



## INFLUÊNCIA DO AMORTECIMENTO VIA CIRCUITOS SHUNT NA ESTABILIDADE DINÂMICA E AEROELÁSTICA DE PAINÉIS PLANOS.

**Leandro de Souza Leão**

**Antônio Marcos G. de Lima**

**André Garcia Cunha Filho**

[leandro.leao.eng@gmail.com](mailto:leandro.leao.eng@gmail.com)

[amglima@mecanica.ufu.br](mailto:amglima@mecanica.ufu.br)

[andregc@gmail.com](mailto:andregc@gmail.com)

Universidade Federal de Uberlândia (UFU)

Av. João Naves de Ávila, 2121, Sta Mônica, CX 593, 38408-100, Uberlândia, MG, Brasil

**Maurício Vicente Donadon**

[donadon@ita.br](mailto:donadon@ita.br)

Instituto Tecnológico de Aeronáutica (ITA)

Pç Eduardo M.al Gomes, 50, Vila das Acácias, 12228-900, São José dos Campos, SP, Brasil

**Abstract.** *Dynamic and aeroelastic stability for aeronautical structures has a fundamental importance in projects of engineering. One must know, a priori, the answers for being expected of these systems, so that they are able to perform their tasks with success, reliability and security. With increasing engineering challenges, weight reduction and smaller level of vibrations, without loss of efficiency, represent an inexhaustible source of work and research. For this purpose, composite structures figure as an excellent alternative, because they are lighter and possess better mechanical properties. As light structures tend to be flexible, so it is necessary that, the structure itself shows the ability of dissipating energy and stabilizing itself such on the dynamic and aeroelastic field. In this sense, smart structures are presented as an excellent alternative, being able to stabilize satisfactorily these new structures. This paper aims to propose a panel which is able to combine low weight, good mechanical properties, besides presenting good dynamic and aeroelastic stability, without requiring external power source of energy to carry out its control. So that, it will be tested a multimodal electrical resonant shunt circuit, in series with the piezoelectric patch. This represents a passive form of control and has the advantages of being very simple, reliable and low cost.*

**Keywords:** *passive control, electrical shunt circuit, aeroelasticity, composite structures.*

## 1 INTRODUÇÃO

À medida que a tecnologia avança, são obtidas estruturas mais leves, por isso flexíveis, submetidas a maiores velocidades. Isto induz problemas de vibrações cada vez mais complexos (Rocha, 1999). Fica claro, portanto a necessidade, cada vez maior, de estruturas leves, mas que possam suportar altos esforços mecânicos, tanto estáticos, quanto dinâmicos, nas mais variadas aplicações de engenharia.

Os materiais compósitos vêm de encontro a estas necessidades, de redução de peso, sem perda de suas propriedades mecânicas. Por material compósito, entende-se um novo material, formado por dois ou mais materiais, mais adaptado a um projeto específico (Faria, 2006) (Silva, 2014).

As estruturas inteligentes são compostas por materiais inteligentes, que respondem, de forma conhecida, a estímulos externos de origem elétrica, térmica, mecânica, magnética, dentre outros. Por ser possível controlar estas respostas, acoplando mais de um tipo de energia, estes materiais passam a ter um caráter não somente estrutural, mas também funcional, sendo bastante empregados em aplicações tecnológicas (Silva, 2013). Segundo (Callister, 2008), chamar um material de inteligente é dizer que ele é capaz de sentir mudanças no ambiente e responder a elas de forma previsível, como também ocorre nos seres vivos.

Sendo assim, relacionar o uso de materiais compósitos e inteligentes, confere à estrutura a capacidade de atender a severas solicitações no sentido de baixo peso, alta resistência mecânica e baixo nível vibratório. Esta estratégia, por suas ótimas perspectivas, têm motivado bastantes esforços em vários temas de pesquisa (Donadon, 2000). Dentro do ramo dos materiais inteligentes, destaca-se um tipo de material, o piezelétrico. Estes materiais acoplam propriedades mecânicas e elétricas, ou seja, geram uma *d.d.p.* (*diferença de potencial*) quando deformados mecanicamente, ou se deformam quando submetidos a uma *ddp*.

No contexto do controle de vibrações e ruído, podem-se utilizar de técnicas passivas, ativas, semi-ativas ou híbridas. Neste trabalho, serão utilizadas as técnicas de controle passivo, que são as mais simples e confiáveis. Elas simplesmente incorporam dispositivos que dissipam parte da energia injetada no sistema pelo carregamento dinâmico/aerodinâmico. Possuem baixo custo efetivo e não dependem de fonte externa de energia. Por isso, têm sido amplamente utilizadas industrialmente (Lima, 2006), (Carneiro, 2009).

Neste trabalho, os materiais que dissiparão a energia do sistema são os circuitos elétricos shunt. Os tipos mais comuns são: resistivos (R), ressonantes (RL) e capacitivos (C). Na própria Fig. 1 são explicadas brevemente as principais características de cada tipo de shunt, dentre os três citados. O circuito shunt resistivo possui um comportamento físico semelhante ao observado nos materiais viscoelásticos; já o circuito shunt ressonante, se aproxima, fisicamente de um absorvedor dinâmico de vibrações, necessitando ser sintonizado de acordo com o(s) modo(s) que se deseja(m) combater; por fim, os circuitos shunt capacitivos atuam variando diretamente na rigidez mecânica da pastilha piezelétrica; variando por fim, a rigidez total da estrutura que o recebe.

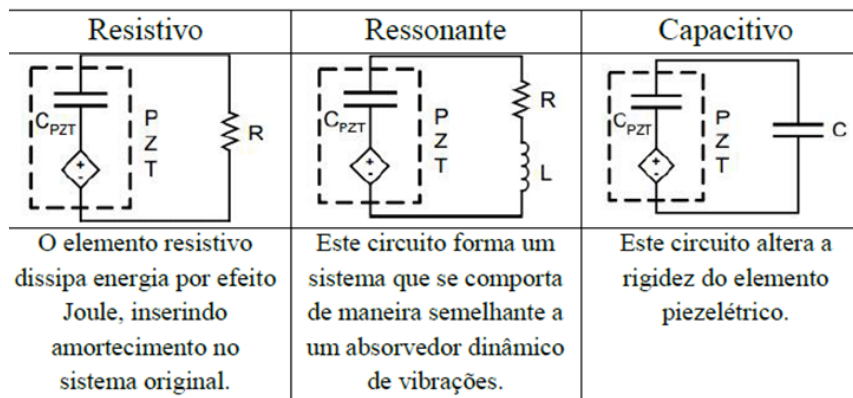


Figura 1: Principais tipos de circuitos shunt. Adaptado de (Viana, 2005).

Os circuitos elétricos shunt tiveram seu início, com o amortecimento de um único modo, como pode ser visto no trabalho de seus pioneiros (Hagood and von Flotow, 1991). Alguns anos depois, (Holkamp, 1994) propôs um circuito elétrico, com vários ramos contendo capacitores, resistências e indutâncias e que era capaz de, utilizando apenas uma pastilha piezelétrica, de amortecer mais de um modo. Posteriormente, (Wu, 1998) propôs um novo circuito elétrico shunt multimodal, na topologia em paralelo. O mesmo autor, no mesmo ano, propôs um circuito ainda mais simples e que cumpria o mesmo papel. (Fleming, 2002) propôs um circuito, semelhante, porém agora, na topologia em série. Ambos os circuitos multimodais ressonantes possuem eficiências semelhantes, seja na topologia em série, seja na topologia em paralelo.

O circuito que será estudado neste trabalho é o shunt ressonante multimodal, na topologia em série. Ele será avaliado no amortecimento estrutural e aeroelástico de um painel aeronáutico fino. Por amortecimento estrutural entenda-se reduzir as amplitudes de vibração da estrutura e por amortecimento aeroelástico, entenda-se aumentar a velocidade de ocorrência do fenômeno *flutter*, indesejado durante a operação de aeronaves. É necessário o uso de um circuito multimodal, para que ele seja sintonizado para os dois modos naturais da estrutura que tendam a se coalescer (unir), o que caracteriza a ocorrência de *flutter* na estrutura, como será mostrado mais a frente, ao longo do trabalho.

No final dos anos 50, com os avanços conseguidos na aviação graças à Segunda Guerra Mundial, estruturas aeronáuticas, como aviões e foguetes, começaram a falhar, de modo misterioso. Seria descoberto então, o fenômeno do flutter, em cujo estudo, Jordan foi o pioneiro (Jordan, 1956).

Flutter é uma instabilidade dinâmica auto-excitada, causada pela interação entre forças elásticas, aerodinâmicas e inerciais (Pegado, 2003). Estando a estrutura imersa num escoamento de ar, que gera um carregamento aerodinâmico, sua flexibilidade permite que esta se deforme consideravelmente. Estas deformações irão alterar a forma como o carregamento aerodinâmico atua sobre a estrutura e gerar novas deformações, iniciando-se um processo iterativo e auto-alimentado. Este processo pode se estabilizar ou divergir em um caráter oscilatório, característico de flutter (Benini, 2002).

O fenômeno do flutter pode ocorrer em seções típicas (asas) ou em painéis aeroelásticos (cascas e placas finas). Em seções típicas, ele ocorre em regimes subsônicos e apresenta vibrações de amplitudes crescentes de forma exponencial, podendo levar a mesma ao colapso; Em painéis aeronáuticos, ele ocorre em regimes supersônicos e este é o foco deste trabalho. Sobre os painéis, devido às não linearidades geométricas, surgem tensões internas ao seu

plano, limitando as amplitudes das vibrações, causando assim fadiga no próprio ou na estrutura que o suporta (Dowell, 1970).

É importante lembrar que o fenômeno do flutter não se aplica somente a estruturas presentes no ramo aeronáutico, mas pode ser citado em outras estruturas de engenharia. Na ponte de Tacoma, que é uma ponte delgada e de grande extensão, no ano de 1940, ocorreu o caso de stall flutter, levando a mesma ao colapso, que foi registrado em vídeo (Costa, 2007) (Fung, 1993).

Neste trabalho, a Teoria do Pistão Linear, para aerodinâmica quase-estacionária, será utilizada para calcular os carregamentos aerodinâmicos do escoamento supersônico sobre um painel plano fino. Esta teoria foi proposta inicialmente por (Lighthill, 1953), ela é capaz de fornecer o campo de pressão aeroelástico aproximado, que o escoamento de ar, passando por um dos lados de um painel, impõe a este, à medida que sua velocidade aumenta. Pode-se dizer que esta teoria é adequada para o regime supersônico, o escoamento é considerado isentrópico e invíscido, e são desconsideradas as mudanças de fase entre o corpo e o escoamento.

O carregamento aeroelástico será incorporado ao problema, formulado em Elementos Finitos. Assim, a teoria do pistão ou a teoria potencial linearizada, será utilizada para prever a velocidade de flutter, enquanto a formulação via elementos finitos, dará condições para acoplar o problema aero-eleto-mecânico, chegando-se às equações diferenciais características do problema. Estas equações possibilitarão realizar estudos paramétricos, medindo-se a influência de parâmetros escolhidos sobre a resposta aeroelástica final da estrutura. Ou seja, uma vez gerado o modelo representativo do comportamento da estrutura, as simulações representam uma possibilidade muito mais rápida e barata para o conhecimento das respostas da estrutura.

## 2 MODELAGEM POR ELEMENTOS FINITOS DO PROBLEMA ELETROMECHANICO

### 2.1. Teoria Mista

Para a formulação do problema eletromecânico acoplado, via elementos finitos, são usadas duas teorias, que culminarão no que se chama de Teoria Mista. O problema mecânico é formulado pela *TCEU (Teoria da Camada Equivalente Única)*, que trata todas as camadas do laminado como sendo uma única camada, com propriedades mecânicas equivalentes. Já o problema elétrico, deve ser formulado pela *TCED (Teoria da Camada Equivalente Discreta)*, que trata cada camada do laminado individualmente.

A Teoria Mista ajuda a manter o custo computacional reduzido e obter respostas satisfatórias (Saravanas, 1997) (Suleman, 1995). Dentro da *TCEU*, há várias formas de se estimar o campo de deslocamentos. Neste trabalho, o campo de deslocamentos será calculado, considerando-se a *FSDT (Teoria da Deformação Cisalhante de Primeira Ordem)*, que se baseia nas hipóteses assumidas na *Teoria de Placas de Mindlin-Reissner*.

Segundo (Reddy, 1997), o campo de deslocamentos para qualquer ponto do laminado, com o uso da teoria FSDT, é dado por:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(x, y, z, t) &= \mathbf{u}_0(x, y, t) + z \boldsymbol{\phi}_x(x, y, t) \\ \mathbf{v}(x, y, z, t) &= \mathbf{v}_0(x, y, t) + z \boldsymbol{\phi}_y(x, y, t) \\ \mathbf{w}(x, y, z, t) &= \mathbf{w}_0(x, y, t) \end{aligned} \tag{1}$$

onde:  $\phi_x$  e  $\phi_y$  representam as rotações dos segmentos de reta normais ao plano médio de referência, com relação aos eixos y e x, respectivamente.

## 2.2. Formulação em Elementos Finitos do Problema Mecânico

O elemento considerado, no caso em estudo, será, conforme apresentado em (Reddy, 1997), o de placa plana, da família *Serendipity*. Este elemento é retangular, possui 8 nós por elemento e 5 graus de liberdade mecânicos (três de translação e dois de rotação) e 1 grau de liberdade elétrico, por nó.

As funções de forma deste elemento serão relacionadas com os graus de liberdade mecânicos nodais, a fim de fornecer o campo de deslocamentos nodal e permitir realizar as devidas interpolações para se obter o deslocamento de qualquer ponto dentro do elemento finito. Assim, o campo de deslocamentos, a nível elementar é calculado segundo:

$$U(x, y, z, t) = A(z) N(\xi, \eta) u(t) \quad (2)$$

onde:  $A(z)$  é a matriz que parametriza a espessura;  $N(\xi, \eta)$  representa as funções de forma;  $u(t)$  representa os graus de liberdade mecânicos. As coordenadas  $(\xi, \eta)$  são provenientes de um sistema local (elementar), que é intercambiável com o sistema global  $(x, y)$  através de um operador, chamado Jacobiano  $J = ab / 4$ .

De posse do campo de deslocamentos, basta aplicar sobre eles derivadas direcionais, para se chegar às deformações mecânicas da estrutura.

$$\varepsilon(x, y, z, t) = D(z) N(\xi, \eta) u(t) = B_u(\xi, \eta, z) u(t) \quad (3)$$

onde:  $D(z)$  representa as matrizes dos operadores diferenciais  $\frac{\partial}{\partial x}$  e  $\frac{\partial}{\partial y}$  para as deformações mecânicas da placa (de flexão e cisalhamento).

Para o cálculo das matrizes elementares de Massa e Rigidez, utilizam-se as seguintes expressões:

$$M_{uu}^e = \int_{V_e} \rho N^T A^T A N dV_e \quad (4)$$

$$K_{uu}^e = \sum_{k=1}^{n^{cam.}} \int_{\xi=-1}^{+1} \int_{\eta=-1}^{+1} \int_{z=z_K}^{z_K+1} B_u^T T^T C T B_u J dz d\eta d\xi \quad (5)$$

onde:  $\rho$  representa a densidade do material da placa,  $V_e$  representa o volume elementar. As matrizes  $B_u$  contêm os operadores diferenciais  $\frac{\partial}{\partial x}$  e  $\frac{\partial}{\partial y}$  aplicados nas funções de forma nodais. A matriz  $T$  é responsável pela transformação, em função dos ângulos das fibras do laminado, que alterará a matriz  $C$ , proveniente da Lei de Hooke  $\sigma = C\varepsilon$  e que representa as propriedades elásticas ortotrópicas (rigidez, a grosso modo) da placa.

Uma vez definidas as matrizes de Massa e Rigidez elementares, procede-se com a montagem das respectivas matrizes globais, incorporando a matriz de conectividade e procedimentos usuais do Método de Elementos Finitos (Moaveni, 1999).

Assim, de posse das matrizes globais do sistema puramente mecânico, a equação do movimento, no domínio temporal, toma a seguinte forma:

$$\mathbf{M}_u \ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K}_u \mathbf{u}(t) = \mathbf{F}(t) \quad (6)$$

Uma vez conhecida a montagem do sistema mecânico, deve-se agora, partir para a adição de suas propriedades elétricas e, posteriormente, da incorporação do circuito elétrico shunt, para que se chegue ao sistema eletromecânico completo.

### 2.3. Adição do Material Piezelétrico via Elementos Finitos

No presente trabalho a pastilha piezelétrica será polarizada ao longo de sua espessura (direção  $z$ ) e que suas deformações mecânicas ocorrerão no plano  $xy$ . Para o caso em questão, com ortotropia transversa, o acoplamento eletromecânico segundo (Reddy, 1997), para materiais piezelétricos é dado por:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \\ D_x \\ D_y \\ D_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11}^E & c_{12}^E & c_{13}^E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -e_{31} \\ c_{21}^E & c_{22}^E & c_{23}^E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -e_{32} \\ c_{31}^E & c_{32}^E & c_{33}^E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -e_{33} \\ 0 & 0 & 0 & c_{44}^E & 0 & 0 & 0 & -e_{24} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55}^E & 0 & -e_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66}^E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 & \chi_{11}^E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{24} & 0 & 0 & 0 & \chi_{22}^E & 0 \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \chi_{33}^E \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} \\ E_x \\ E_y \\ E_z \end{Bmatrix} \quad (7)$$

onde:  $\sigma$  representa o vetor de tensões mecânicas;  $D$  representa o vetor dos deslocamentos elétricos;  $C$  representa a matriz das propriedades elásticas (rigidez mecânica);  $e$  e  $\chi$  representam, respectivamente, o coeficiente de acoplamento eletromecânico e a permissividade elétrica, do material piezelétrico;  $\varepsilon$  representa o vetor de deformações mecânicas e, por fim,  $E$  representa o vetor campo elétrico. Os sobrescritos  $( )^E$  e  $( )^\varepsilon$  indicam o campo elétrico e a deformação mecânica mantidos constantes, respectivamente.

Para se chegar à massa global, basta somar as parcelas da estrutura e do material piezelétrico. Já para se chegar às parcelas de rigidez, (Chee, 2000) propôs que fossem somadas as parcelas mecânica e elétrica da energia de Deformação, como segue abaixo:

$$V_E(t) = \int_{V_e} (\varepsilon^T \sigma - E^T D) dV_e \quad (8)$$

Assim, após várias manipulações, que não podem ser expressas aqui, para sintetizar o trabalho, são obtidas as equações do movimento eletromecânicas acopladas, descritas abaixo,

no domínio temporal e com graus de liberdade mecânicos e elétricos. Notar que agora, há rigidez mecânica  $K_{uu}$ , eletro-mecânica  $K_{u\phi}$  e puramente elétrica  $K_{\phi\phi}$ .

$$\begin{bmatrix} [M_{uu}] + [M_{pzt}] & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\ddot{u}(t)\} \\ \{\ddot{\phi}(t)\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [K_{uu}] & [K_{u\phi}] \\ [K_{\phi u}] & [K_{\phi\phi}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{u(t)\} \\ \{\phi(t)\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F(t)\} \\ \{Q(t)\} \end{Bmatrix} \quad (9)$$

onde:  $u(t)$  e  $\phi(t)$  representam, respectivamente, os vetores de graus de liberdade mecânicos e elétricos da estrutura;  $F(t)$  e  $Q(t)$  representam os esforços mecânicos externos e as cargas elétricas externas, respectivamente.

Já para as rijezas, segue descrição de como ficam suas respectivas expressões finais:

$$K_{u\phi}^{elem.} = \sum_{k=1}^{n^{cam.}} \int_{\xi=-1}^{+1} \int_{\eta=-1}^{+1} \int_{z=z_k}^{z_{k+1}} B_u^T T^T e Q B_\phi J dz d\eta d\xi = (K_{\phi u}^{elem.})^T \quad (10)$$

$$K_{\phi\phi}^{elem.} = \sum_{k=1}^{n^{cam.}} \int_{\xi=-1}^{+1} \int_{\eta=-1}^{+1} \int_{z=z_k}^{z_{k+1}} B_\phi^T Q \chi Q^{-1} B_\phi J dz d\eta d\xi \quad (11)$$

onde: a matriz  $Q$  rotaciona os vetores de deslocamento elétrico  $D$  e campo elétrico  $E$  ao longo da direção  $Z$ . A matriz  $B_\phi$  relaciona as funções layerwise, de interpolação do potencial elétrico nodal entre as camadas e as funções de forma nodais.

## 2.4. Adição e Sintonização do Circuito Elétrico Shunt ao modelo de Elementos Finitos

Logo, após manipulações, o problema de autovalor final, para uma estrutura composta, contendo materiais piezoeletricos e circuitos shunt, é dado abaixo. O circuito elétrico shunt será acoplado à estrutura por meio de sua impedância elétrica  $Z(\omega)$ .

$$\left[ K_{uu} - K_{u\phi} \left( K_{\phi\phi} + \frac{1}{j\omega} Z^{-1}(\omega) \right)^{-1} K_{\phi u} - \omega^2 M_{uu} \right] U(\omega) = F(\omega) \quad (12)$$

A sintonização será realizada de duas maneiras. Primeiramente, testa-se a sintonização proposta por (Hagood and von Flotow, 1991), bem conhecida e respeitada na literatura, que tem um cunho mais estrutural. Depois, será testada uma sintonização via otimização heurística, pelo método *Evolução Diferencial*, que foi construída com um cunho mais aeroelástico.

A sintonização via (Hagood and von Flotow, 1991) utiliza as expressões:

$$R_n = \frac{\sqrt{2} K_{ij}}{C_{PZT} \omega_n (I + K_{ij}^2)} \quad L_n = \frac{1}{C_{PZT} \omega_n^2 (I + K_{ij}^2)} \quad (13)$$

onde:  $C_{pzt}$  representa a capacitância da pastilha piezelétrica;  $\omega_n$  representa a frequência natural do modo  $n$ , que se deseja amortecer. Neste caso, como se busca calcular  $R_1, R_2, L_1, L_2$ , devem-se utilizar  $\omega_1, \omega_2$ . Por fim,  $K_{ij}$  é o fator de acoplamento eletromecânico.

### 3 MODELAGEM AERODINÂMICA E MÉTODO DE RESOLUÇÃO DO PROBLEMA DE AUTOVALOR NÃO-LINEAR

Já de posse do problema eletromecânico, com o circuito shunt sintonizado, deve-se, por fim, anexar os carregamentos aeroelásticos ao modelo. Para isso, será utilizada a Teoria do Pistão, em sua forma mais simples, conhecida como modelo de *Ackeret*, (Bismarck-Nasr, 1999). Para o estudo em questão, em que o interesse é apenas calcular a velocidade de *flutter*, esta teoria é satisfatória.

$$p - p_\infty = \frac{2\lambda}{M} \frac{\partial W}{\partial x} \quad (14)$$

onde:  $\lambda = \rho v^2 / 2$  representa a pressão dinâmica,  $M$  o número de Mach,  $W$  o deslocamento transversal da placa e,  $x$  o comprimento longitudinal desta.

O carregamento aeroelástico será incorporado ao modelo eletromecânico na forma de rigidez mecânica. Isto se dá através do trabalho da força aerodinâmica (Almeida, 2011), que, após manipulações, é dado por:

$$W_{aerod.}^F = \frac{2\lambda}{M} \int N_x^T(\xi, \eta) N(\xi, \eta) dA = \frac{2\lambda}{M} \int K_{aerod.} dA \quad (15)$$

Desta maneira, o problema aero-eletromecânico final, é dado pelas seguintes equações matriciais do movimento:

$$\begin{bmatrix} [M_{uu}] + [M_{pzt}] & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}(t) \\ \ddot{\phi}(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [K_{uu}] + \frac{2\lambda}{M} [K_{aerod.}] & [K_{u\phi}] \\ [K_{\phi u}] & [K_{\phi\phi} + \frac{1}{j\omega} Z^{-1}(\omega)] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u(t) \\ \phi(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (16)$$

#### 3.1. Resolução do Problema de Autovalor Não-Linear

Tendo se chegado às equações do movimento para o problema aero-eletromecânico acoplado, expresso pela Eq. (16), recai-se em um problema não-linear de resolução de

autovalor. O problema é não linear porque a impedância elétrica  $Z(\omega)$  é dependente da frequência.

Para a resolução deste problema, utiliza-se um método iterativo, semelhante ao encontrado em (Meunier, 2001). Conforme esquematizado pela Fig. 2, para uma dada pressão dinâmica, ou seja, para cada passo crescente de velocidade de escoamento, inicia-se o método com um valor adotado de frequência  $\omega_0$  (utilizou-se, neste trabalho, valor inicial nulo,  $\omega_j = \omega_0 = 0 \text{ rad/s}$ ).

Assim, para este valor inicial de frequência, resolve-se o problema de autovalor, que agora se tornou linear, encontrando-se novos autovalores  $\omega_{j+1}$ . Estes novos autovalores são comparados com os autovalores da iteração anterior. Se esta diferença, ponderada pelos novos autovalores, for maior que uma tolerância pré-estabelecida, parte-se para uma nova iteração, para refinar os resultados de autovalores. A partir do momento em que o critério de parada for atingido, ou seja, a tolerância for satisfeita, encerra-se o método para aquele valor de pressão dinâmica e o autovalor complexo é armazenado, para posteriormente ser plotado, no diagrama V-g. Assim, segue-se para o próximo valor de pressão dinâmica e repete-se o método, até cobrir todo o intervalo de pressões dinâmicas desejado.

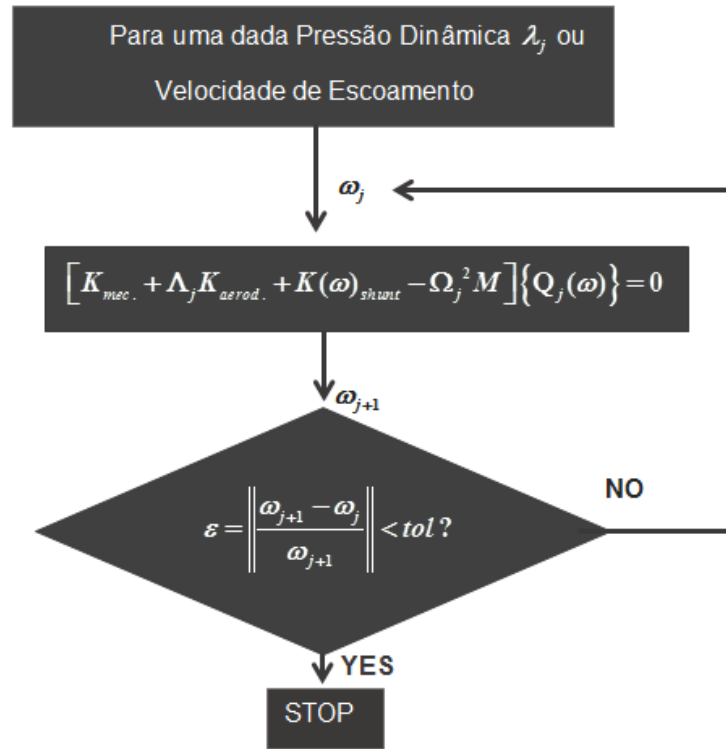


Figura 2: Método iterativo de resolução do problema não-linear de autovalor.

Na Fig. 2,  $\Lambda_j = 2\lambda_j / M_j$  é o termo proporcional à pressão crítica e à velocidade do escoamento. Este termo será variado, conforme descrito no final do parágrafo anterior.

O método requer que, para cada valor de pressão crítica ou velocidade de escoamento, sejam resolvidos dois problemas de autovalor. Um problema de autovalor completo, conforme a Eq. (3) e outro problema de autovalor, sem a rigidez aerodinâmica, como indicado pela Eq. (4).

$$\left[ K_{mec.} + A K_{aerod.} + K(\omega)_{shunt} - \Omega_{completo}^2 M \right] \{ Q_{completo}(\omega) \} = 0 \quad (17)$$

$$\left[ K_{mec.} + K(\omega)_{shunt} - \Omega_{sem_aerod.}^2 M \right] \{ Q_{sem_aerod.}(\omega) \} = 0 \quad (18)$$

Isto se faz necessário, para o cálculo do fator de perda modal, que será calculado da seguinte forma:

$$g_j = \frac{Imag(\omega_{j\ completo})}{Real(\omega_{j\ completo})} - \frac{Imag(\omega_{j\ sem_aerod.})}{Real(\omega_{j\ sem_aerod.})} \quad (19)$$

onde:  $\omega_{j\ completo} = \sqrt{\frac{1}{\Omega_{j\ completo}^2}}$  e  $\omega_{j\ sem_aero} = \sqrt{\frac{1}{\Omega_{j\ sem_aero}^2}}$  são os autovalores do problema completo e sem rigidez aerodinâmica, respectivamente.

A parte real dos autovalores do problema completo  $\omega_{completo}$  e os amortecimentos modais  $g$  serão utilizados para a construção do diagrama V-g. Este diagrama, conforme indicado na Fig. 3, é um conjunto de dois gráficos e é construído da seguinte forma: no primeiro gráfico, da esquerda, a parte real dos autovalores será utilizada para mostrar a aproximação das frequências naturais, à medida que a velocidade do escoamento cresce; já no segundo gráfico, da direita, o amortecimento modal varia, também à medida que a velocidade do escoamento cresce.

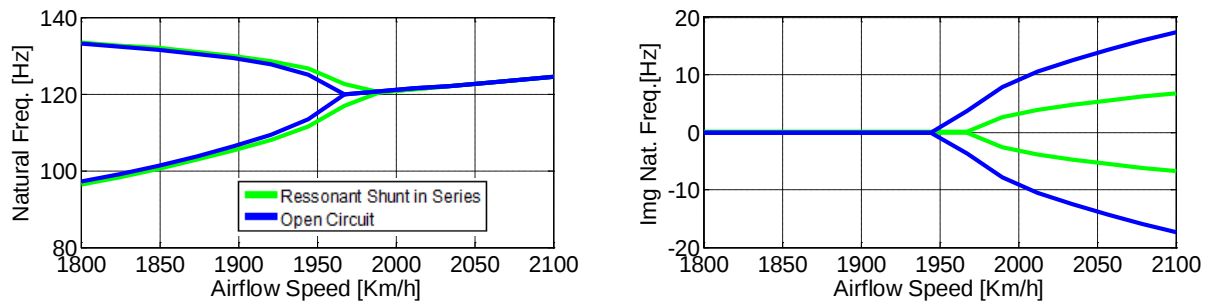


Figura 3: Diagrama V-g que indica a velocidade de flutter e o amortecimento modal.

O gráfico da direita representa o amortecimento modal. Assim, para a estrutura sem amortecimento (curva azul), o fator de perda modal deve permanecer nulo até o ponto de ocorrência de flutter. No ponto crítico os valores de amortecimento deixam de ser nulos, o que indica a ocorrência de flutter. O comportamento da estrutura amortecida, indicada pela curva verde, é análogo, porém, se visto mais de perto, será possível notar que suas curvas não se sobrepõem, o que é característica de estruturas amortecidas.

## 4 RESULTADOS E ESTUDO PARAMÉTRICO

Os resultados que serão apresentados nesta seção, foram obtidos via simulações numéricas, do modelo aero-eletromecânico, implementado pelo Método de Elementos Finitos,

conforme apresentado anteriormente. O painel, em questão, é semelhante ao da Fig. 4 e apresenta as seguintes características de projeto:

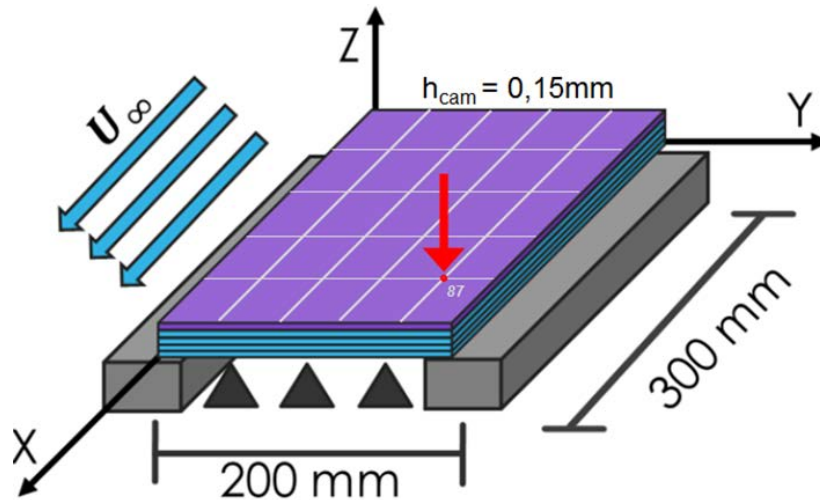


Figura 4: Painel aeronáutico utilizado no presente estudo.

- Painel quadri-apoiado (travadas somente translações transversais,  $w$ );
- Quatro camadas do composto “Carbon Graphite Fabrique” (Reddy, 1997);
- Uma camada piezelétrica, de PZT G1195 (vide Tab. 1 e Tab. 2);
- Espessuras:  $h_{composto} = h_{pzt} = 0,15 \text{ mm}$ ;
- Ângulo das fibras das quatro camadas de composto (graus):  
[ 0 / 75 / 75 / 0 ];
- Malha: 5x5 elementos *Serendipity*;
- Ponto de excitação e leitura para a construção de cada FRF (*Função de Resposta em Frequência*): nó 87.

Tabela 1: Propriedades Mecânicas dos Materiais envolvidos.

| Material  | $E_{11}$<br>(GPa) | $E_{22}$<br>(GPa) | $E_{33}$<br>(GPa) | $G_{12}$<br>(GPa) | $G_{23}$<br>(GPa) | $G_{13}$<br>(GPa) | $\nu_{12}$<br>(GPa) | $\nu_{23}$<br>(GPa) | $\nu_{13}$<br>(GPa) | $\rho$<br>(Kg/m <sup>3</sup> ) |
|-----------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|---------------------|---------------------|---------------------|--------------------------------|
| Composto  | 173,06            | 33,09             | 5,17              | 9,38              | 3,24              | 8,27              | 0,036               | 0,171               | 0,25                | 1578                           |
| PZT G1195 | 81,38             | 80,54             | 80,54             | 24,2              | 24,2              | 24,2              | 0,40                | 0,41                | 0,25                | 7700                           |

**Tabela 2: Propriedades Elétricas dos Materiais envolvidos.**

| Material  | $e_{15}(\text{C/m}^2)$ | $e_{24}(\text{C/m}^2)$ | $e_{31}(\text{C/m}^2)$ | $e_{32}(\text{C/m}^2)$ | $e_{33}(\text{C/m}^2)$ | $\chi_{11}(\text{F/m})$ | $\chi_{22}(\text{F/m})$ | $\chi_{33}(\text{F/m})$ |
|-----------|------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|
| Composto  | 0                      | 0                      | 0                      | 0                      | 0                      | 0                       | 0                       | 0                       |
| PZT G1195 | 0                      | 0                      | -18,299                | -9,013                 | -9,013                 | $1,59\text{e}^{-8}$     | $1,59\text{e}^{-8}$     | $1,59\text{e}^{-8}$     |

Alguns estudos paramétricos serão discutidos a fim de evidenciar a influência de certas variáveis de projeto sobre o controle estrutural e também sobre a velocidade final de flutter do painel aeronáutico estudado.

- Influência da sintonização do circuito elétrico shunt;
- Influência da rigidez mecânica da pastilha piezolétrica e do controle passivo;
- Influência da placa de composto (ângulo de fibras e espessura de camadas);

#### 4.1. Validação do Modelo em Elementos Finitos

Para que se possa utilizar este modelo com confiança, devem-se comparar suas respostas dinâmicas com soluções exatas da literatura, ou seja, validá-lo. Além disso, deve-se realizar um estudo de malhas, a fim de decidir qual é a malha de elementos finitos mais adequada para o modelo, envolvendo um compromisso entre a qualidade da solução e o custo computacional envolvido.

Para este trabalho optou-se pela malha 5x5 elementos, porque ela é capaz de aproximar bem dos primeiros valores de frequência natural e não confere um custo computacional tão elevado, quanto à malha de 9x9 elementos.

**Tabela 3: Refino da malha de elementos finitos, com base na aproximação dos valores reais de frequência natural.**

|             |            | Analítico | Mat Lab 3x3  | Mat Lab 4x4  | Mat Lab 5x5 | Mat Lab 9x9 |
|-------------|------------|-----------|--------------|--------------|-------------|-------------|
| Autovalores | $w_1$ (Hz) | 53,9      | 59,9 (11%)   | 58,36 (8%)   | 56,2 (4%)   | 54,5 (1%)   |
|             | $w_2$ (Hz) | 134,1     | 160,2 (19%)  | 146,79 (9%)  | 139,4 (4%)  | 135,1 (1%)  |
|             | $w_3$ (Hz) | 163,5     | 200,46 (22%) | 180,94 (10%) | 168,3 (3%)  | 165,2 (1%)  |
|             | $w_4$ (Hz) | 215,6     | 316,17 (46%) | 264,9 (22%)  | 229,3 (7%)  | 219,7 (2%)  |

Além do mais, este estudo se concentrará apenas nos dois primeiros modos naturais do painel, porque, segundo o estudo aeroelástico mostrado abaixo, as primeiras frequências que se coalescerão para este painel, nestas condições adotadas, são  $\omega_1$  e  $\omega_2$ .

## 4.2. Influência da Sintonização do Circuito Elétrico Shunt

Neste estudo, será medida a influência da sintonização elétrica do circuito passivo, sobre as respostas estruturais e aeroelásticas do painel em questão.

**Sintonização via Hagood & von Flotow.** A primeira sintonização a ser apresentada é aquela realizada através das equações de (Hagood and von Flotow, 1991). Esta sintonização é realizada na velocidade de ocorrência de flutter para a situação “Open Circuit”, que é a situação em que há a presença mecânica do material piezelétrico sobre a placa, mas não há atuação elétrica. No trabalho de (De Marqui, 2011) a sintonização é realizada da mesma forma. Os valores de resistência e indutância sugeridos por esta sintonização foram:  $R_1 = 98,07\Omega$ ,  $R_2 = 88,73\Omega$ ,  $L_1 = 0,26H$  e  $L_2 = 0,21H$ .

Conforme se pode observar pela *FRF* da Fig. 5, esta sintonização apresenta um excelente ganho estrutural, tanto para o primeiro, quanto para o segundo modo natural. A legenda indica que a curva azul representa a estrutura completa, com a presença mecânica do material piezelétrico, mas sem a atuação do controle passivo; já a curva verde, se distingue justamente, por possuir a aplicação do controle passivo, via shunt ressonante multimodal, em série.

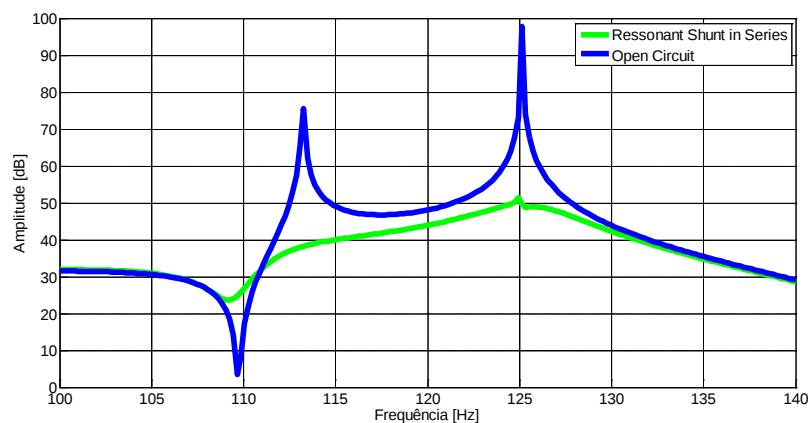


Figura 5: *FRF* da estrutura, contendo shunt sintonizado via (Hagood and von Flotow, 1991).

Entretanto, apesar de apresentar um ótimo ganho estrutural, esta sintonização não apresenta ganho aeroelástico, ou seja, não altera a velocidade de *flutter* do painel, como pode ser notado pelo diagrama V-g, da Fig. 6, que continua em torno de 1944 Km/h.

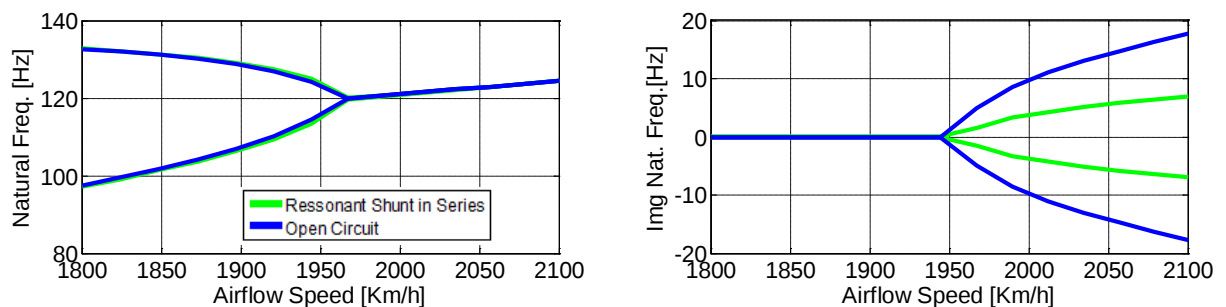


Figura 6: Diagrama V-g para a sintonização via Hagood e Flotow.

**Sintonização Manual.** Foi realizada uma sintonização manual, em que não se preocupou com a amplitude de vibração dos modos naturais, mas somente com sua distância, em frequência.

Como pode ser observado pela *FRF* da Fig. 7, esta sintonização manual foi ajustada para retardar um pouco o primeiro modo natural, em frequência e, por sua vez, elevar a frequência do segundo modo. Pode-se notar que, com o circuito ressonante multimodal, consegue-se deslocar pouco os modos em frequência. Os valores utilizados de resistência e indutância, nesta sintonização, foram:  $R_1 = 1\Omega$ ,  $R_2 = 2\Omega$ ,  $L_1 = 1e^{-6}H$  e  $L_2 = 1e^{-9}H$ .

Neste caso, devem-se variar os valores de  $L_1$  e  $L_2$ , que são responsáveis por posicionar o modo natural, em frequência. Os valores de  $R_1$  e  $R_2$  são responsáveis por variar o amortecimento e foram mantidos baixos para que os picos permanecessem distantes. À medida que se aumenta o amortecimento, os picos se aproximam em frequência. Se aproximam apenas um pouco, mas é o suficiente para perder o ganho aeroelástico.

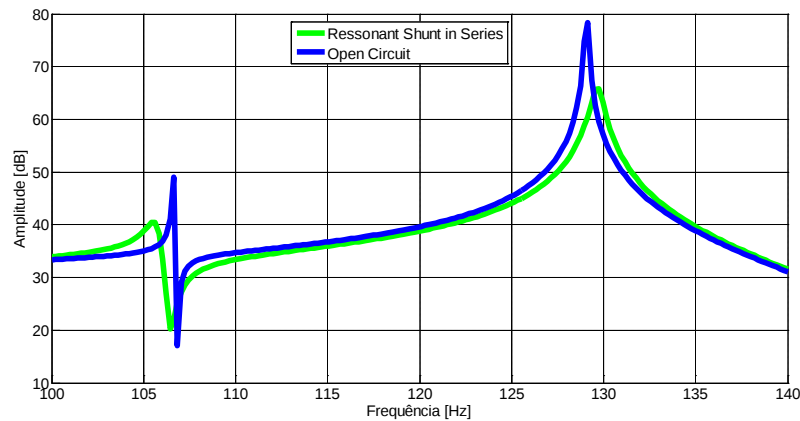


Figura 7: *FRF* para o caso da sintonização manual.

Neste caso, já é possível notar algum ganho aeroelástico. Houve um ganho de 23 Km/h, ou seja, a velocidade de flutter do painel foi aumentada de 1.944 km/h para 1.967 km/h. Observar que, o espaçamento dos modos naturais, notado na *FRF* da Fig. 7, foi pequeno, causando um ganho aeroelástico, também pequeno, em torno de 1,2%.

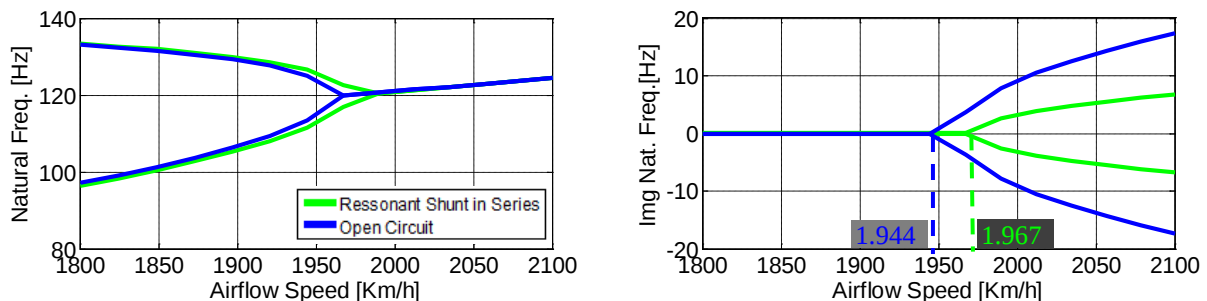


Figura 8: Diagrama V-g para a sintonização realizada manualmente.

### 4.3. Influência da rigidez mecânica da pastilha piezolétrica e do controle passivo

Esta seção busca evidenciar os ganhos aeroelásticos distintos, devido somente à contribuição mecânica do material piezolétrico e, devido somente ao controle passivo, ou seja, ao seu ganho elétrico.

A partir do diagrama apresentado na Fig. 9, pode-se verificar que, para o painel composto, sem a camada de material piezolétrico, ou seja, apenas com as quatro camadas de “*carbon graphite fabrique*”, com ângulo de fibras [ 0 / 75 / 75 / 0 ], a velocidade crítica de flutter é de 1.336 km/h. Será explicado, na próxima seção, como é definido o ângulo das fibras, dentro do painel composto.

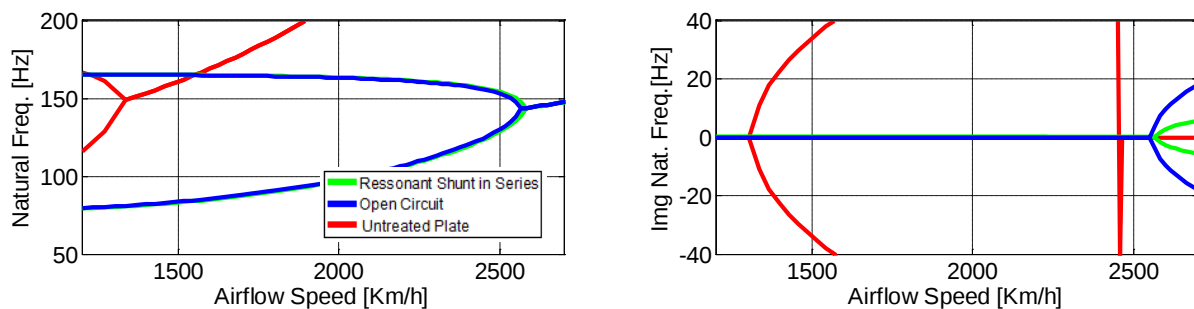


Figura 9: Diagrama V-g para a comparação entre os ganhos mecânico e elétrico devido ao circuito shunt.

A escala horizontal, devido à necessidade de ser bastante longa, de 1.200 a 3.000 km/h, não evidencia o ganho somente devido ao controle, porém, para este caso, houve um ganho de 17 km/h. O painel somente com a presença mecânica do material piezolétrico, entra em flutter a 2.551 km/h. Quando o controle passivo é contabilizado, a velocidade de ocorrência deste fenômeno passa a ser 2.568 km/h. Assim, mostra-se na Fig. 10, a região entre 2.500 e 2.600 km/h, para evidenciar o ganho elétrico, citado acima.

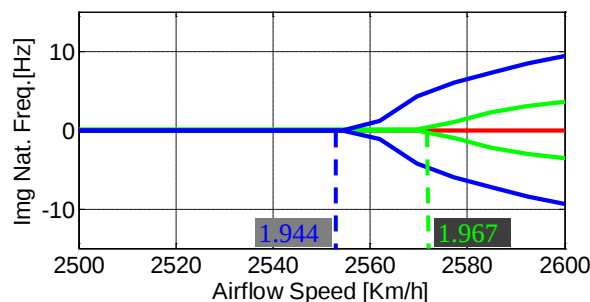


Figura 10: Vista com zoom, sobre o amortecimento modal da Fig. 9, a fim de evidenciar o ganho elétrico devido ao controle passivo do circuito shunt.

Ou seja, estes resultados evidenciam um enorme ganho mecânico e um modesto ganho elétrico, devido à presença do material piezolétrico sobre a velocidade de *flutter* do painel. Isto pode ser explicado pela elevada rigidez mecânica da pastilha piezolétrica, que faz com que, quando colada à placa composta, eleve bastante sua estabilidade aeroelástica.

#### 4.4. Influência da placa de material composto (ângulo das fibras e espessura das camadas)

**Influência do ângulo das fibras do composto.** Primeiramente, mostra-se a influência que a orientação do ângulo das fibras de cada camada do painel composto possui sobre a velocidade final de flutter. Numa estrutura composta, a direção das fibras define a direção de maior rigidez mecânica (Saliba Jr., 2003).

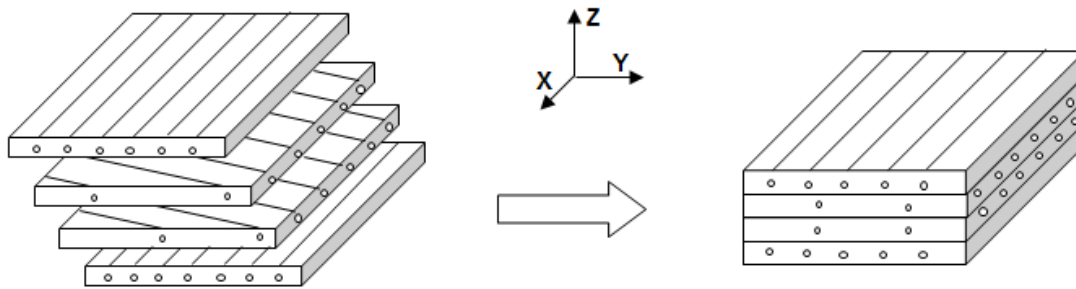


Figura 11: Vista do laminado usado no estudo, com orientação [0/75/75/0].

Inicialmente serão mostrados resultados considerando todo o laminado como contendo uma única camada e a influência que o ângulo de laminação desta camada causa sobre a velocidade final de flutter, conforme realizado no trabalho de (Almeida, 2011), com controle ativo, via materiais piezelétricos. Para os testes realizados nesta seção, a sintonização foi a seguinte:  $R_1 = 1\Omega$ ,  $R_2 = 2\Omega$ ,  $L_1 = 1e^{-6}H$  e  $L_2 = 1e^{-9}H$ .

Pode-se notar, pelos resultados mostrados na Fig. 12, que quando as fibras estão orientadas na direção do fluxo de ar, ou em variações angulares pequenas (até  $30^\circ$ ), observam-se as maiores velocidades de flutter. À medida que estes ângulos tendem a direções perpendiculares ao fluxo de ar, a placa atinge a instabilidade sob menores velocidades. Porém, deve-se atentar que nestes casos, as camadas foram consideradas como sendo únicas, e tendo os ângulos mostrados abaixo. Diferentemente do caso mostrado anteriormente, em que as camadas eram consideradas separadamente e com orientação variada, de [0/75/75/0].

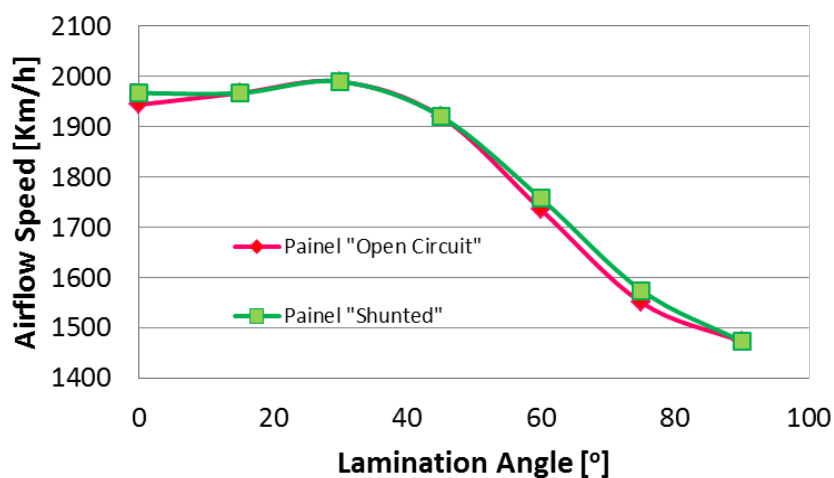


Figura 12: Influência do ângulo de laminação com relação à velocidade de flutter.

**Influência da espessura das camadas do composto.** Por fim, estuda-se a influência da espessura das camadas do composto, incluindo a espessura da camada piezelétrica, sobre a resposta dinâmica e aeroelástica da estrutura.

Sabe-se que, aumentando-se a espessura de alguma das camadas, aumenta-se também a rigidez e, por consequência, a estabilidade aeroelástica. Porém, também é sabido que, principalmente no campo da engenharia aeronáutica, o aumento da espessura e do peso da estrutura é o último dos recursos a ser utilizado. Assim, estes testes serão breves e com um caráter mais didático do que prático.

A Tab. 4 mostra o que já era de se esperar. Para a mesma relação entre  $h_{composto}$  e  $h_{pzt}$ , ou seja, relação  $h_{pzt} / h_{comp} = 1$  observam-se os mesmos ganhos. Nota-se apenas um offset na faixa de velocidades, devido às variações de rigidez causadas pelas respectivas variações de espessura, para cada caso.

**Tabela 4: Influência da espessura total do composto na velocidade final de flutter e no ganho do controle.**

| Espessura Total<br>[mm] | $V_{flutter}$ "Open Circuit"<br>[Km/h] | $V_{flutter}$ "Shunted"<br>[Km/h] | Ganho<br>(%) |
|-------------------------|----------------------------------------|-----------------------------------|--------------|
| 0,6                     | 1430                                   | 1447                              | 1,2          |
| 0,75                    | 1944                                   | 1967                              | 1,2          |
| 0,9                     | 2573                                   | 2603                              | 1,2          |

Já o grupo de resultados mostrados na Tab. 5, considera apenas a variação na espessura da pastilha piezelétrica. Ou seja, varia-se a relação  $h_{pzt} / h_{comp}$ , onde a espessura do composto é mantida constante, e vale,  $h_{comp} = 0,15mm$ .

**Tabela 5: Influência da espessura relativa entre o elemento piezelétrico e o composto mecânico.**

| $h_{pzt} / h_{comp}$<br>[mm] | $V_{flutter}$ "Open Circuit"<br>[Km/h] | $V_{flutter}$ "Shunted"<br>[Km/h] | Ganho<br>(%) |
|------------------------------|----------------------------------------|-----------------------------------|--------------|
| 1,0                          | 1944                                   | 1967                              | 1,2          |
| 0,75                         | 1812                                   | 1829                              | 0,9          |
| 0,5                          | 1690                                   | 1694                              | 0,2          |

Os resultados mostram que, à medida que a relação  $h_{pzt} / h_{comp}$  diminui, diminui-se também a eficiência do controle passivo. Pode-se imaginar, fisicamente, que, uma pastilha menos espessa, transforma uma menor quantidade de energia mecânica em energia elétrica.

Já para a estabilidade dinâmica, a espessura da pastilha piezelétrica possui uma influência muito menor na eficiência do controle. Para a relação  $h_{pzt} / h_{comp} = 1,0$ , nota-se um amortecimento que beira 50% de redução de amplitude de vibração tano para o primeiro,

quanto para o segundo modo natural; para os casos  $h_{pzt} / h_{comp} = 0,75$  e  $h_{pzt} / h_{comp} = 0,5$ , a redução da amplitude de vibração para o primeiro modo natural continua em torno de 50%, porém para o segundo cai para próximo de 30%; não se notam diferenças importantes entre estes dois casos; por fim, estudou-se o caso em que  $h_{pzt} / h_{comp} = 0,25$  e notou-se que o primeiro modo natural teve suas amplitudes de vibração reduzidas na faixa de 30% e o segundo modo, na faixa de 25%, o que ainda pode ser considerado bastante razoável, levando-se em conta a baixa espessura relativa da camada piezelétrica.

## 5 CONCLUSÕES

Através deste estudo, sobre painéis aeronáuticos, pôde-se notar que é possível obter um ótimo amortecimento estrutural, melhorando de maneira bastante considerável a estabilidade dinâmica, com a utilização de circuitos elétricos shunt ressonantes multimodais, em série.

Entretanto, com este tipo de amortecimento passivo, não se nota um ganho aeroelástico importante, apenas algo em torno de 1,2%, não sendo o método de controle mais indicado para este fim.

Os resultados evidenciaram que, o fato de se ter um bom amortecimento das amplitudes de vibração sobre os modos naturais que irão se coalescer, não implica no aumento da estabilidade aeroelástica. Deve-se porém, para isso, considerar as limitações do modelo linear utilizado para este fim.

Com o uso deste modelo, os resultados sugerem que, para que seja evidenciado um ganho em velocidade de *flutter*, devem-se afastar, em frequência, os modos naturais que se coalescem, ou seja, eles serão forçados a percorrer uma maior distância, em frequência, até se unirem, o que faz com que eles se unam mais tardiamente. Novamente, é importante ressaltar que, para que estas conclusões sejam verificadas, faz-se necessário um modelo não-linear, que leve em conta todas as fontes de amortecimento presentes numa situação real.

A maior parte do ganho aeroelástico notado por este tipo de controle passivo, foi devido à inclusão da rigidez mecânica da pastilha piezelétrica na estrutura. A parcela do ganho em velocidade de flutter, apenas devido ao controle passivo foi pequena para painéis aeronáuticos.

Neste sentido, visto que a maior parte do ganho aeroelástico foi mecânico, caso o foco seja estritamente o controle aeroelástico, pode-se alterar o circuito shunt ressonante para um circuito shunt capacitivo, que faz variar a rigidez da pastilha piezelétrica (Viana, 2005), ainda dentro do controle passivo. Ou ainda, dentro do ramo de controle ativo, os trabalhos de (Raja, 2006) e (Almeida, 2011) evidenciaram a eficiência do controle piezelétrico ativo, para painéis de materiais compostos, em que se ganha algo em torno de 25% em velocidade de flutter.

## 6 AGRADECIMENTOS

Os autores deste trabalho agradecem às agências CAPES, FAPESP, FAPEMIG e CNPq.

## REFERÊNCIAS

- Almeida, A. E. 2011. "*O Efeito de Enrijecimento por Tensão Piezeletricamente Induzida na Estabilidade Aeroelástica de Painéis Aeronáuticos*". 100f., Tese de Mestrado em Ciências - Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São José dos Campos, SP : s.n., 2011.
- Benini, G. R. 2002. "Modelo Numérico para Simulação da Resposta Aeroelástica de Asas Fixas". s.l. : 97f. Dissertação de Mestrado, Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo., 2002.
- Bismarck-Nasr, M.N. 1999. "Structural Dynamics in Aeronautical Engineering". Reston, VA : AIAA Education Series, 1999.
- Callister. 2008. "Ciência e Engenharia dos Materiais: Uma Introdução". New York : U.S.A. Livros Téc. Cient., 2008.
- Carneiro, R. B. 2009. "Controle Simi-ativo de Vibrações em Estruturas utilizando Amortecedor Magnetorreológico". Tese de Doutorado : Faculdade de Tecnologia, Universidade de Brasília, 154f..
- Chee, C. Y. K. 2000. "Static Shape Control of Laminated Composite Plate Smart Structure using Piezoelectric Actuators". Tese de Pós-Doutorado, Universidade de Sydney, Departamento de Engenharia Aeronáutica : Sydney, Austrália, 2000.
- Costa, T. F. G. 2007. "Estudo Numérico de uma asa com controle ativo de flutter por realimentação da pressão medida num ponto". s.l. : 144f., Dissertação de Mestrado, Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo., 2007.
- Donadon, M. V. 2000. "Vibração de Placas Laminadas na Presença de Tensões Induzidas. Dissertação de Mestrado, 109f. : Instituto Tecnológico de Aeronáutica. São José dos Campos, SP.
- Dowell, E.H. 1970. "Panel Flutter: a review of the aeroelastic stability of plates and shells.". AIAA Journal. nº 3, 1970, Vol. 8, pgs. 385-399.
- Faria, A. W. 2006. "Modelagem por Elementos Finitos de Placas Compostas dotadas de Sensores e Atuadores Piezelétricos: Implementação Computacional e Avaliação Numérica". 152f., Dissertação de Mestrado, Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Uberlândia, 2006.
- Fleming, A. J., Behrens, S., Moheimani, S. O. R. 2002. "Optimization and Implementation of Multimode Piezoelectric Shunt Damping Systems". IEEE/ASME Transactions on Mechatronics. nº 1, 2002, Vol. 7.
- Fung, Y. C.,. 1993. "An introduction of the theory of aeroelasticity". s.l. : Dover Publications, Inc.

- Hagood, N. W., Flotow, A. H. V. 1991. "Damping of Structural Vibrations with Piezoelectric Materials and Passive Electrical Networks". Journal of Sound and Vibration, Vol. 146, pgs. 243-268.
- Holkamp, J. J. 1994. "Multimodal Passive Vibration Suppression with Piezoelectric Materials and Resonant Shunts". s.l. : U.S. Air Force, Wright Laboratory / FIBGC, 1994.
- Jordan, P. F. 1956. "The Physical Nature of Panel Flutter". Aero Digest. pgs. 34-38, 1956.
- Lighthill, M. J. 1953. "Oscillating Airfoils at High Mach Number". Journal of Aeronautical Sciences. 1953, Vol. 20, pgs. 402-406.
- Lima, A. M. G., Stoppa, M. H., Rade, D. A., Steffen Jr., V. 2006. "Sensitivity Analysis of Viscoelastic Structures". Shock and Vibration. nº 4-5, 2006, Vol. 13, pgs. 545-558.
- Meunier, M., Shenoi, R. A. 2001. "Dynamic Analysis of Composite Sandwich Plates with Damping Modelled using High Order Shear Deformation Theory". Composite Structure, Vol.54, pgs. 243-254.
- Moaveni, S. 1999. "Finite Element Analysis: Theory and Application". s.l. : Prentice-Hall, 1999.
- Pegado, H. A. 2003. "Método de Perturbações no Estudo de Não-linearidades na Aeroelasticidade de Painéis em Regime Supersônico.". 91f. : s.n., 2003. Tese de Doutorado, Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São José dos Campos, SP..
- Raja, S., Pashilkar, A.A., Sreedeed, R., Kamesh, J. V. 2006. "Flutter control of a composite plate with piezoelectric multilayered actuators". Aerospace Science and Technology, Vol. 10, pgs. 435-441.
- Reddy, J. N. 1997. "Mechanics of Laminated Composite Plates: Theory and Analysis" 2ed. Florida: CRC Press : s.n., 1997.
- Rocha, W. F. 1999. "Determinação da Velocidade de Instabilidade Aeroelástica de Asas Retangulares Constituídas de Materiais Compósitos em Regime de Voo Subsônico". Dissertação de Mestrado, Instituto Tecnológico de Aeronáutica, ITA, São José dos Campos, SP : 84f., 1999.
- Saravanos, D. A. 1997. "Mixed Laminate Theory and Finite Element for Smart Piezoelectric Composite Shell Structures". Journal of AIAA. pgs. 1327-1333, 1997, Vol. 35.
- Silva, K. C. A. 2013. "Caracterização de Compósitos de Matriz Polimérica com Ligas de Memória de Forma para Aplicação em Microatuadores". Dissert. de Mestrado, 79f. : Univ. Fed. de Pernambuco.
- Silva, V. A. C. 2014. "Concepção Robusta de Circuitos Elétricos Shunt Multimodais para o Controle Passivo de Vibrações de Estruturas Compostas". Dissertação de Mestrado, 109f. : Universidade Federal de Uberlândia, 2014.
- Suleman, A., Venkayya, V.B. 1995. "A simple finite element formulation for a laminated composite plate with piezoelectric layers". Journal of Intelligent Mat. Systems and Struct. pgs.776-782, Vol. 6.

- Viana, F. A. C. 2005. "Amortecimento de Vibrações usando Pastilhas Piezelétricas e Circuitos Shunt Ressonantes". Dissertação de mestrado, 111f. : Universidade Federal de Uberlândia, 2005.
- Wu, S. Y. 1998. "Method for Multiple Mode Shunt Damping of Structural Vibration using a Single PZT Transducer". 1998.