos diretamente do modelo constitutivo mostrado na Fig. 5. Na tração, os módulos tangentes para os trechos 1 e 2 são dados, respectivamente por, $E_c^{t1} = 0,033GPa$ e $E_c^{t2} = 0,025GPa$. Na compressão, os módulos tangentes para os trechos 1 e 2 são dados respectivamente por $E_c^{c1} = 0,33GPa$ e $E_c^{c2} = 0,25GPa$. Destaca-se que o modelo constitutivo da Fig. 5 é o mesmo adotado para as diferentes direções de ortotropia. Para as análises utilizou-se controle de força e o carregamento uniformemente distribuído foi aplicado em incrementos de $\Delta q = 5kN/m^2$ até a falha do material. O deslizamento fibra-matriz não é considerado.

Primeiramente, analisou-se apenas a laje armada em duas direções considerando-se, para a matriz de concreto os modelos constitutivos elástico-linear e elastoplástico mostrado na Fig.5. Em seguida, fibras curtas elásticas foram espalhadas aleatoriamente na laje elastoplástica nas taxas de 0,5%, 0,75%, 1% e 1,5% do volume da laje. O módulo de elasticidade, a área da seção transversal e o comprimento adotados para as fibras são dados, respectivamente, por $E_f = 210GPa$, $S_f = 0,0046cm^2$ e $L_f = 2,54cm$. O número total de fibras com aproximação cúbica para as variáveis para cada caso considerado e o número total de nós

de fibra resultantes de cada discretização são mostrados na Tabela 1 e as malhas para todos os casos analisados são mostradas nas Figs. 6 e 7. Neste caso, somente a matriz elastoplástica foi considerada nas análises.

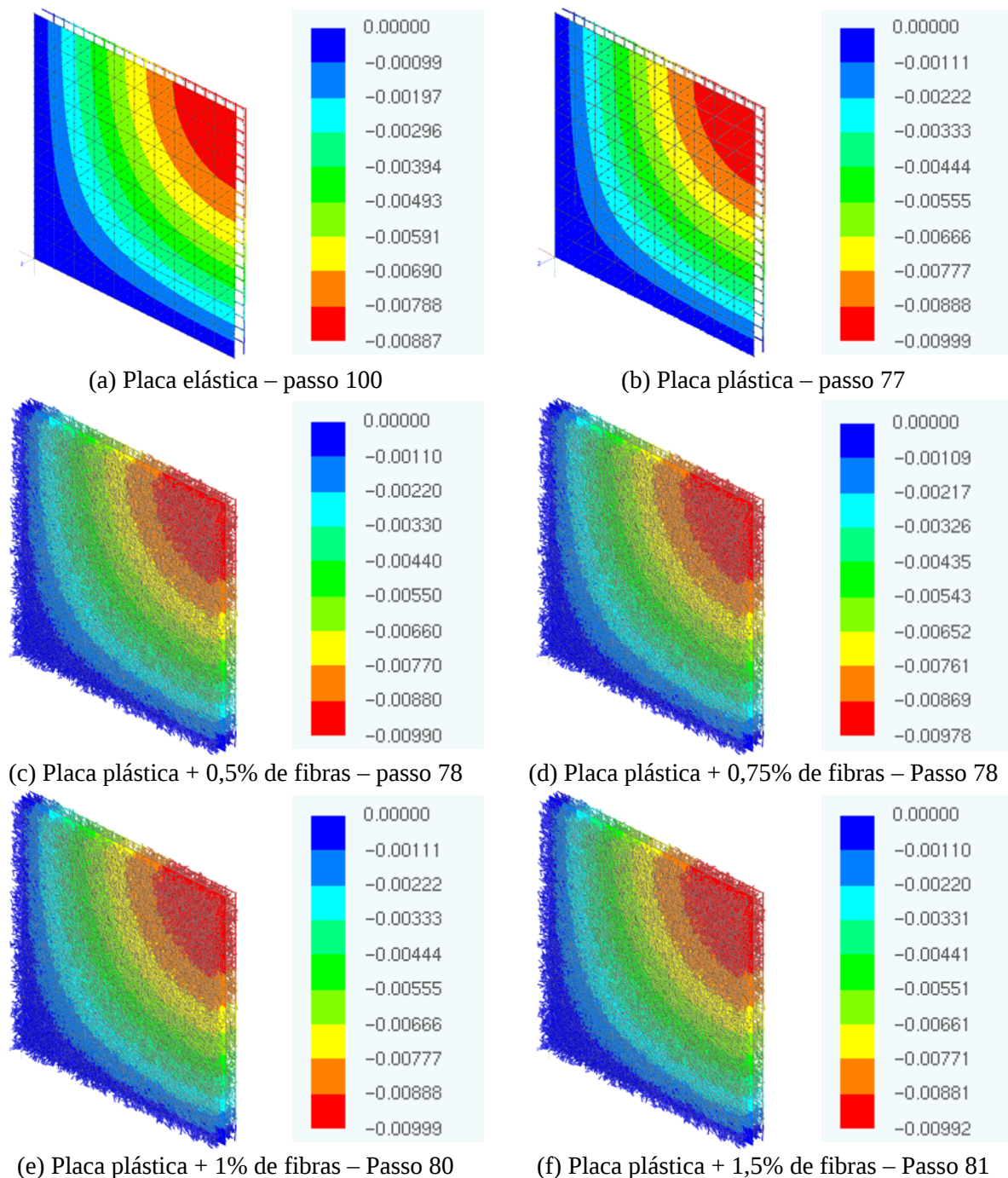


Figura 9. Deslocamentos transversais para um quarto do problema

A Fig. 8 mostra as curvas força x deslocamento do ponto central da placa para todos os casos considerados. A partir destas curvas é possível observar que houve acréscimo de rigidez devido à consideração das fibras curtas em relação a placa armada em duas direções conforme esperado. A Fig. 9 mostra o perfil dos deslocamentos transversais para um quarto da placa para todos os casos analisados. As Figs. 10 e 11 mostram a evolução da deformação plástica

do material para diferentes níveis de carregamento nas faces superior e inferior da placa, respectivamente e a Tabela 2 resume os passos de início da deformação plástica nas faces inferior e superior da laje, a carga correspondente, a carga de ruptura para cada caso considerado, o acréscimo na carga de ruptura em relação à placa sem reforço e o deslocamento máximo para cada caso analisado.

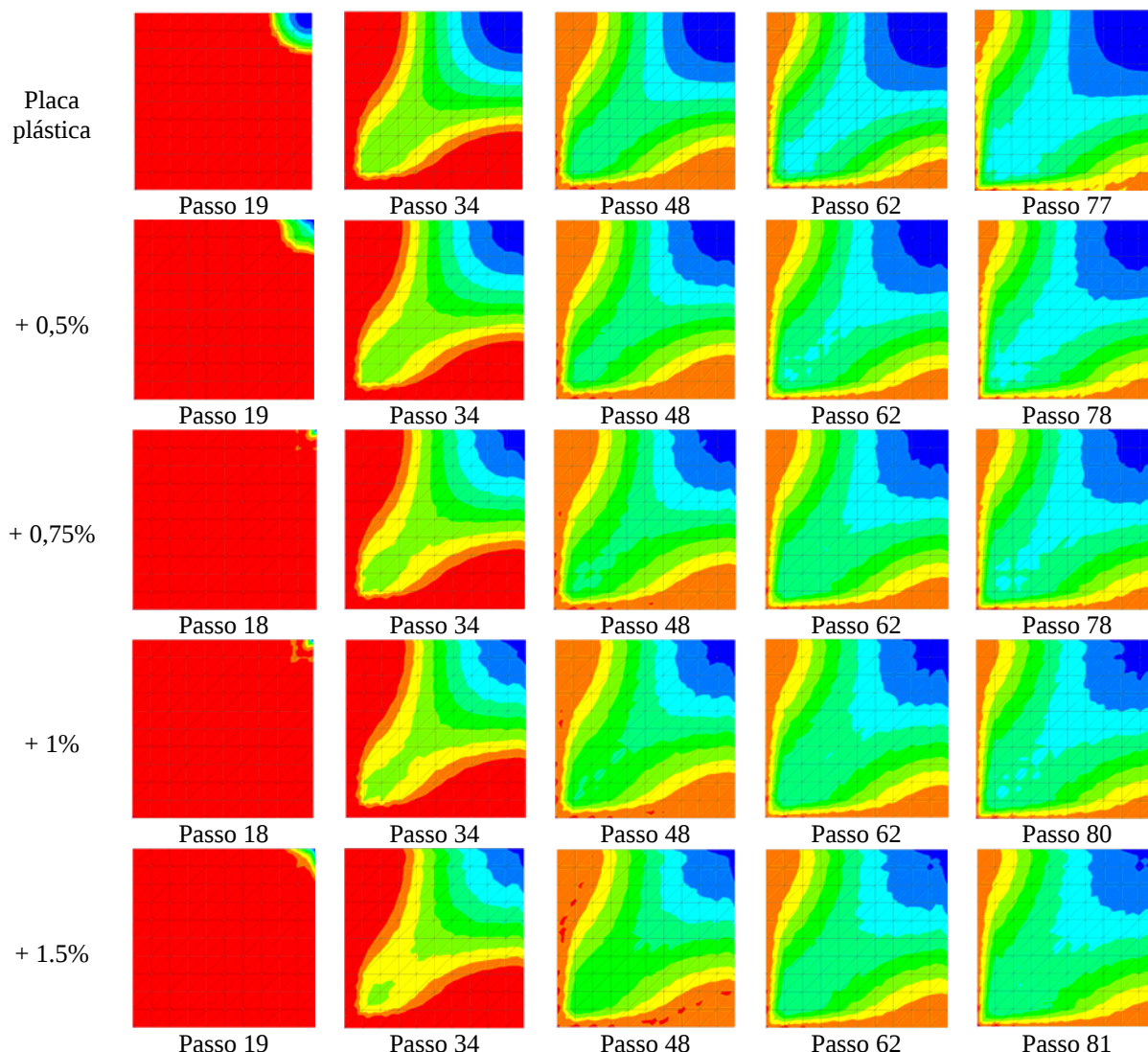


Figura 10. Evolução da degradação do concreto para diferentes níveis de carregamento na face inferior da laje: efeitos do momento de flexão

Analisando-se as Figs. 8, 10 e 11 é possível observar três fases distintas do comportamento do material de acordo com a magnitude da carga aplicada. Inicialmente, para pequenas cargas, a laje se comporta elasticamente. Aumentando-se a carga, atinge-se uma segunda fase, em que o concreto se fissa na zona tracionada, por ter atingido a tensão de ruptura à tração. Experimentalmente (Chamecki, 1948), primeiramente surge uma fissura em uma das diagonais, que vai se alongando, e conduz ao surgimento de fissuras na outra diagonal, que se iniciam no centro da laje e vão se alastrando para os cantos que se elevam ligeiramente (Fig. 12a). Aumentando-se a carga, a terceira fase ocorre quando a parte central da laje atinge o estado de plasticidade (Fig. 10). A partir daí, o comportamento da laje estará fora do limite de previsão das teorias clássicas (Chamecki, 1948). A plasticidade vai se propagando do centro em direção aos quatro cantos, pelas fissuras situadas nas proximidades das diagonais, formando linhas plásticas (Fig. 10), que se bifurcam antes de atingir os cantos

(Fig. 12b), que nessa fase se encurvam para cima, desencostando dos apoios (Fig. 12a). As deformações segundo as linhas plásticas vão aumentando rapidamente, até que na parte superior das mesmas o concreto se esmaga à compressão (Fig. 11). Os momentos nos cantos são chamados momentos volventes ou momentos de torção e os cantos volvidos ocorrem quando não há ancoragem que impeça o levantamento.

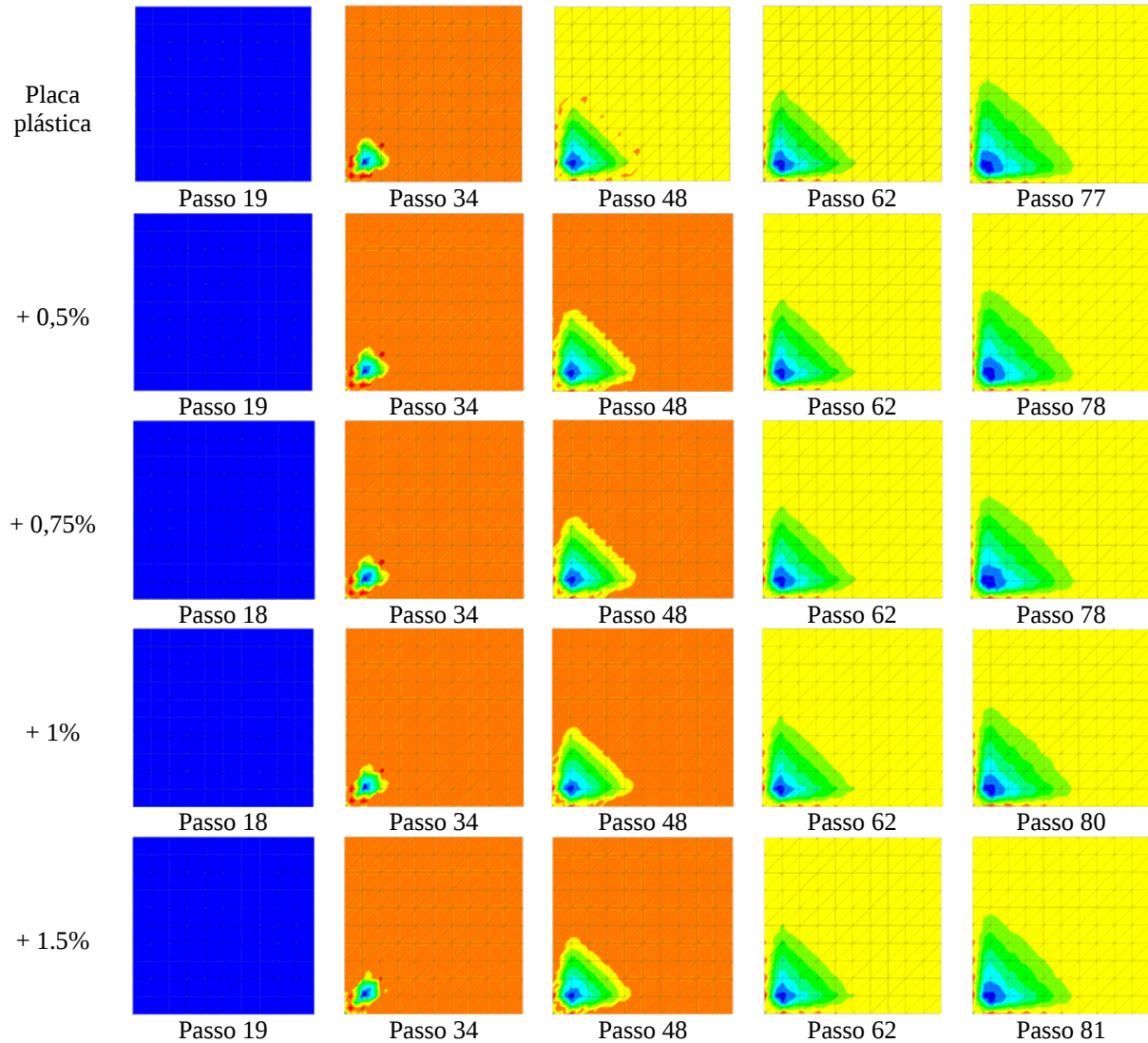


Figura 11. Evolução da degradação do concreto para diferentes níveis de carregamento na face superior da laje: efeitos do momento volvente

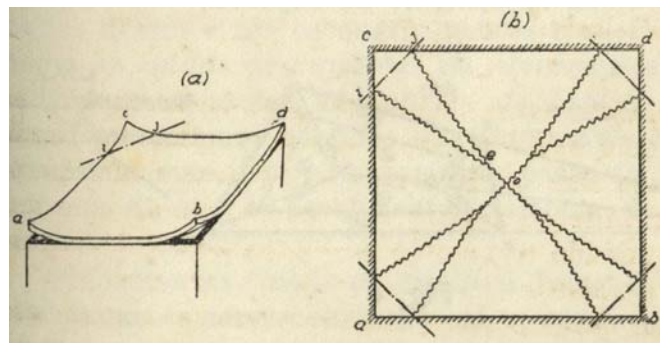
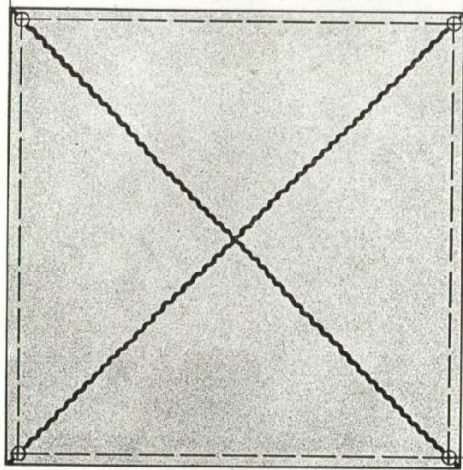
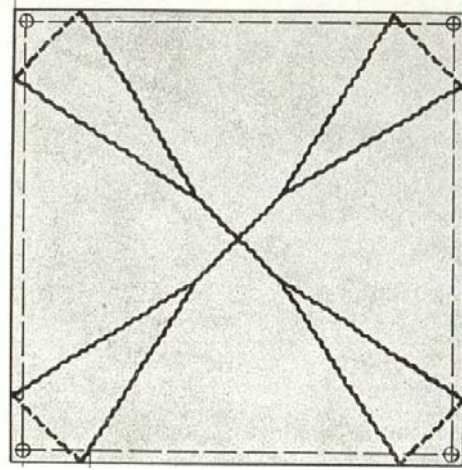


Figura 12. Comportamento dos cantos e bifurcação da charneira. Fonte: Chamecki, 1948

a) Configuração das charneiras predita pela teoria clássica

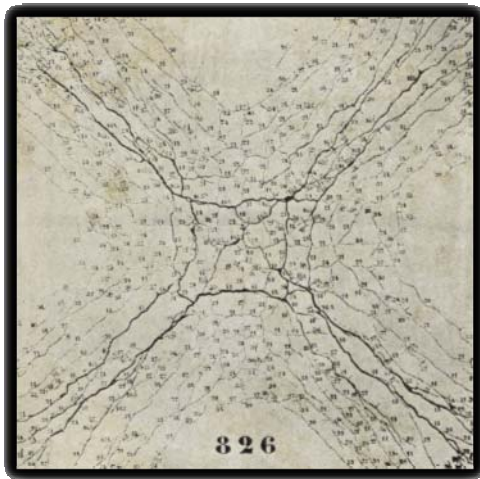


a.1) Face inferior com ancoragem



a.2) Face inferior e superior s/ ancoragem

b) Observação experimental

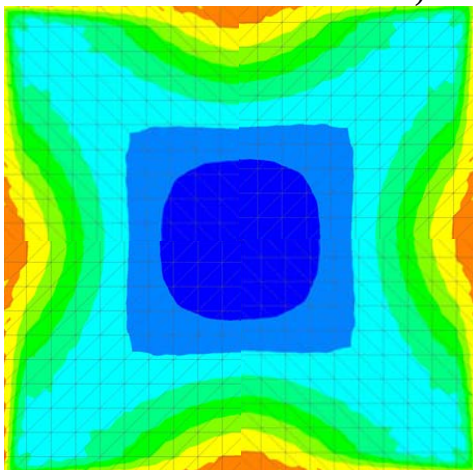


b.1) Face inferior

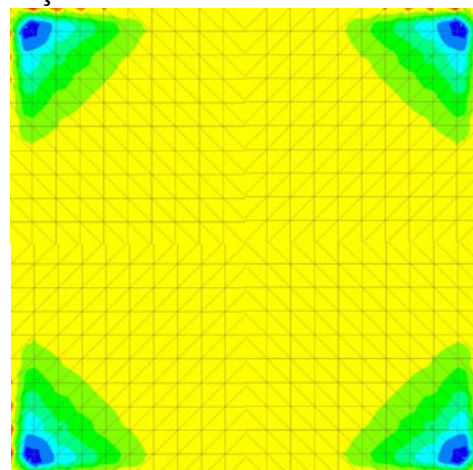


b.2) Face superior

c) Presente formulação



c.1) Face inferior



c.2) Face superior

Figura 13. Configuração das charneiras plásticas para o caso de placa quadrada simplesmente apoiada sem armadura superior nos cantos submetida a carregamento uniformemente distribuído. (a) configuração predita pela teoria das charneiras plásticas. Fonte: (Sawczuk; Jaeger, 1963); (b) observação experimental. Fonte: (Chamecki, 1948); (c) configuração obtida com a presente formulação

As Figs. 13a.1 e 13a.2 mostram as configurações das charneiras plásticas para o caso de laje quadrada com bordas simplesmente apoiadas submetida a carregamento uniformemente distribuído conforme predito pela teoria clássica (Johansen, 1961; Sawczuk, Jaeger, 1963).

As Figuras 13b.1 e 13b.2, mostram, respectivamente, as faces inferior e superior da laje rompida obtidas no ensaio experimental (Chamecki, 1948) e as Figs. 13c.1 e 13c.2 mostram, respectivamente, a distribuição das deformações plásticas nas faces inferior e superior da laje obtidas com a presente formulação para o passo 77 da placa plástica mostrado nas Figs. 10 e 11.

Para uma comparação mais realística com modelos experimentais ainda são necessários a consideração da não linearidade física das fibras e o deslizamento fibra-matriz, objetos de estudo de trabalhos futuros. Porém, os resultados atuais mostram que o modelo constitutivo utilizado para considerar a plasticidade da matriz, considerando-se as mesmas condições de geometria, carregamento e condição de contorno, conduz a uma configuração de distribuição das deformações conforme a observada no ensaio experimental (Chamecki, 1948) e conforme predito pela teoria das charneiras plásticas (Johansen, 1961; Langendonck, 1970; Pinheiro, 1988; Sawczuk, Jaeger, 1963). Além disso, a consideração de diferentes frações de fibras descontínuas se comportou de forma coerente aumentando a rigidez do problema.

De qualquer forma, equidade de resultados não é esperada, pois além de todos os aspectos já mencionados, o presente modelo considera o efeito de membrana ou de arqueamento, que cria esforços no plano da placa, favorável à resistência da laje, não considerado na teoria das charneiras plásticas (Langendonck, 1970).

Finalmente, a Fig. 14, mostra uma vista ampliada com e sem a discretização da superfície de referência para os casos de matriz plástica e matriz plástica reforçada com 0,5% de fibras. Como os demais casos de adição de fibras são muito semelhantes, optou-se por omiti-los.

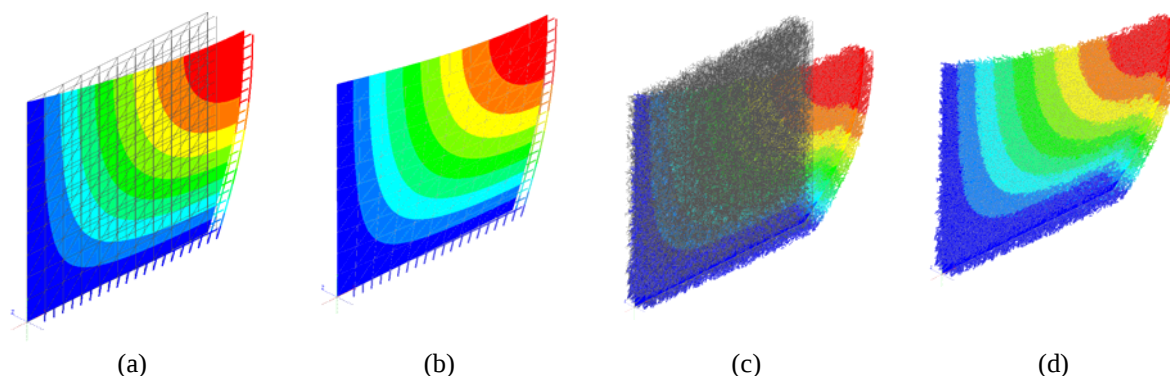


Figura 14. Vista ampliada da configuração final de um quarto da laje. Fator de ampliação: 100X: (a) placa plástica com discretização da superfície de referência; b) superfície deformada da placa plástica sem a discretização da superfície de referência; c) placa plástica reforçada com 0,5% de fibras com discretização da superfície de referência; d) superfície deformada da placa reforçada com 0,5% de fibras sem a discretização da superfície de referência

7 CONCLUSÃO

Uma formulação Lagrangeana total para inclusão de fibras em placas laminadas com comportamento não linear físico foi desenvolvida e implementada com sucesso. A lei constitutiva não linear adotada é elastoplástica multilinear não associativa. A comparação qualitativa dos resultados numéricos obtidos com resultados experimentais e com aqueles preditos pela teoria das charneiras plásticas demonstra que as implementações estão corretas e

que o método possui potencialidade para aplicações gerais em análises de meios reforçados. Futuros desenvolvimentos incluem verificações quantitativas e a implementação de mecânica do dano no material concreto e plasticidade nos reforços e fibras.

Agradecimentos

Os autores agradecem à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) e à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo suporte financeiro concedido para o desenvolvimento desta pesquisa.

REFERÊNCIAS

- Abrishami, H. H. e Mitchell, D., 1997. Influence of steel fibers on tension stiffening, *ACI Structural Journal*, v. 94, n. 6, pp. 769-776.
- Balaguru, P. N., Shah, S. P., 1992. Fiber-reinforced cement composites, MacGraw-Hill International Editions, New York, 530 p.
- Chamecki, S., 1948. Cálculo, no regime de ruptura, das lajes de concreto armada em cruz. Editora Guaíra Limitada. Curitiba: Brasil.
- Botta, A.S. ; Paccola, R.R. ; Venturini, W.S. ; Coda, H.B., 2007. A discussion on volume change in the plastic phase. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, pp. 1149-1162.
- Coda, H.B., Paccola, R.R., 2008. A positional FEM Formulation for geometrical non-linear analysis of shells. *Latin American Journal of Solids and Structures*, vol. 5, pp. 205–223.
- Coda, H.B. Paccola, R.R., Sampaio, M.S.M., 2013. Positional description applied to the solution of geometrical non-linear plates and shells, *Finite Element in Analysis and Design*, vol. 67, pp. 66–75.
- Coda, H.B., Sampaio, M.S.M., & Paccola, R.R., 2015. A FEM continuous transverse stress distribution for the analysis of geometrically nonlinear elastoplastic laminated plates and shells. *Finite Elements in Analysis and Design*, vol. 101, pp. 15-33.
- Drucker D. C., Prager, W., 1952. Soil mechanics and plastic analysis or limit design. *Q Appl Math*, vol. 10, pp. 157–165.
- Fields, K. e Bischoff, P. H., 2004. Tension stiffening and cracking of high-strength reinforced concrete tension members, *ACI Structural Journal*, v. 101, n. 4, pp.447-456.
- Fischer, G. e Li, V. C., 2002. Influence of matrix ductility on tension-stiffening behavior of steel reinforced engineered cementitious composites (ECC), *ACI Structural Journal*, v. 99, n. 1, pp. 104-111.
- Johansen, K.W., 1961. Brudlinieteorier. Polyteknisk Forening. Genoptrykt.
- Langendonck, T., 1970. Teoria Elementar das Charneiras Plásticas. São Paulo, ABCP. 413p.
- Nadai, A., 1950. The Theory of Flow and Fracture of Solids, McGraw-Hill, New York, 572p.
- Noghabai, K., 2000. Behavior of tie elements of plain and fibrous concrete and various cross sections, *ACI Structural Journal*, v. 97, n. 2, pp. 277-285.
- Pinheiro, L. M., 1988. Análise Elástica e Plástica de lajes retangulares de edifícios. 1988. 314 f. Tese (Doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.

Sampaio, M.S.M., Paccola, R.R., Coda, H.B., 2013. Fully adherent fiber-matrix FEM formulation for geometrically nonlinear 2D solid analysis. *Finite Element in Analysis and Design*, vol. 66, pp. 12–25.

Sampaio, M.S.M., 2014. *Análise não linear geométrica de cascas laminadas reforçadas com fibras*. 2014. 190 f. Tese (Doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.

Sampaio, M.S.M., Paccola, R.R., Coda, H.B., 2015. A geometrically nonlinear FEM formulation for the analysis of fiber reinforced laminated plates and shells. *Composite Structures*, vol. 119, pp. 12-25.

Sawczuk, A., Jaeger, T., 1963. Grenztragfähigkeits-Theorie der Platten. Springer-Verlag.

Tsai S. W., Wu E. M., 1972. A general theory of strength for anisotropic materials. Technical Report AFML-TR-71-12.