



ANÁLISE DINÂMICA ELASTOPLÁSTICA DE SÓLIDO VIA ELEMENTO QUADRILATERAL FORMULADO PELO GFEM

Hsu Yang Shang

hsu.shang@pucpr.br

Roberto Delledone Machado

roberto.machado@pucpr.br

João Elias Abdalla Filho

joão.abdalla@pucpr.br

Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica, PUCPR.

Rua. Imaculada de Conceição, 1155, Prado Velho, Curitiba, Paraná

Abstract. *Análise dinâmica elastoplástica é um dos tópicos de interesse em diversas áreas de engenharia. Nos problemas de elastodinâmica com plasticidade, existem diversos algoritmos para avanço do tempo, envolvendo processo incremental do tempo e processo iterativo para plasticidade. Os algoritmos apresentam diferentes características de estabilidade que podem afetar o processo elastoplástico de solução numérica. Nas últimas duas décadas, as formulações do MEF foram aprimoradas para admitir funções de enriquecimento, sem alterar a formulação convencional. Entre as diversas formulações enriquecidas, existe a técnica baseada no Método de Partição de Unidade e método das nuvens hp, o Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG). Outra alternativa é a técnica de enriquecimento hierárquico, que emprega polinômios hierárquicos, designada por Método dos Elementos Finitos Hierárquicos (MEFH). Essas formulações enriquecidas foram implementadas no presente trabalho para elementos de Estado Plano de Tensões. Os elementos foram aplicados para análises de problemas de propagação de ondas. O MEFG se mostra estável numericamente na determinação de curvas de deslocamentos, velocidades e acelerações, diante de qualquer algoritmo de avanço do tempo.*

Keywords: *Método dos Elementos Finitos Generalizado, Método dos Elementos Finitos Hierárquicos, análise dinâmica elastoplástica, propagação de ondas mecânicas, integração numérica.*

1 INTRODUÇÃO

Na Mecânica dos Sólidos é importante conhecer a propagação de ondas mecânicas, dado que os sólidos são submetidos a carregamentos e, por consequência, podem produzir também ondas de tensões ou de pressão. A avaliação da propagação das ondas permite conhecer o comportamento de um sólido. Entretanto, como a velocidade de propagação da onda, em geral, é bastante elevada, a avaliação da resposta estrutural é, as vezes, de difícil realização. A alta velocidade de propagação faz com que as ondas viagem em curto intervalo de tempo, de um ponto de onde o carregamento é aplicado, até outro no domínio ou no contorno do problema. Muitas vezes, essas ondas são refletidas e condicionadas a viajarem em sentido contrário, gerando superposições sucessivas. Do ponto de vista microscópico, a passagem das ondas transmite energia que excita os átomos do material por onde passam. Desse modo, altera o posicionamento atômico dos diferentes pontos, gerando deformações. Caso a energia transportada pela onda seja elevada, as tensões geradas podem exceder o limite da elasticidade do material e, então, inicia-se o processo de plastificação ou de escoamento, que pode ser entendido como uma alteração permanente do posicionamento atômico de diferentes pontos do material, devido ao elevado nível de energia da onda. A fim de delimitar o escopo deste trabalho, considera-se somente o caso de propagação de ondas mecânicas em sólidos - mais especificamente, ondas de deslocamentos e de tensões, não se tratando aqui da propagação de ondas acústicas ou sonoras.

O estudo de propagação de ondas pode ser feito por meio de duas abordagens: a experimental e a numérica, sendo a última o foco deste trabalho. Entre os métodos numéricos consagrados, o Método dos Elementos Finitos (MEF) é um dos mais utilizados e conhecidos. A formulação convencional de elementos finitos apresenta limitações e, para alcançar boa precisão, necessita de aumento do número de graus de liberdade. Para tanto, duas alternativas são bastante conhecidas: aumento do número de elementos (refino h) e aumento do grau dos polinômios interpoladores (refino p). No caso do refino p , ao se elevar a ordem da função de forma, é necessário gerar as novas funções, sem possibilidade de aproveitamento daquelas da ordem anterior. Isso representa uma dificuldade de implementação, pois não há características hierárquicas no método.

Do ponto de vista computacional, é vantajosa a solução que permite aumentar o número de graus de liberdade do problema sem a necessidade de se refazer todas as matrizes geradas em etapas anteriores. Os métodos com características hierárquicas apresentam essa propriedade. Ao se elevar o nível das funções de interpolação, aumenta-se o número de graus de liberdade do problema, mas não há necessidade de se reconstruírem as matrizes dos níveis anteriores. As novas funções aumentam o tamanho das matrizes, mas aproveitam integralmente os termos gerados nas etapas anteriores.

No contexto das formulações enriquecidas de elementos finitos, o presente trabalho implementou e explorou o Método dos Elementos Finitos Hierárquicos (MEFH) e o Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG) em problemas da elastodinâmica.

Este trabalho adota algoritmos de solução temporal, que consistem em processos incrementais do tempo. Esses algoritmos são o método de Newmark e o método alfa generalizado. Nesses algoritmos, as respostas do estágio atual, tais como curvas de deslocamentos, velocidades e acelerações, são determinadas a partir das respostas do estágio anterior. Os algoritmos que empregam este tipo de estratégia de solução apresentam dependências no intervalo de tempo adotado para garantir a estabilidade na solução numérica. Quando menor o intervalo do tempo adotado na solução, maior esforço computacional,

especialmente para solução de problemas da dinâmica elastoplástica. Um dos métodos que apresenta essa dependência é o método de Newmark com aceleração linear. A fim de reduzir o esforço computacional e proporcionar respostas incondicionalmente estáveis, os algoritmos de solução temporal foram modificados, tais como o método Newmark de aceleração média e o método alfa generalizado. As influências que esses algoritmos exercem sobre as formulações enriquecidas e convencionais do MEF é um dos tópicos de análise no presente trabalho.

O presente trabalho visa contribuir para desenvolvimento da formulação enriquecida de elementos finitos, tanto no MEFH quanto no MEFG, aplicados em problemas de propagação de ondas em regime elastoplástico. Estuda-se a relação entre as funções de enriquecimento com os problemas que apresentam descontinuidades matemáticas, assim como a quantidade necessária de pontos de integração numérica para os elementos enriquecidos. Estuda-se também o desempenho das formulações enriquecidas frente ao uso de algoritmos para solução temporal em problemas elastodinâmicos. Para realizar análises numéricas neste trabalho, códigos computacionais foram desenvolvidos em linguagem Fortran.

Na revisão bibliográfica, são referenciadas diversas pesquisas de tópicos diferentes, tais como algoritmo para solução temporal e formulações enriquecidas.

Em 1972, um dos trabalhos pioneiros na área de elastodinâmica foi apresentado por Goudreau e Taylor. Nesse trabalho foram analisados vários aspectos da equação diferencial governante do comportamento dinâmico; diferentes métodos de solução, entre eles os métodos do tipo Newmark e Houbolt. Um dos méritos desse estudo foi a análise de erro inerente aos métodos numéricos envolvidos, relativos a discretização no tempo e a discretização no espaço. A condição de estabilidade foi intensamente investigada e testada nos exemplos contidos no trabalho. Os métodos utilizados pelos autores permitiram capturar a passagem de onda no sólido utilizando-se de elemento de viga. O perfil de onda foi avaliado utilizando-se diferentes métodos de solução. Em 1977, Hilbert et. al. desenvolveram um método, mais tarde conhecido como HHT, baseado no método implícito de Newmark que visa introduzir um parâmetro ajustável para controlar a dissipação numérica. O método foi desenvolvido com o propósito de fornecer estabilidade incondicional para a solução da equação de equilíbrio dinâmico e linear. Segundo o autor, o método de Newmark apresenta oscilação numérica para baixos modos de vibração. Nesse caso, seria conveniente desenvolver outro método com o objetivo de reduzir a oscilação, porém sem afetar modos mais baixos de vibração. Por outro lado, o método HHT introduz amortecimento numérico artificial na solução numérica. Do ponto de vista da formulação do elementos finitos, tal amortecimento artificial faz com que o erro numérico inerente da formulação de elementos finitos seja escondido. O método HHT é simples de programar quando já se tem o algoritmo de Newmark implementado, pelo fato de que apenas um parâmetro é introduzido para calcular gama e beta de Newmark. Segundo os autores, esse parâmetro varia entre 0 e $-1/3$. Em 1993, Chung e Hulbert desenvolveram outro método, o alfa generalizado, baseado no método implícito de Newmark. O novo método visa controlar a dissipação nas frequências de vibração mais elevadas e minimizar a dissipação indesejada nas frequências mais baixas. A diferença entre esse método e o HHT está no número de parâmetros ajustáveis que foram introduzidos para determinar os parâmetros gama e beta de Newmark. O método alfa generalizado possui dois parâmetros ajustáveis, cujos valores são fornecidos pelo próprio usuário do método. A vantagem desse método está na sua abrangência. Dependendo dos valores dos parâmetros, o método alfa generalizado pode se tornar Newmark, ou HHT, ou WBZ.

Em 1996, Melenk e Babuska apresentaram uma nova formulação, conhecida como “Partition of Unity Finite Element Method” (PUFEM). Este é um dos trabalhos pioneiros a introduzir conceitos de Método Sem Malha na formulação de elementos finitos. Essa

formulação permite incorporar as funções conhecidas a priori como funções locais na formulação enriquecida, e apresenta versatilidade em gerar domínio de elementos finitos com o grau de refino desejado, sem a complicação de gerar novamente a malha. Em 2000, Strouboulis, Babuska e Copps desenvolveram estudos sobre combinação do Método de Partição de Unidade e Método convencional dos Elementos Finitos. Essa combinação foi denominada pelos autores como Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG). A diferença entre o MEFG e outros métodos baseados no Método de Partição de Unidade é que ele tem suas funções de enriquecimento anuladas nos pontos nodais. Outro aspecto é que a precisão da integração numérica para matriz de rigidez é controlada de acordo com tipo de função introduzida. Por último, a dependência linear do sistema de equações pode ser resolvida empregando-se métodos numéricos já conhecidos. Em 2001, Duarte et. al. aplicaram a técnica de partição de unidade para análises tridimensionais do problema dinâmico de propagação de trincas. Nesse trabalho, os autores utilizaram diversas funções de enriquecimento, nos elementos por onde passa a trinca. Essas funções podem ser polinomiais ou outras já conhecidas, como, por exemplo, a equação para cálculo de fator de intensidade de tensões. O estudo em questão constata que a técnica de partição de unidade é eficiente na aproximação de campo singular em volta da trinca. Em 2004, Oliveira realizou um estudo comparativo voltado para a determinação das frequências naturais de vigas biapoiada com modelos de Timoshenko e Vlasov. Em suas análises, empregou o Método dos Elementos Finitos Hierárquicos e os resultados obtidos foram comparados ao Método dos Elementos Finitos convencional. Na análise utilizou-se do elemento quadrilateral. No caso de MEF convencional, considerou-se elemento da família Serendipity. As primeiras seis frequências foram determinadas, e o MEFH se mostrou mais próximo ao resultado teórico em comparação ao MEF convencional.

Em 2008, Duarte e Kim apresentaram trabalho relacionado à aplicação de MEFG para análise de trincas, com atenção especial voltada para funções de enriquecimento locais e globais. Funções de enriquecimento locais foram utilizadas para a região próxima da trinca, ou até mesmo na fronteira da trinca, enquanto funções de enriquecimento globais foram aplicadas para o restante do sólido. Os autores observaram que essa combinação provocou uma melhoria bastante significativa em termos de resultado, além de economizar tempo de processamento. Outra observação feita foi que funções de enriquecimento globais praticamente não interferem no efeito gerado pelas funções de enriquecimento locais. Em 2009, Arndt desenvolveu o MEFG em análises dinâmicas de estrutura reticuladas, especificamente para a determinação de frequências naturais de estruturas. Em seu trabalho, os métodos de refino h , p e adaptativo foram analisados e comparados. O autor inicia suas pesquisas com a análise de diferentes funções de enriquecimento para barra, que posteriormente estendeu-se para a viga de Euler-Bernoulli. Foram feitas análises de formulações enriquecidas para problemas de dinâmica de vibrações livres, assim como uma detalhada análise de convergência empregando-se refino p e refino h . Além disso, o autor desenvolveu métodos adaptativos para aprimorar determinação de pares de autovalor e autovetor, utilizando refino p e refino h . No mesmo ano, Belytschko et. al. apresentaram estudo sobre o MEFG e MEFe (Método dos Elementos Finitos estendido) num trabalho de revisão e verificaram a aplicação desses métodos na engenharia. Segundo esses autores, MEFG e MEFe já são utilizados para análise de propagação de trinca, inclusive alguns softwares comerciais já incorporam esses métodos no seu pacote. Porém em outras áreas, como contornos de grãos e deslocamentos de discordância, ainda requerem estudos mais aprofundados.

Em 2010, Arndt et. al. apresentaram estratégias de refino adaptativo com elementos finitos com funções de enriquecimento generalizados, para barras, em problemas de vibrações

livres. Posteriormente, em 2011, Babuska e Banerjee observaram que há uma deficiência inerente ao MEFG, que é a matriz de rigidez mal condicionada devido à introdução de funções de enriquecimento. Para superar esse problema, os autores apresentaram um pequeno ajuste no MEFG de modo a tornar o método ainda mais robusto, tanto quanto o MEF convencional. Essa modificação introduzida recebeu o nome de MEFG estável (Stable Generalized Finite Element). A nova modificação, cujo resultado se mostrou satisfatório, preserva as características de MEFG, porém introduz modificação e critério de seleção para função de enriquecimento.

A partir das revisões bibliográficas apresentadas, é possível perceber que ainda existem muitos tópicos a serem pesquisados e aprofundados para métodos enriquecidos de elementos finitos.

2 ENRIQUECIMENTO DE ELEMENTOS QUADRILATERAIS

De acordo com Solin et. al. (2004), para enriquecimento hierárquico de um elemento quadrilateral de ordem arbitrária κ_q tem seu domínio definido como:

$$\kappa_q = \{r, s \in R^2 ; -1 < r, s < 1\}$$

em que r , e s representam coordenadas naturais do elemento, e q indica elemento quadrilateral.

Para atender à condição de continuidade e definir a função de forma no espaço H^1 , é necessária a condição de continuidade para funções de aproximação, entre elas as funções de MEF convencional e as funções de enriquecimento. Essa condição estabelece um critério a ser atendido na seleção das funções de enriquecimento. Em outras palavras, existe um grau mínimo necessário de aproximação tanto nos vértices quanto nos contornos. Somente as funções que assumem inteiramente valores nulos nos contornos estão livres dessa imposição. Portanto, a base hierárquica para funções de interpolação é composta pelas funções de vértices, de contorno e de campo.

Para os vértices de 1 até 4, essas funções devem assumir valores unitários no seu respectivo vértice bem como valores nulos nos outros. As equações (1a-d) estabelecem as funções de interpolação bilinear.

$$\phi_q^{v1}(r, s) = l_0(r) l_0(s) \quad (1a)$$

$$\phi_q^{v2}(r, s) = l_1(r) l_0(s) \quad (1b)$$

$$\phi_q^{v3}(r, s) = l_1(r) l_1(s) \quad (1c)$$

$$\phi_q^{v4}(r, s) = l_0(r) l_1(s) \quad (1d)$$

em que a função l_1 e l_0 são definidas pelas funções de forma linear unidirecional.

De acordo com Solin et. al. (2004), para compor função de enriquecimento, o grau de polinômio de funções de contorno e de campo deve obedecer à regra mínima do espaço H^1 , tal que a ordem polinomial da função de enriquecimento do contorno deve ser menor ou igual à ordem polinomial da função de enriquecimento do campo. Portanto,

$$p^{e1}, p^{e2} \leq p^{b,2} \text{ e } p^{e3}, p^{e4} \leq p^{b,1}$$

em que p^{e1} , p^{e2} , p^{e3} e p^{e4} dizem respeito à ordem polinomial das funções de enriquecimento do contorno, enquanto $p^{b,1}$ e $p^{b,2}$ são das funções do campo.

Assim, as funções de contorno são dadas pelas equações (2a) - (2d):

$$\phi_{k,q}^{e1}(r,s) = l_0(r)l_k(s), \quad 2 \leq k \leq p^{e1} \quad (2a)$$

$$\phi_{k,q}^{e2}(r,s) = l_1(r)l_k(s), \quad 2 \leq k \leq p^{e2} \quad (2b)$$

$$\phi_{k,q}^{e3}(r,s) = l_k(r)l_0(s), \quad 2 \leq k \leq p^{e3} \quad (2c)$$

$$\phi_{k,q}^{e4}(r,s) = l_k(r)l_1(s), \quad 2 \leq k \leq p^{e4} \quad (2d)$$

e para função de enriquecimento no campo:

$$\phi_{n_1,n_2,q}^b(r,s) = l_{n_1}(r)l_{n_2}(s), \quad 2 \leq n_1 \leq p^{b,1}, \quad 2 \leq n_2 \leq p^{b,2} \quad (3)$$

As equações (2) – (3) passam a gerar as funções de interpolação para os elementos – tanto para o MEFH. Essa estratégia é válida para enriquecimento hierárquico e generalizado a partir do elemento quadrilateral de quatro nós. MEFHs e MEFGs são, por sua vez, utilizadas para denominar formulações enriquecidas feitas a partir do elemento *serendipity*. Este trabalho procurou utilizar o menor grau de enriquecimento para explorar a capacidade de solução dos métodos. As funções de interpolação e superfícies geradas são apresentadas logo abaixo.

Para o MEFH, as funções de interpolação (4a) – (4d) são as funções do MEF convencional; (4e) – (4h) são funções de enriquecimento de contorno; e (4i) é a função de enriquecimento do campo.

$$h_1 = \frac{1}{4}(1+r)(1+s) \quad (4a)$$

$$h_2 = \frac{1}{4}(1-r)(1+s) \quad (4b)$$

$$h_3 = \frac{1}{4}(1-r)(1-s) \quad (4c)$$

$$h_4 = \frac{1}{4}(1+r)(1-s) \quad (4d)$$

$$h_5 = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{3}{2}}(r^2-1)(1+s) \quad (4e)$$

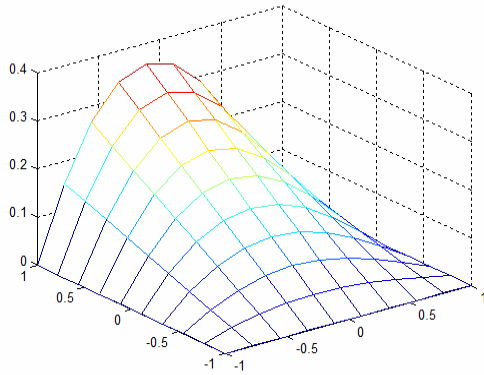
$$h_6 = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{3}{2}}(s^2-1)(1-r) \quad (4f)$$

$$h_7 = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{3}{2}}(r^2-1)(1-s) \quad (4g)$$

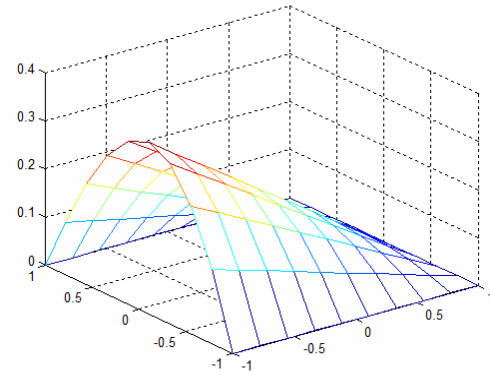
$$h_8 = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{3}{2}}(r^2-1)(1+r) \quad (4h)$$

$$h_9 = \frac{3}{8}(r^2-1)(s^2-1) \quad (4i)$$

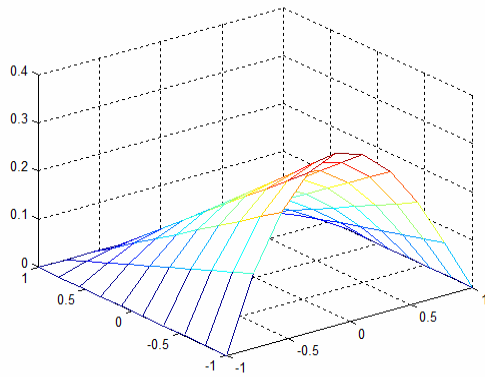
Um aspecto importante a ser atendido pelas funções de enriquecimento de contorno diz respeito à continuidade na fronteira onde ocorre coincidência de funções matemáticas de dois elementos vizinhos.



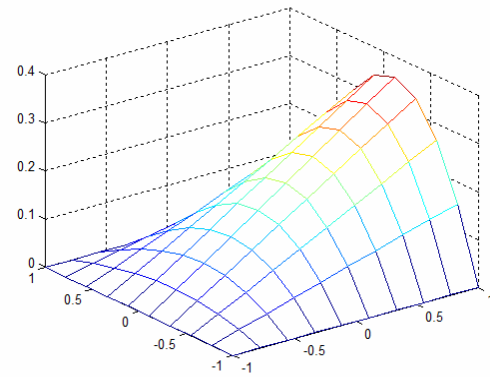
(a). Superfície de MEFG h_5 .



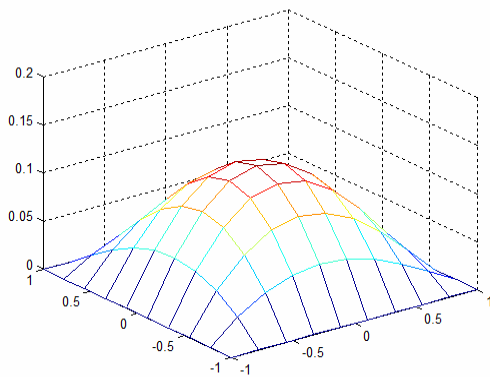
(b). Superfície de MEFG h_6 .



(c). Superfície de MEFG h_7 .



(d). Superfície de MEFG h_8 .



(e). Superfície de MEFG h_9 .

Figura 1. Funções de forma, MEFH.

Para o enriquecimento de elementos finitos generalizados, emprega-se o mesmo desenvolvimento da formulação hierárquica, e consiste no enriquecimento pelo contorno e pelo campo, que precisa atender à condição de continuidade na fronteira entre elementos vizinhos, conforme trabalho apresentado por Torii (2012). Com esta estratégia, segundo Torii (2012), é necessário empregar valores de $\beta_j \geq \pi/2$ para evitar sistemas de equações mal condicionados.

As funções de interpolação nos vértices são as mesmas das equações (4a) – (4d). Para efeito de apresentação, apenas funções de enriquecimento de alguns níveis são mostradas. O enriquecimento pelo contorno é apresentado pelas equações (5a) – (5d) e pelo campo é a equação (5e), de acordo com Torii (2012). Com valor de β_j igual a π , as figuras 1(a) – (e) mostram as superfícies geradas pelas equações (5a) – (5e):

$$h_5 = -\frac{1}{4}(r-1)(1+s)\text{sen}\left(\frac{\beta_j}{2}(1+r)\right) \quad (5a)$$

$$h_6 = \frac{1}{4}(r-1)(s-1)\text{sen}\left(\frac{\beta_j}{2}(1+s)\right) \quad (5b)$$

$$h_7 = \frac{1}{4}(r-1)(s-1)\text{sen}\left(\frac{\beta_j}{2}(1+r)\right) \quad (5c)$$

$$h_8 = -\frac{1}{4}(1+r)(s-1)\text{sen}\left(\frac{\beta_j}{2}(1+s)\right) \quad (5d)$$

$$h_9 = \frac{1}{4}(r-1)(s-1)\text{sen}\left(\frac{\beta_j}{2}(1+r)\right)\text{sen}\left(\frac{\beta_j}{2}(1+s)\right) \quad (5e)$$

Para fazer enriquecimento hierárquico de um elemento *serendipity*, o trabalho de Oliveira (1993) é adotado. Em seu estudo, Oliveira (1993) desenvolveu funções hierárquicas para enriquecimento de contorno, uma função em cada lado, como sendo o primeiro nível de enriquecimento. No segundo nível, é acrescentada mais uma função no contorno, portanto, duas funções em cada lado, mais ainda uma função de enriquecimento no campo. As funções utilizadas por Oliveira (1993) são reproduzidas a seguir. O presente trabalho tese adotou essas mesmas funções para proceder ao enriquecimento hierárquico, MEFHs, que serve como comparação para o enriquecimento generalizado.

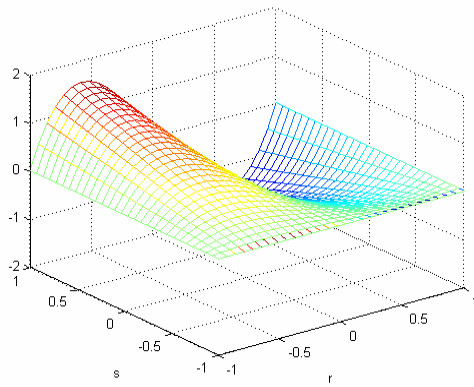
As equações (6a) – (6d) são de enriquecimento de contorno; as superfícies geradas de cada equação são mostradas nas figuras 2 (a) – (d).

$$h_5 = 2(r^3 - r)(1+s) \quad (6a)$$

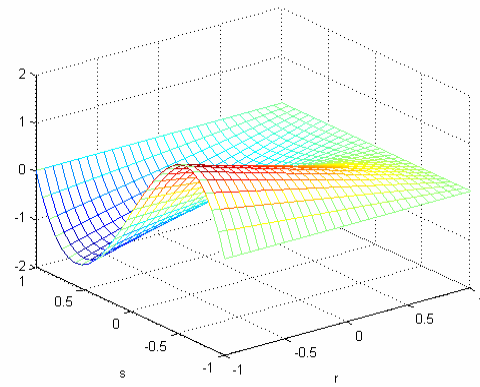
$$h_6 = 2(s^3 - s)(1-r) \quad (6b)$$

$$h_7 = 2(r^3 - r)(1-s) \quad (6c)$$

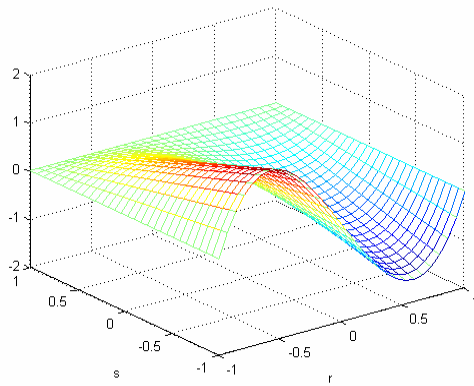
$$h_8 = 2(s^3 - s)(1+r) \quad (6d)$$



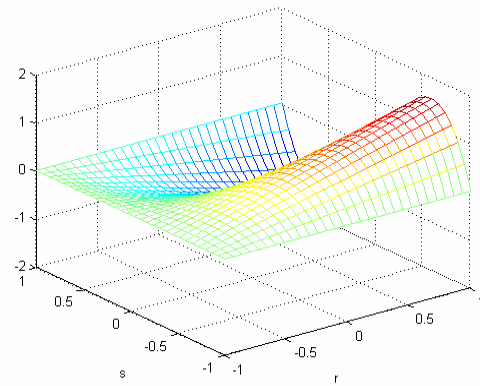
(a). Superfície de MEFHs h_5 .



(b). Superfície de MEFHs h_6 .



(c). Superfície de MEFHs h_7 .



(d). Superfície de MEFHs h_8 .

Figura 2. Superfícies de MEFHs, primeiro nível de enriquecimento.

Para enriquecimento de elemento *serendipity*, utilizando-se a formulação de partição de unidade, MEFGs, as funções propostas por Arndt (2009) são modificadas de modo a se adequarem ao fato de que o elemento tem quatro nós nos vértices, e outros quatro nós, um em cada aresta. Neste trabalho, a opção por empregar as funções propostas por Arndt (2009) se justifica no fato de que elas são contínuas no domínio do elemento, assim como suas derivadas. Outro aspecto a ser atendido é a necessidade de essas funções assumirem valores nulos nos pontos nodais. Assim, o sentido físico dos resultados nodais não será afetado.

As equações (7a) – (7d), apresentadas a seguir, mostram as funções propostas nesta tese para o elemento *serendipity*:

$$h_5 = \frac{1}{4}(1-r)(1+s)\text{sen}(\beta_j(1-r)) \quad (7a)$$

$$h_6 = \frac{1}{4}(r-1)(s-1)\text{sen}(\beta_j(1+s)) \quad (7b)$$

$$h_7 = \frac{1}{4}(r-1)(s-1)\sin(\beta_j(1+r)) \quad (7c)$$

$$h_8 = \frac{1}{4}(1+r)(1-s)\sin(\beta_j(1+s)) \quad (7d)$$

para $\beta_j = j\pi$; $j = 1, 2, 3, 4, \dots$. As figuras 3(a) – (d) mostram as superfícies geradas pelas equações propostas, com $\beta_j = \pi$.

Considere o enriquecimento de um elemento quadrilateral de quatro nós. Segundo Solin et. al. (2004), as variáveis a serem determinadas são expressas como sendo uma somatória de funções convencionais com funções de enriquecimento no contorno e no campo:

$$\tilde{u}_e(r, s) = \tilde{u}_e^v(r, s) + \tilde{u}_e^c(r, s) + \tilde{u}_e^b(r, s) \quad (8)$$

sendo $\tilde{u}_e(r, s)$ a função de aproximação na coordenada local do elemento, $\tilde{u}_e^v$ variáveis nodais situadas nos vértices, $\tilde{u}_e^c$ variáveis situadas nos contornos e por último, $\tilde{u}_e^b$ variáveis situadas no campo.

A $\tilde{u}_e^v$ é determinada pelas funções de interpolação convencionais, e $\tilde{u}_e^c$ é determinada por:

$$\tilde{u}_e^c = \sum_{j=1}^4 u^{cj}, \text{ sendo } u^{cj} = \sum_{k=2}^{p^{ej}} b_{k,q}^{ej} \phi_{k,q}^{ej} \quad (9)$$

e

$$\tilde{u}_e^b = \sum_{n1=2}^{p^{b,1}} \sum_{n2=2}^{p^{b,2}} b_{n1,n2,q}^b \phi_{n1,n2,q}^b \quad (10)$$

onde $b_{k,q}^{ej}$ e $b_{n1,n2,q}^b$ indicam variáveis locais geradas em função do enriquecimento e que não desempenham papéis físicos, e são determinados sem desempenhar nenhum significado físico até então conhecido.

A formulação de enriquecimento desenvolvida até então, do elemento quadrilateral, será empregada visando analisar sua robustez e as condições de continuidade. Para esta finalidade, será feita uma análise de autovalores e autovetores a serem determinados a partir de matriz de rigidez e matriz de massa. Essa metodologia é conhecida como uma ferramenta eficiente para verificar a qualidade do elemento. O resultado da análise será apresentado no próximo capítulo.

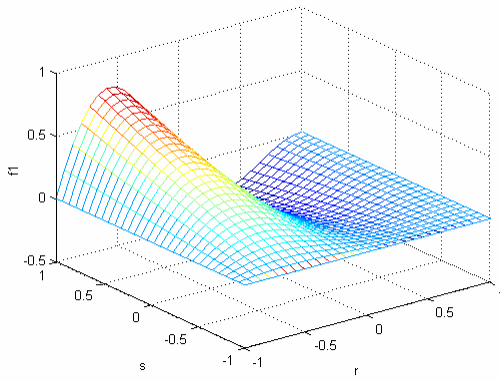
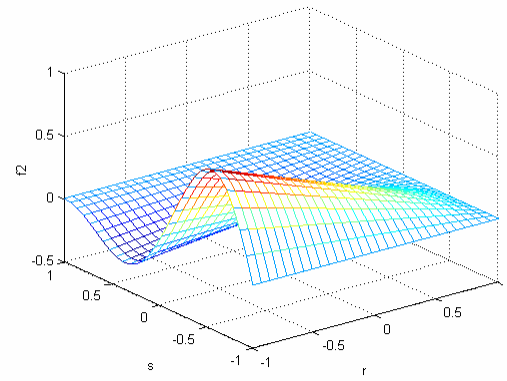
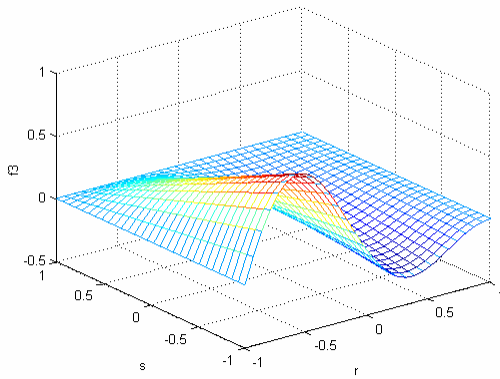
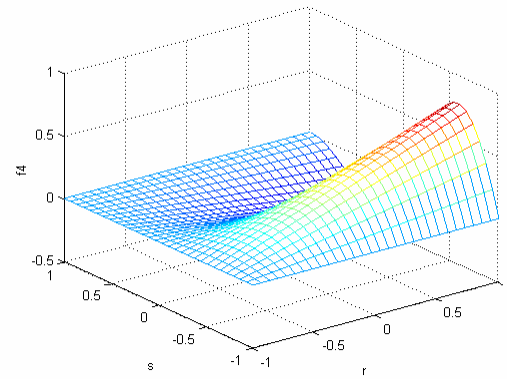
(a). Superfície de MEFs h_5 .(b). Superfície de MEFs h_6 .(c). Superfície de MEFs h_7 .(d). Superfície de MEFs h_8 .

Figura 3. Superfícies de MEFs, primeiro nível de enriquecimento.

3 APLICAÇÕES

3.1 Problema de EPT usando elemento quadrilateral e submetido à força do tipo *Heaviside*.

Nos próximos exemplos, casos de estado plano de tensão serão analisados, utilizando-se elemento quadrilateral de 4 nós (MEFn), de 8 nós (MEFs), de 9 nós (MEFQ), assim como elementos enriquecidos, a partir de 4 nós (MEFG e MEFH) e de 8 nós (MEFGs e MEFHs).

Este exemplo analisa uma barra submetida $E = 210\text{GPa}$; $\rho = 7830\text{kg/m}^3$; tensão de escoamento ao carregamento tipo *Heaviside*. $\sigma_y = 414\text{MPa}$. $\nu = 0,3$. Comprimento de 1 m; altura de 0,1 m, espessura de 0,05 m, conforme mostrada na figura 4. Somente o método de alfa generalizado é adotado para solução temporal, com raio espectral de 0,6. Uma força de magnitude de -1000N é aplicada na extremidade livre da

viga de 0s até 5×10^{-3} s. A análise foi feita com 5000 passos do tempo, sendo 1×10^{-6} s cada. Todos os resultados são obtidos no nó da extremidade livre onde a força está aplicada, exceto os resultados de tensões e deformações que são obtidos na extremidade engastada.

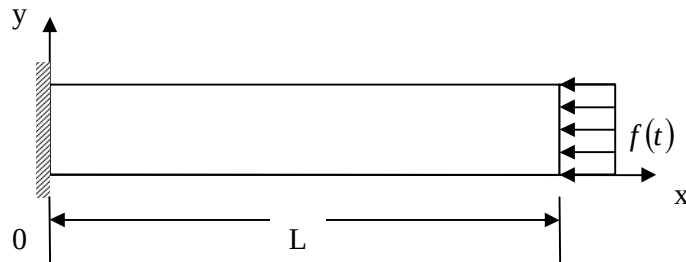


Figura 4. Barra submetida ao carregamento tipo Heaviside.

Primeiramente, os resultados obtidos do elemento convencional são comparados com os resultados obtidos pela solução analítica para o caso de viga unidirecional, de Nowacki (1963). Adotou-se a solução analítica apresentada por Nowacki (1963), considerando-se a falta de solução analítica para o estado plano de tensão. A malha adotada pelo MEFn é de 50 elementos, com 156 graus de liberdade. Para MEFs é de 15 elementos, 156 graus de liberdade. Os resultados apresentados pelos elementos MEFn e MEFs serão comparadas a seguir com as soluções obtidas com elementos enriquecidos.

O elemento quadrilateral de quadro nós utilizado neste exemplo é enriquecido pela formulação de partição de unidade, MEFg. Os resultados para deslocamentos e velocidades são mostrados nas figuras 5 e 6. Nesta análise, adotou-se $\beta = \pi/2$. O parâmetro da função de enriquecimento deve garantir continuidade para as funções de enriquecimento entre elementos adjacentes, portanto, $\beta \geq \pi/2$ (TORII, 2012). A figura 5 registra que o MEFg é o que mais se aproxima do resultado de referência, mais do que o MEFH e o MEFn. Na figura 6, observa-se que o MEFg é o elemento enriquecido que oferece maior estabilidade, mais que o MEFH, e menos dissipativo que o MEFn.

As figuras 7 e 8 mostram os resultados obtidos pelo MEFgs e MEFHs, para os quais se usou malha de 9 elementos, 152 graus de liberdade, em comparação com os MEFs. O parâmetro β utilizado para o MEFgs é igual a π . A figura 7 mostra curva de deslocamentos. É possível observar que o MEFgs apresenta melhores resultados que o MEFs; o MEFHs, por sua vez, apresentam uma pequena diferença. A figura 8 registram curva de velocidades versus tempo. Observe-se que tanto os elementos enriquecidos quanto os convencionais apresentam oscilações numéricas no ponto próximo da descontinuidade. Aparentemente os elementos enriquecidos, com as funções de enriquecidas adotadas, não são capazes de minimizar essa oscilação numérica.

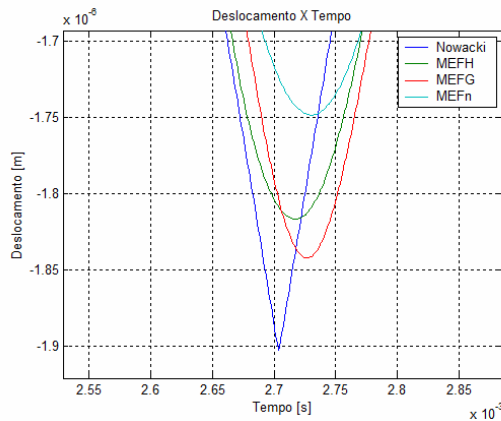


Figura 5. Deslocamento do exemplo 3.1, resultado obtido por MEFn, MEFG e MEFH.

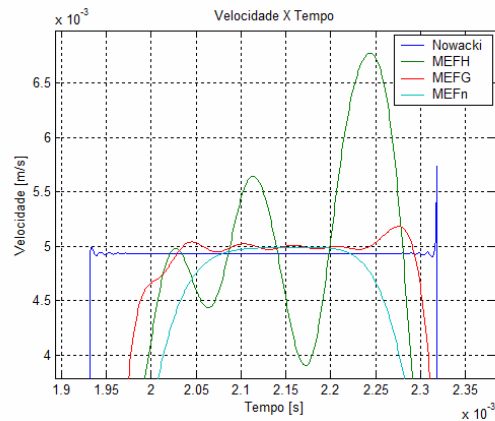


Figura 6. Velocidade do exemplo 3.1, resultado obtido pelo MEFn, MEFG e MEFH.

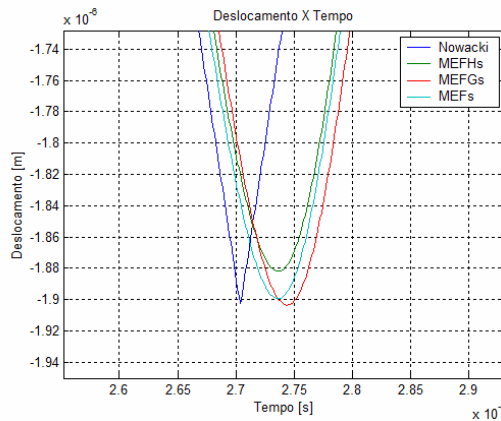


Figura 7. Deslocamento do exemplo 3.1, resultado obtido pelo MEFs, MEFGs, MEFHs.

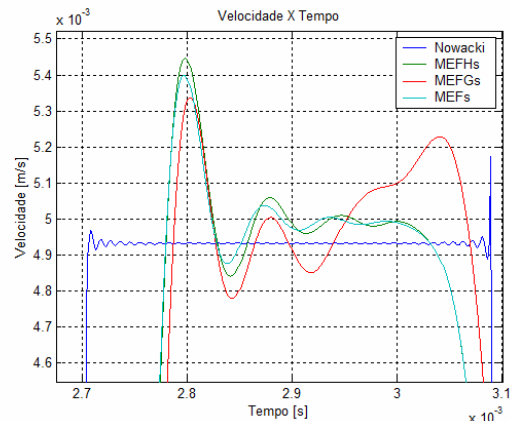


Figura 8. Velocidade do exemplo 3.1, resultados obtidos pelo MEFs, MEFGs, MEFHs.

3.2 Viga biapoiada em EPT submetida à força de *Heaviside* utilizando-se elemento quadrilateral e análise dinâmica elastoplástica.

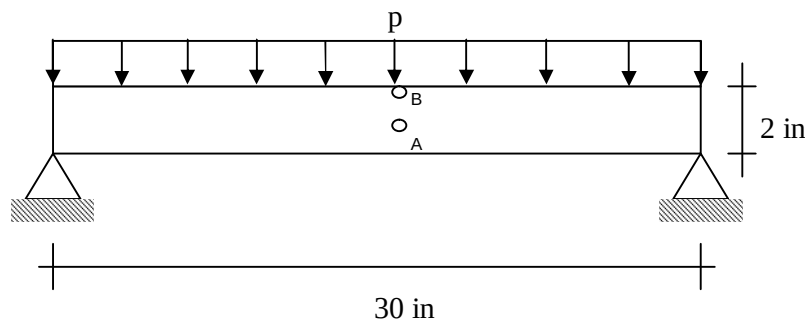


Figura 9. Representação esquemática da análise elastoplástica da viga biapoiada.

Este exemplo tem por objetivo aplicar os elementos enriquecidos para análise dinâmica elastoplástica e comparar os resultados obtidos com elementos convencionais. No primeiro instante, apenas a malha uniforme é adotada, com integração numérica de quadratura de Gauss de 30x30 pontos. O exemplo a seguir é um caso clássico na análise dinâmica elastoplástica, estudado por Machado (1983) e Costa (1978), dos quais os dados de referência foram reproduzidos. Excepcionalmente, nesta aplicação serão consideradas as unidades do sistema FPS.

Considere-se uma viga representada pela figura 9 com tensão de escoamento $\sigma_y = 50 \text{ kip/in}^2$, módulo de Young $E = 30000 \text{ kip/in}^2$, coeficiente de Poisson $\nu = 0.3$, densidade $\rho = 0.733 \times 10^{-3} \text{ lb.s}^2/\text{in}^4$, espessura de 1 in. Sobre a viga atua uma força distribuída de $p = 0.75 p_o (\text{lb/in}^2)$, onde $p_o = \frac{2\sigma_y h^2}{L^2}$. Para reduzir esforço computacional na análise, apenas $\frac{1}{4}$ do modelo foi considerado, o que corresponde a seis elementos, como mostrado em Machado (1983). O algoritmo adotado para marcha do tempo é o método de Newmark de aceleração média, que proporciona estabilidade incondicional. O intervalo do tempo adotado é de $5 \times 10^{-5} \text{ s}$, com 1000 passos de tempo. O ponto A está situado no meio da viga, na coordenada global (15; 1). O ponto B é um ponto de integração numérica, situado na coordenada natural do elemento (0,9061798; 0,9061798) para 30x30 pontos de integração numérica.

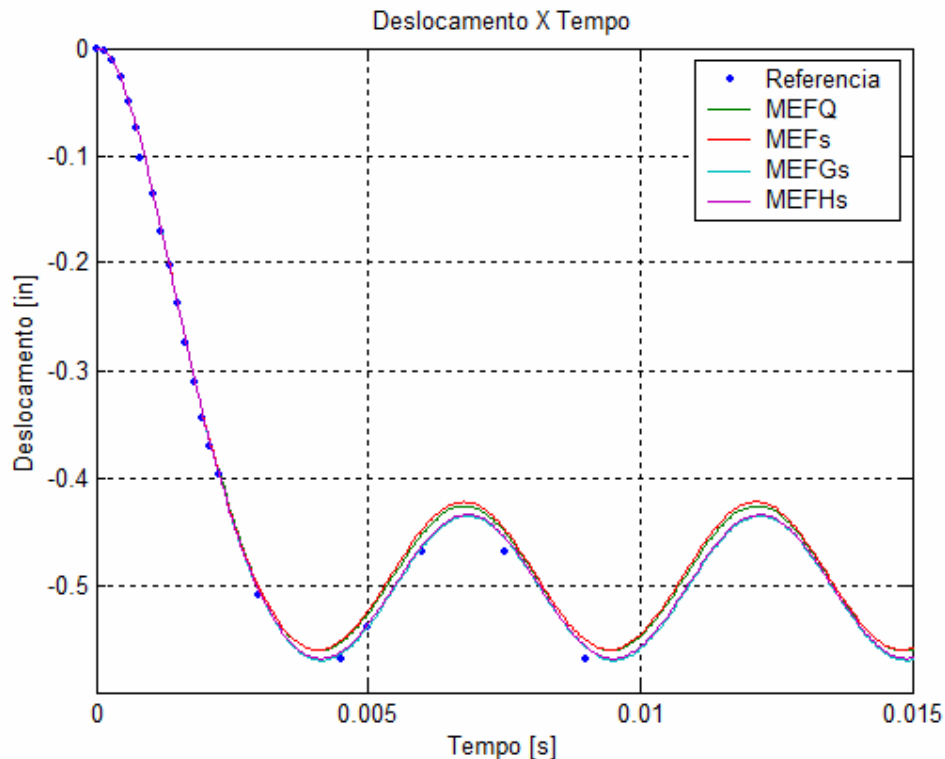


Figura 10. Deslocamento do nó situado no meio da viga, ponto A.

A curva de deslocamentos versus tempo é determinada no nó situado no ponto A, posicionado sobre o eixo neutro da viga, da figura 9, e representada na figura 10. É possível observar que os elementos convencionais e enriquecidos apresentam a mesma tendência da curva, com um pouco de diferença entre as curvas. Quando comparados ao resultado de referência, todos os métodos se aproximam dos resultados da referência. Por outro lado, a tensão axial é calculada no ponto de integração situada no ponto B, da figura 9, e representada pela figura 11. Todos os modelos apresentam plastificação, como mostrado nos trabalhos de Machado (1983) e Costa (1978). No momento do escoamento, o MEFQs e o MEFHs apresentam oscilação numérica menor no que diz respeito aos elementos convencionais. A distribuição de tensões ao longo do comprimento da viga tanto no regime elástico quanto no regime plástico, ou até mesmo, no momento de descarregamento, pode ser vista nas figuras 12(a) – (c). Os resultados mostrados são referentes ao bordo superior da viga, onde o carregamento distribuído é aplicado. A figura 12(a) mostra o momento em que a viga é carregada. Todos os métodos apresentam curvas semelhantes em termos de magnitude. Logo depois, no instante de 0,003s, acontece a redistribuição de tensão (ver figura 12(b)). Pois, nesse momento, a viga se encontra no regime elástico plástico perfeito, e uma porção da viga estava plastificada. Essa plastificação teve início no 0,0015 s, aproximadamente, e se propagou do ponto central da viga para as extremidades, que se encontram apoiadas. Quando chegou em 0,003 s, a região de plastificação já havia ocupado mais da metade da viga, como mostra a figura 12(b). A curva da distribuição de tensão determinada pelos elementos convencionais registra oscilação na magnitude da tensão na região plastificada, enquanto os elementos enriquecidos não apresentam mesmo problema. A figura 12(c) mostra o instante em que a viga é descarregada. Os resultados dos elementos convencionais mostram irregularidades na magnitude da tensão determinada, enquanto os resultados dos elementos enriquecidos mostram estabilidade.

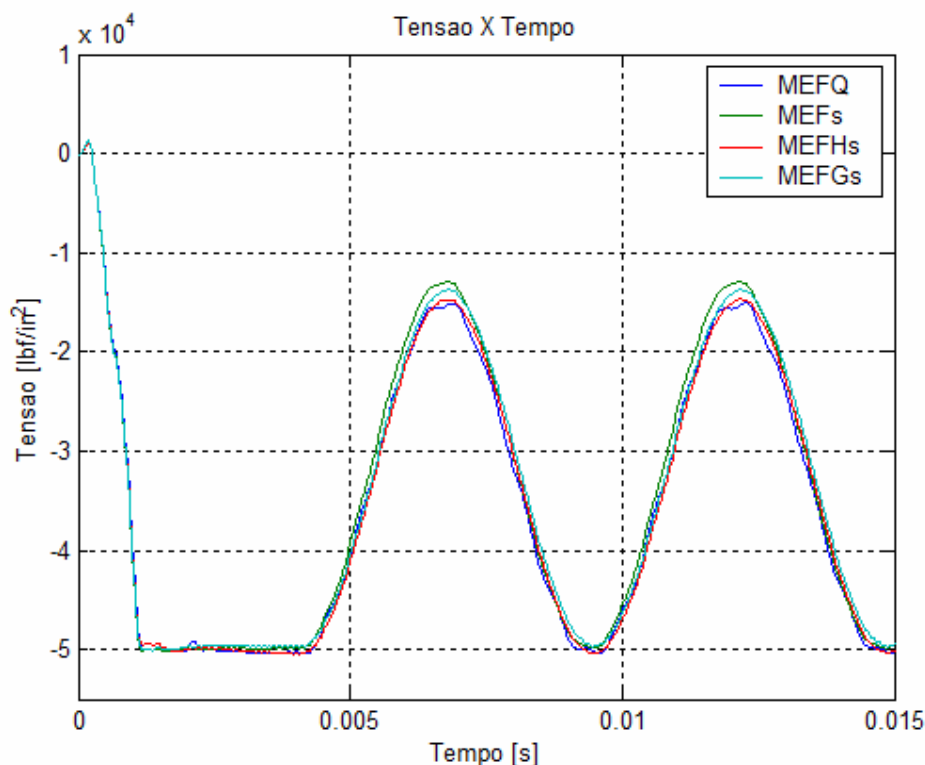
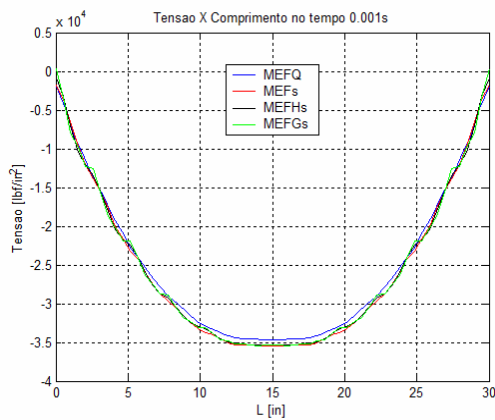
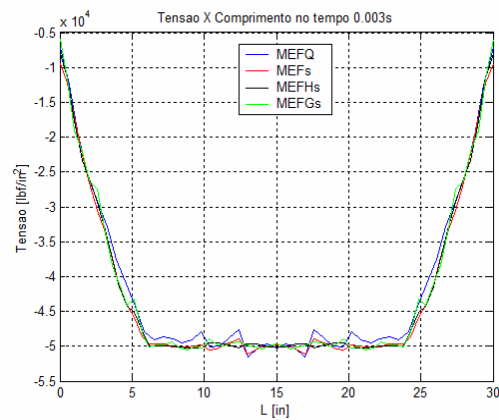


Figura 11. Tensão axial do ponto B.

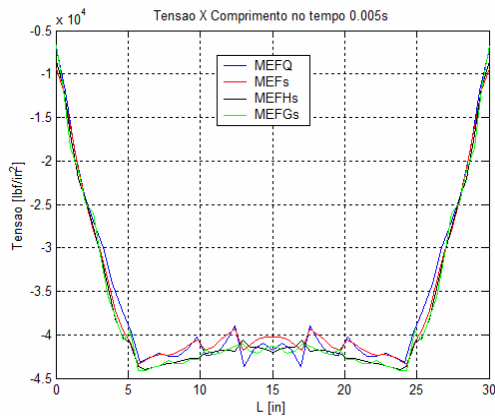
Por outro lado, os elementos enriquecidos também apresentam alguns problemas como mostram as figuras 13 (a) – (f). No primeiro instante, no momento em que o tempo é de 0,001s, a distribuição de tensão longitudinal é registrada pelas figuras 13 (a) e (b), pelo MEFQs e MEFHs respectivamente. No bordo superior da viga, a distribuição de tensão é mais uniforme, especialmente para os MEFQs, em comparação à ao bordo inferior da viga. Esse problema se intensifica no momento de plastificação (ver figuras 13 (c) e (d)). A região superior das figuras, representada pela cor azul, indica o espaço onde ocorre a plastificação devido à compressão. Na região abaixo, onde não ocorre plastificação, existe irregularidade na distribuição de tensão. A mesma situação ocorre quando a viga está sendo descarregada, como mostra as figuras 13 (e) e (f). Entretanto, a magnitude da irregularidade é pequena comparada com máxima tensão, no instante em que essa irregularidade é observada. Nesse sentido, não compromete o resultado obtido.



(a). Distribuição de tensão ao longo de x, 0,001s.



(b). Distribuição de tensão ao longo de x, 0,003s.



(c). Distribuição de tensão ao longo de x, 0,005s.

Figura 12. Distribuição de tensão ao longo da viga em instantes diferentes.

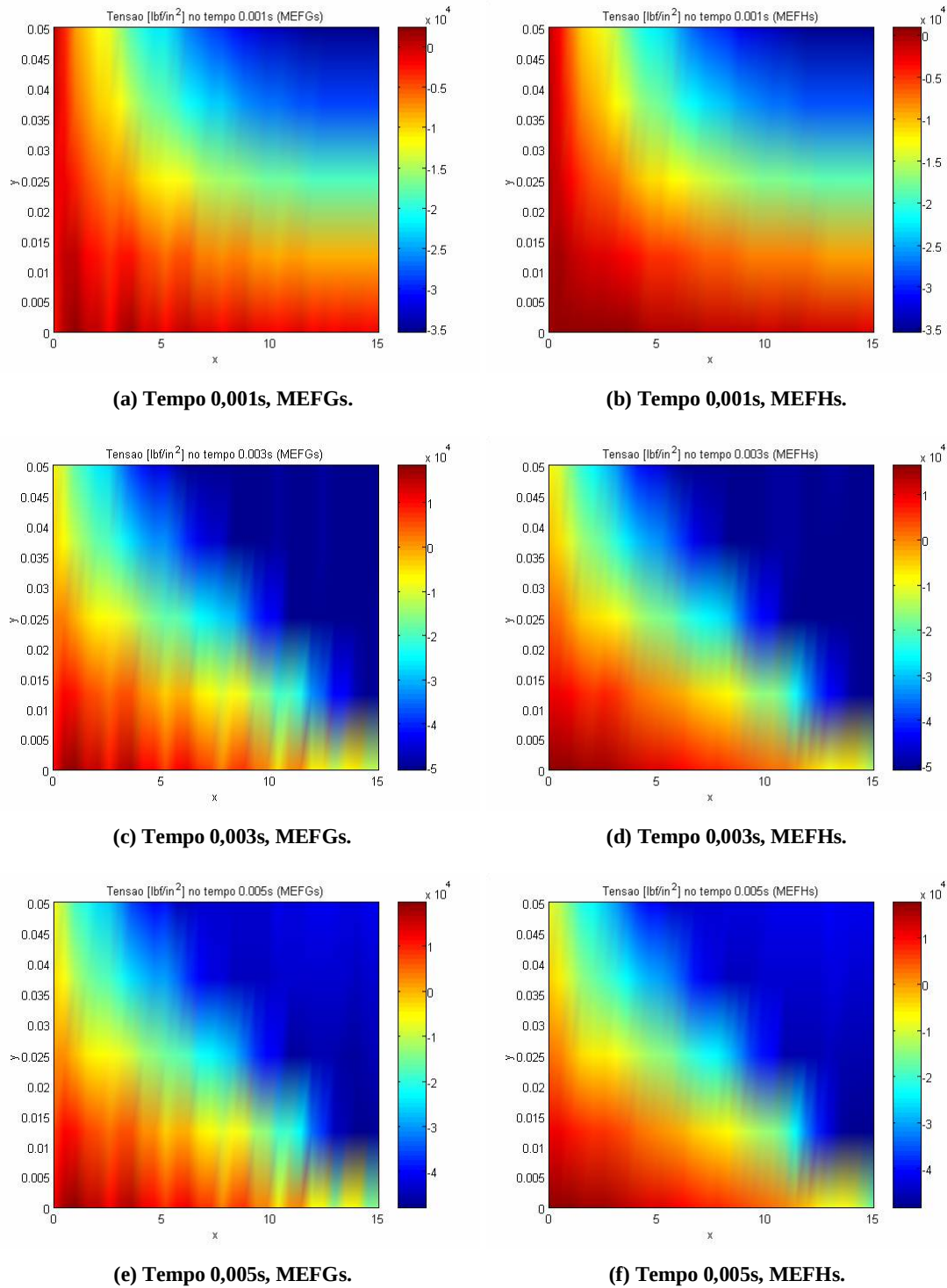


Figura 13. Distribuição de tensão, MFGs e MEFHs.

4 CONCLUSÕES

Este trabalho desenvolveu análises elastodinâmicas em meios sólidos voltadas para problemas de propagação de ondas mecânicas. Foram implementados elementos EPT quadrilateral. Procedeu-se à discretização do tempo utilizando-se diferentes algoritmos, tais como o de Newmark, HHT e alfa generalizado. A discretização do espaço, por sua vez, fez-se a partir dos elementos convencionais e elementos enriquecidos. Dois foram os métodos de enriquecimento adotados - enriquecimento hierárquico e de partição da unidade - para se proceder à análise por elementos finitos. O desempenho foi considerado com vistas a avaliar os elementos convencionais e enriquecidos na relação com diferentes algoritmos de marcha do tempo, incluindo a ocorrência de plastificação.

Para análise elastodinâmica com modelos bidimensionais considerou-se o caso de estado plano de tensões, com elementos quadrilaterais. O enriquecimento foi feito com elementos quadrilaterais de quatro e de oito nós, ambos através de funções hierárquicas e funções generalizadas baseadas na partição de unidade. O MEFH de quatro nós emprega funções de Lobatto e apresentou oscilações numéricas na região próxima da descontinuidade matemática, tal como no problema de barra. O MEFG é o que fornece maior estabilidade numérica entre todos os elementos. Tanto o MEFH quanto o MEFG fornecem melhora significativa na determinação da passagem de ondas em relação aos elementos convencionais de quatro nós. Entretanto, como tais elementos enriquecidos são desenvolvidos a partir de elementos convencionais de quatro nós, apresentam também necessidade de refino h ou p de níveis de enriquecimento para obter resultado satisfatório em comparação com resultados de referência.

O algoritmo de alfa generalizado com raio espectral de 0,6 combinado com o processo iterativo de Newton-Raphson se mostrou capaz de solucionar a propagação de ondas de tensões elastoplásticas apesar de apresentar alguns erros numéricos em comparação com os resultados de referência. A fonte para esses erros numéricos pode ser a do refino da malha, ou intervalo de tempo muito grande.

Referências

- Goudreau, G. L. & Taylor, R. L. Evaluation of numerical integration methods in elastodynamics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 2, pg. 69-97, 1972.
- Hilbert, H. M., Hughes, T. J. R. & Taylor, R. L. Improved numerical dissipation for time integration algorithms in structural dynamics. *Earthquake engineering and structural dynamics*, vol. 5, pg 283-292, 1977.
- Chung, J. & Hulbert, G. M. A time integration algorithm for structural dynamics with improved numerical dissipation: the generalized – alfa method. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 60, pg 371-375, 1993.
- Melenk, J. M. & Babuska, I. The partition of unity finite element method: basic theory and applications. *Research Report No. 96-01*, 1996.
- Strouboulis, T., Babuska, I. & Copps, K. The design and analysis of the generalized finite element method. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, vol. 181, pg. 43-69, 2000.
- Duarte, C. A., Hamzeh, O. N., Liszka, T. J. & Tworzydło, W. W. A generalized finite element method for the simulation of three dimensional dynamic crack propagation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 190, pg. 2227 – 2262, 2001.

Oliveira, W. Um elemento finito hierárquico para análise dinâmica p-adaptativa de placas espessas, Tese de Doutorado, UNICAMP, 1993.

Oliveira, W. Um processo de refinamento do método dos elementos finitos para análise de vibrações livres de vigas. SIMMEC, 2004.

Duarte, C. A. & Kim, D. J. Analysis and applications of a generalized finite element method with global-local enrichment functions. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 197, pg. 487 – 504, 2008.

Arndt, M. O método dos elementos finitos generalizados aplicado à análise de vibrações livres de estruturas reticuladas. Tese de Doutorado, PPGME, UFPR, 2009.

Belytschko, T., Gracie, R. & Ventura G. A review of extended/generalized finite element methods for material modeling. *Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering*, v. 17, pg. 1-31, 2009.

Arndt, M., Machado, R. D. & Scremin, A. An adaptive generalized finite element method applied to free vibration analysis of straight bars and trusses. *Journal of Sound and Vibration*, vol. 329, pg. 659 – 672, 2010.

Babuska, I. & Banerjee, U. Stable generalized finite element method. ICES report 11-07, 2011.

Solin, P. Segeth, K. & Dolezel, I. Higher-order finite element methods. Chapman & Hall/CRC, 2004.

Torii, A. J. Análise dinâmica de estruturas com o método dos elementos finitos generalizado. Tese de Doutorado, UFPR, 2012.

Torii, A. J. Machado, R. D. Structural dynamic analysis for time response of bars and trusses using the generalized finite element method. *Latin American Journal of Solids and Structures*, vol. 9, pg. 309 – 337, 2012.

Machado, R. D. Análise dinâmica não linear de sistemas rígido flexíveis. Dissertação de Mestrado, UFRJ, 1983.

Costa, A. M. Análise dinâmica elasto-plástica transiente de curta duração incluindo os efeitos da interação solo-fluido-estrutura. Dissertação de Mestrado, Pós-graduação de engenharia de UFRJ, 1978.

Goossens, M., Mittelbach, F., & Samarin, A., 1994. *The LaTeX Companion*. Addison-Wesley.

Hinton, E., Sienz, J., & Afonso, S. M. B., 1995. Experiences with Olhoff's 'exact' semi-analytical algorithm. In Olhoff, N. & Rozvany, G. I. N., eds, *First World Congress of Structural and Multidisciplinary Optimization (WCSMO-1)*, pp. 41–46.

Mattiasson, K., 1980. Numerical results from large deflection beam and frame problems analysed by means of elliptic integrals. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 17, n. 1, pp. 145–153.

Ramm, E., 1981. Strategies for tracing the nonlinear response near limit points. In Wunderlich, W., Stein, E., & Bathe, K. J., eds, *Nonlinear Finite Element Analysis in Structural Mechanics*, pp. 63–89. Springer-Verlag.

Sienz, J., 1994. Integrated Structural Modelling, Adaptive Analysis and Shape Optimization. PhD thesis, University of Wales/Swansea.