

A Estimação da Frequência Fundamental baseada na Transformada Chirp Z

Carlos H Beuter*, Mário Oleskovicz†

Universidade de São Paulo

Escola de Engenharia de São Carlos

Departamento de Engenharia Elétrica e de Computação

Avenida Trabalhador São-carlense, 400

CEP 13566-590 – São Carlos – SP – Brasil

Email: {*cbeuter, †olesk}@usp.br

Resumo—Este artigo apresenta a Transformada Chirp Z (TCZ) para estimação da frequência fundamental, como uma alternativa às ferramentas usuais, tais como a Transformada Discreta de Fourier (TDF) e a Transformada Rápida de Fourier – Fast Fourier Transform (FFT). A TCZ é aplicada nos casos em que é necessário uma resolução maior em determinado trecho do espectro e se mostra bastante promissora para as medições de componentes harmônicas. O artigo aborda as propriedades e limitações, bem como alternativas de contornar o problema da resolução em oposição a precisão. Este trabalho dá ênfase para as variações em torno da frequência fundamental (60 Hz) e mostra as relações existentes entre o número de amostras empregadas no janelamento do sinal e a precisão na extração da frequência fundamental. Os sinais foram analisados com diferentes taxas de amostragens e passos similares aos usados em equipamentos de instrumentação. O Algoritmo Ortométrico médio da TCZ (AOTCZ) é validado para 60 Hz e apresenta ganho significativo de precisão. Os resultados apresentados indicam que quanto maior a janela temporal das amostras, maior e mais estável será a resolução da frequência fundamental.

Palavras chave—Transformada Chirp Z, frequência fundamental, estimação da frequência, componentes harmônicas.

I. INTRODUÇÃO

A busca por um método de extração da frequência fundamental, na presença de componentes harmônicos e inter-harmônicos, ainda é motivo de interesse e estudo pela comunidade científica. No monitoramento do Sistema Elétrico de Potência (SEP) como um todo, a necessidade da extração da frequência fundamental pode ser justificada em um conjunto de situações de grande relevância, tais como: no monitoramento dos transformadores [1]; balanço e fluxo de potência [2][3]; redes de distribuição [4]; e em dispositivos de proteção, com as mais variadas filosofias implementadas [5].

Muitas outras técnicas avançadas, tais como a Transformada Rápida de Fourier, ou Fast Fourier Transform (FFT) interpolada [6], Filtros Kalman [7], Phase-Locked Loop (PLL) aprimorado [8], Wavelets [9], incluindo as híbridas, tem sido propostas ao longo dos últimos anos, grande parte das quais, com foco na análise de sinais não estacionários. Algumas são mais efetivas em alguns aspectos e situações. No entanto, muitas delas são ferramentas de implementação mais complexa em

relação as técnicas mais simples e clássicas, como é o caso da Transformada Discreta de Fourier (TDF).

Vale comentar que a norma IEC 61000-4-7 apresenta como metodologia recomendada para a medição e minimização de erros instrumentais, o uso da TDF, com janelamento retangular, e com resolução mínima de 5 Hz [10].

Dentre as técnicas de baixa complexidade, como alternativa as clássicas TDF e FFT, existe a Transformada Chirp Z (TCZ). A TCZ foi proposta por Rabinier [11] [12] nos anos 70. Esta também é conhecida como Transformada *Bluestein* [13], visto que a proposta inicial era de aplicá-la como uma combinação da FFT e a Inversa da Transformada Rápida de Fourier – Inverse FFT (IFFT) [14].

A TCZ apresenta características que também permitem a extração da frequência fundamental. O método que utiliza a TCZ ainda é pouco explorado e não muito abordado pela literatura para esta necessidade da estimação da frequência fundamental, especialmente em se tratando de sinais com frequência variável.

Em um sinal variante no tempo, um dos principais problemas é por exemplo, identificar a frequência fundamental, particularmente 60 Hz, diante do surgimento de componentes harmônicos, inter-harmônicos e a inclusão de ruído [15].

Ao abordar as características da TCZ, o sinal utilizado neste artigo será em regime permanente, com frequência monotônica e sem a presença de deslocamento (*off-set*) de Corrente Contínua (CC), ou decaimento exponencial de CC.

Com base em [16], esta proposta é uma alternativa ao procedimento abordado na IEC 61000-4-7 [10], com ênfase aos 12 ciclos da frequência fundamental em 60 Hz (i.e. 0.2 s). Neste trabalho, a avaliação inclui adicionalmente a variação da taxa de amostragem e a validação do Algoritmo Ortométrico médio da TCZ (AOTCZ) [16]. No entanto, não será aqui avaliado o esforço computacional dos algoritmos envolvidos.

II. A TRANSFORMADA CHIRP Z E AOTCZ

A TCZ, também conhecida pelo algoritmo FFT *Bluestein* ou Transformada *Bluestein*, é uma transformada FFT ajustável, calculada no plano z . Esta transformada é calculada ao longo

dos contornos espirais no plano z para uma sequência de entradas (1).

$$TCZ(x[n]) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot z_k^{-n} \quad (1)$$

A TCZ é muito similar à transformada z (2), composta pela soma de uma série de potências z complexas [17, p.103].

$$X(z) = \sum_{n=N_1}^{N_2} x[n] \cdot z_k^{-n} \quad \{N_1 \leq n \leq N_2\} \neq 0 \quad (2)$$

Ao contrário da transformada z , a TCZ não é restrita a operar ao longo do círculo unitário, mas pode avaliar a transformada z ao longo dos contornos descritos por

$$z_k = A \cdot W^{-k}, \quad k = 0, \dots, M-1 \quad (3)$$

onde A é o ponto de partida complexo dado por $A_0 e^{j\theta_0}$; W é um escalar complexo descrevendo a relação complexa entre os pontos sobre o contorno dado por $W_0 e^{-j\theta_0}$; e M é o comprimento da transformação. A_0 e θ_0 são o comprimento do raio do vetor e o ângulo de partida da amostra no ponto z_0 .

Sendo assim, a Transformada Chirp Z equivale a um *zoom* (detalhamento ou magnificação) espectral, pois permite obter uma interpolação mais finamente espaçada de uma porção do espectro (embora a resolução de frequência ainda esteja limitada pelo tempo de amostragem total)[18][14].

Quanto a proposta de utilização do **AOTCZ** [16], o sinal deve avançar 90° na fase ϕ , partindo aproximadamente de

$$T_q = \frac{f_s}{4f_0} \quad (4)$$

onde T_q é um quarto do período do sinal; f_s a frequência de amostragem; e f_0 a frequência nominal.

O novo sinal em avanço de $\phi = 90^\circ$ é expresso por

$$\mathbf{Y}_2 = [y(n_0 + T_q), y(n_0 + T_q + 1), \dots, y(N)]. \quad (5)$$

Finalmente, a frequência espectral usando AOTCZ é dada pela média entre a TCZ de ϕ e $\phi + 90^\circ$.

III. CARACTERÍSTICAS DA TCZ

Cabe esclarecer que as simulações e comparações iniciais que serão apresentadas neste trabalho, serão apenas para verificar os resultados apresentados por [16] para um sinal com frequência fundamental de 50 Hz, e visam validar as limitações e particularidades da TCZ. Contudo, na sequência, os demais tópicos abordados serão detalhados para 60 Hz, explorando melhor alguns parâmetros próprios da TCZ que serão apresentados na sequência e o efeito de suas variabilidades, a exemplo da taxa amostral.

A adoção de $M=600$ e $M=6000$ ao longo dos **experimentos 01 a 03**, tem como base [16] adaptado para 60Hz, respeitando os limites de $\pm 5\%$ de [10] para a faixa de observação da frequência f_0 . Adicionalmente, $M=1.200$ no **experimento 04** visa avaliar o efeito do dobro da frequência fundamental, dobrando o M . Já para $M=12.000$ no **experimento 05** e

$M=16.000$ no **experimento 06** permite obter uma melhor resolução em casos de variação de fase inicial e múltiplas harmônicas respectivamente. Os demais parâmetros, tais como frequência de amostragem (f_s), tempo de observação (t) e outros, quando utilizados, são justificados em cada experimento.

A. Comparação da resolução espectral e precisão da TCZ

Ao analisar o espectro de frequência a partir da FFT, a resolução e a precisão são normalmente consideradas com o mesmo valor e se tornam melhores tanto quanto maior for a janela de observação. A resolução espectral para a FFT é dada por

$$\Delta f_{FFT} = \frac{f_s}{N} = \frac{1}{T_W} \quad (6)$$

sendo Δf_{FFT} a resolução espectral da FFT (i.e. a distância entre duas linhas espectrais próximas); N o número de amostras do sinal amostrado em f_s ; e T_W é a janela de observação [19].

Já a resolução espectral pelo algoritmo da TCZ é dado por

$$R_{TCZ} = \frac{f_{max} - f_{min}}{M} \quad (7)$$

onde R_{TCZ} representa a resolução para a TCZ; f_{max} e f_{min} são a máxima e mínima frequência que limitam o intervalo de observação; e M é o número de amostras no intervalo de observação.

A TCZ não depende da janela de observação, ao contrário dos métodos clássicos (FFT, Welch [20], etc). De acordo com a Equação (7), enquanto M é suficientemente grande, a resolução pode ser arbitrariamente pequena.

Os resultados do processamento de dados a seguir ilustrarão a diferença da precisão e a resolução via o algoritmo da TCZ.

Experimento 01: Para estimar a frequência fundamental com frequência nominal de 60 Hz, um sinal senoidal arbitrário é amostrado com frequência variável ($480 \leq f_s \leq 15.360$ Hz), contendo 1.074 amostras. Para efeitos de comparação, serão empregadas a FFT e a TCZ. Toda a simulação e análise foram realizadas via o *MatLab*, e os resultados são apresentados na Tabela I.

A frequência fundamental estimada pelo uso da FFT variou de 59,60 Hz a 60,81 Hz (linhas em destaque), com erros de -0,67% a +1,36% entre $0,8054 \text{ Hz} \leq \Delta f_{FFT} \leq 4,3001 \text{ Hz}$ (6).

Em contrapartida, conforme visto na Tabela I, a frequência fundamental estimada via a TCZ variou de 59,97 a 60,00 Hz, com erros de -0,06% a +0,00%, com resolução espectral R_{CZT} fixa de 0,033 Hz (7) para $M = 600$. O intervalo de frequência de observação da TCZ para este experimento foi de $f_w = [50 \text{ Hz}, 70 \text{ Hz}]$.

As duas últimas linhas da Tabela I também indicam que para um número fixo de amostras (N), em frequências de amostragem elevadas (f_s), ocorre um comprometimento na precisão na TCZ. Sendo assim, o próximo passo é apresentar a influência de N na precisão da TCZ.

Experimento 02: Para um sinal com intervalo de frequência de observação de $f_w = [57 \text{ Hz}, 63 \text{ Hz}]$ seguiu-se a

Tabela I: Resolução da FFT em comparação com a TCZ em função da frequência de amostragem (f_s).

f_s	Δf_{FFT}	F_{FFT}	$err(\%)$	F_{CZT}	$err(\%)$
480	0,8054	59,60	-0,67	60,00	+0,00
960	1,3873	59,65	-0,58	60,00	+0,00
1.920	2,1720	60,81	+1,36	60,00	+0,00
3.840	3,0284	60,57	+0,95	60,00	+0,00
7.680	3,7721	60,35	+0,59	59,97	-0,06
15.360	4,3001	60,20	+0,34	59,97	-0,06

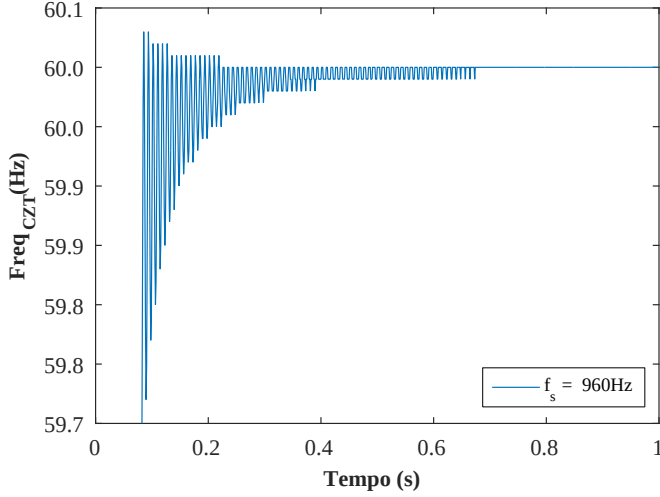


Fig. 1: Frequência estimada pela TCZ em função da variação do tempo de amostragem.

recomendação de [21] para o método da IEC61000-4-7 [10], ou seja, $[f_0(1 - 5\%), f_0(1 + 5\%)]$, sendo f_0 a frequência fundamental. Assumindo $M = 600$, a resolução de frequência é 0,01 Hz (7). Quando o comprimento N dos dados varia entre 80 e 960, isto é, o tempo de amostragem da janela varia de 0,082 s a aproximadamente 1 s, cada valor da frequência estimada pela TCZ é calculado e ilustrado na Fig. 1.

Cabe informar que foram utilizadas janelas deslizantes, com um passo de deslizamento de 1 ms, que para este sinal equivale a aproximadamente o deslocamento da janela amostra-a-amostra. A frequência de amostragem foi de 960 Hz, ou seja, uma taxa de 16 amostras/ciclo em 60 Hz. O tempo de amostragem da janela inferior a 0,082 s foi desconsiderado, uma vez que resultaria em grande variação da TCZ, fugindo do propósito do experimento.

Na Fig. 1, é indicado que quando a janela de amostragem (tempo de amostragem) é pequena, a precisão espectral é pior do que a resolução. Com base nas simulações computacionais realizadas, a precisão espectral observada pela TCZ foi de aproximadamente 0,1 Hz, para uma janela de amostragem de 0,2 s, enquanto a resolução espectral foi de 0,01 Hz (7). Foi possível verificar também que com uma janela de amostragem suficientemente grande, a precisão pode acompanhar a resolução. Adicionalmente, variando a taxa amostral em 2^n , com $n = 3, 4, \dots, 7$, a convergência para grandes janelamentos apresentou resultado similar.

Vale comentar que quando a TCZ é aplicada, não é ne-

Tabela II: A flutuação da frequência pela TCZ.

t(s)	M	R_{TCZ} (Hz)	f_{TCZ} (Hz)	Δf_F (Hz)
0,2	600	0,01	59,94 - 60,01	0,07
	6.000	0,001	59,950 - 60,010	0,060
1	600	0,01	60,00 - 60,00	0,00
	6.000	0,001	59,998 - 60,000	0,002

cessária nenhuma outra técnica de processamento, tal como técnicas de interpolação ou preenchimento por zeros (valores nulos) – *zero padding*, uma vez que o método proposto é capaz de assegurar uma boa resolução espectral e precisão, como facilmente compreendido a partir de (7) e apresentado em [21].

B. Frequência monotônica do sinal senoidal para simulação

Assume-se um sinal senoidal y com frequência nominal de 60 Hz e fase inicial $\phi = 30^\circ$:

$$y = \sin(120\pi t + 30^\circ) \quad (8)$$

Experimento 03: O sinal é discretizado com $f_s = 960$ Hz (16 amostras/ciclo) e em um intervalo de frequência de observação de $f_w = [57 \text{ Hz}, 63 \text{ Hz}]$ [10].

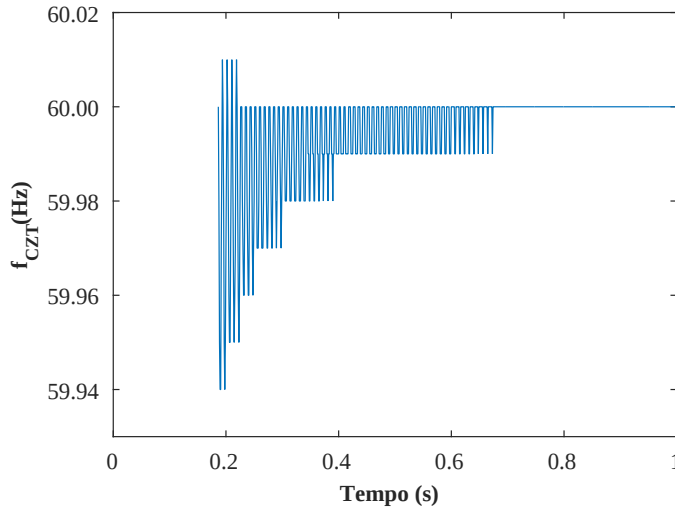
Para este sinal, adotou-se $M=600$, e o número de amostras N variando de 80 a 1.000, o que significa que o tempo de amostragem t varia de 0,048 até 1 s. Cada conjunto de amostra com diferentes valores de N foram analisados pela TCZ, e o resultado é apresentado na Fig. 2a. Como pode ser observado, quando $N = 160$ ($t = 0,2$ s), a frequência de flutuação da amplitude é de 0,07 Hz (aproximadamente 0,1 Hz), no entanto, a resolução espectral (R_{TCZ}) mantém-se em 0,01 Hz. O resultado da simulação realizada com $M=6.000$ é apresentado na Fig. 2b.

Os dados sumarizados são apresentados na **Tabela II** quando $t = 0,2$ s e 1 s. A Tabela II e a Fig. 2 implicam que a variação de M influencia muito pouco no resultado da f_{TCZ} quando t (a quantidade de amostras) é pequeno, devido a flutuação, visto que os valores de Δf_F e t são inversamente proporcionais.

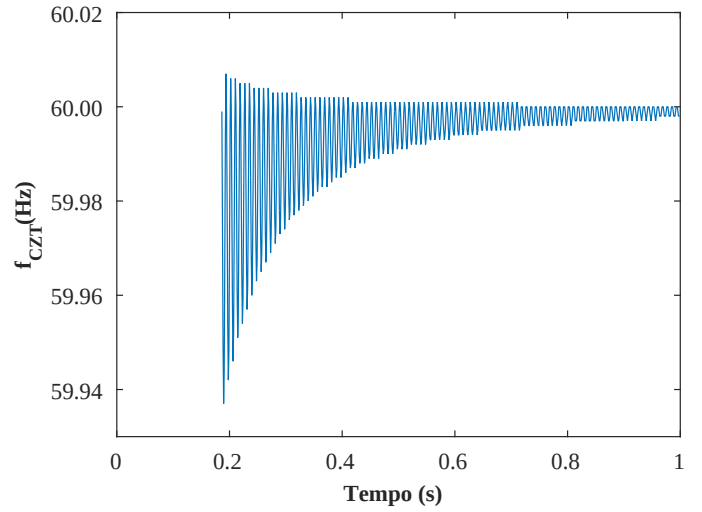
Somente quando o tempo de amostragem é grande o suficiente, M aumenta a precisão espectral. A Tabela II indica que, para aumentar a precisão espectral, não somente M deve ser incrementado, mas também o tamanho do janelamento do tempo de amostragem dos dados.

As simulações computacionais também indicaram que a precisão via a TCZ pode alcançar a resolução com um M arbitrário se t for suficientemente grande. A **Tabela III** mostra o tempo de amostragem e os ciclos do sinal necessários para que a precisão alcance o valor de resolução R_{TCZ} , quando a amplitude de flutuação se reduz a valores da ordem de 10^{-4} e 10^{-5} (em relação a 60 Hz).

Os resultados da Tabela III sugerem que uma melhor precisão necessita de um tempo de amostragem longo. Fornecendo tempo de amostragem longo (indiretamente N longo), a precisão espectral pode ser suficiente. Por outro lado, um



(a) Espectro de frequência via a TCZ, com $M=600$.



(b) Espectro de frequência via a TCZ, com $M=6.000$.

Fig. 2: Frequência estimada pela TCZ em função da variação do tempo de amostragem t para um sinal monotônico.

Tabela III: Tempo de amostragem necessário para a precisão alcançar uma resolução R_{TCZ} determinada.

M	R_{TCZ} (Hz)	Precisão (Hz)	f_{TCZ} (Hz)	t (Hz)	Ciclos
600	0,01	0,01	60,01	0,674	43
6000	0,001	0,001	60,001	2,149	135

Tabela IV: Número de ciclos necessários para a mesma acuracidade da resolução com diferentes frequências nominais.

f (Hz)	f_w (Hz)	Δf_{TCZ} (Hz)	t (s)	ciclos
6	5,7-6,3	0,0005	8,844	56
60	57-63	0,005	0,8844	56
120	114-126	0,01	0,4422	56

tempo de amostragem longo e um M grande, implicam em um custo (esforço) computacional significativo, não avaliado neste trabalho.

C. Relação entre a precisão e número de ciclos

Experimento 04: A fim de verificar as características da TCZ com diferentes sinais de frequência, é apresentada a seguir uma simulação com a frequência de sinal em 6,0 Hz, 60 Hz e 120 Hz, com 16 amostras/ciclo e $M=1.200$. As frequências escolhidas forma um décimo e o dobro da fundamental respectivamente, ou seja, visando verificar a influência das grandes variações da frequência sobre o número de ciclos e a respectiva precisão. A janela de observação da frequência f_w varia de acordo com a frequência nominal $\pm 5\%$ [10].

A Tabela IV apresenta o tempo mínimo de amostragem t e o número de ciclos necessários para que a TCZ alcance a mesma precisão que a resolução. Os resultados indicam que os números de ciclos mínimos são *praticamente* os mesmos para sinais com diferentes frequências, mesmo que as larguras das janelas de tempo de amostragem sejam muito diferentes. Conforme a Tabela IV o número de ciclos para a estabilidade é de aproximadamente 56. Outras simulações realizadas com diferentes taxas de amostragem (32, 64, 128 amostras/ciclo), indicam que o número de ciclos para a precisão e resolução se igualarem apresenta resultados muito similares.

Assim, a fim de melhorar a precisão espectral via a TCZ, não só M deve ser melhorado, mas também o número de ciclos do sinal deve ser suficiente. Consequentemente, o número de

ciclos é o parâmetro mais exato para descrever a relação da precisão espectral com os tempos de amostragem de dados.

D. Relação entre a TCZ e a fase do sinal

Por meio de simulações computacionais adicionais, verificou-se que quando o tempo de amostragem não é suficientemente longo, os resultados espectrais analisados pela TCZ oscilam de forma decrescente com a metade da periodicidade do sinal. As simulações também indicam que a fase inicial do sinal tem efeito no resultado da distribuição da frequência flutuante. Estes resultados são discutidos nas simulações realizadas em [16] com diferentes fases iniciais.

Experimento 05: Visando a confirmação para sistemas em 60 Hz, o sinal simulado e em análise, é expresso na frequência nominal $f_0 = 60$ Hz, conforme (8), e no intervalo de $[0,05 - 0,2]$ s. O intervalo de frequência de observação é ainda $f_w = [57 \text{ Hz}, 63 \text{ Hz}]$ e $M = 12.000$. As fases iniciais do sinal para a simulação são definidas em $\phi \in [0, 30, 60, 90]^\circ$

Os resultados das simulações são ilustrados pela Fig.3. Em todos os casos, quando aplicado o AOTCZ, foi possível observar maior precisão. Por exemplo, na Fig.3b a precisão é de 0,003 Hz para 0,2 s, o que é cerca de 20 vezes maior que 0,06 Hz indicada na Tabela II.

E. A frequência estimada pelo AOTCZ

Experimento 06: Considerando as condições de contorno apresentadas por [16], um novo sinal sintético foi formatado

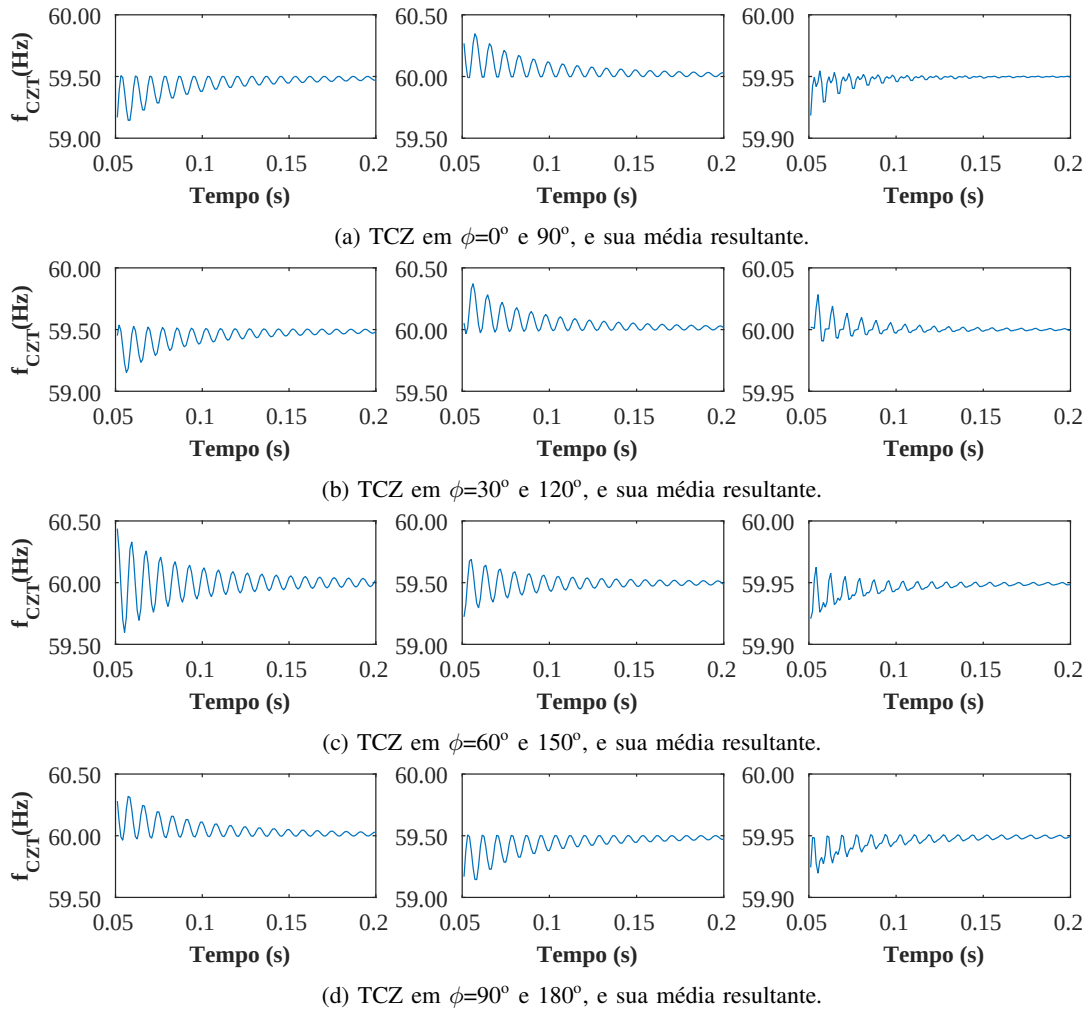


Fig. 3: TCZ resultante com diferentes fases iniciais e média com a fase somada em 90° .

com as seguintes frequências harmônicas [1; 3; 5; 7; 9; 11; 13; 15; 17; 19; 21; 23; 25; 27; 29], e suas respectivas amplitudes arbitradas em [1; 0,1; 0,09; 0,09; 0,08; 0,011; 0,013; 0,015; 0,017; 0,019; 0,021; 0,023; 0,025; 0,027; 0,029], respectivamente. A frequência fundamental do sinal em análise é de 60 Hz e todas as harmônicas apresentam um ângulo de fase $\phi=30^\circ$. A frequência de amostragem é de 27,84 kHz e a faixa de frequência na janela de observação é de [58 Hz 63 Hz] com $M=16.000$.

Uma frequência AOTCZ de 59,9863 Hz com o máximo de erro 0,0137 para a janela de 0,2 s é observado na Fig. 4. Assim, a frequência do sinal de potência poderia ser escrito para AOTCZ como $59.9863 \pm 0.0137Hz$ ou ainda $59.9863Hz \pm 0.0228\%$.

IV. CONCLUSÃO

As características da TCZ para sinais com frequência monótonas foram avaliadas com base em sinais com frequência fundamental de 60 Hz, taxas de amostragem de 16, 32, 64 e 128 amostras/ciclo, e limitados a passos de janelamentos não inferiores a 1 ms. Os sinais compilados

foram também aplicados e validados via o AOTCZ [16]. Pelos estudos investigativos realizados até o momento, observa-se que precisão da TCZ aumenta proporcionalmente com o tempo de amostragem, até atingir o mesmo que a resolução em aproximadamente 56 ciclos, independente da taxa de amostragem. A distribuição de erro da TCZ está fortemente relacionada com a fase inicial do sinal, e é aproximadamente simétrica para dois sinais ortométricos, ou seja, defasados em 90° . Com base nas características simétricas, há fortes indícios que o AOTCZ pode ser usado para estimar a frequência do sinal com maior precisão que o mínimo requisitado pela metodologia IEC 61000-4-7 [10]. Os resultados das simulações indicam que a precisão do OACZT é de cerca de 3 mHz quando o tempo de amostragem é de 0,2 s. Sendo assim melhor do que o TCZ padrão, que possui uma precisão de cerca de 60 a 100 mHz para um sinal com as mesmas características. Portanto, uma das principais desvantagens da TCZ é o custo computacional adicional em relação a DFT e FFT, por outro lado, é possível extrair com maior precisão inter-harmônicos em relação as métodos tradicionais.

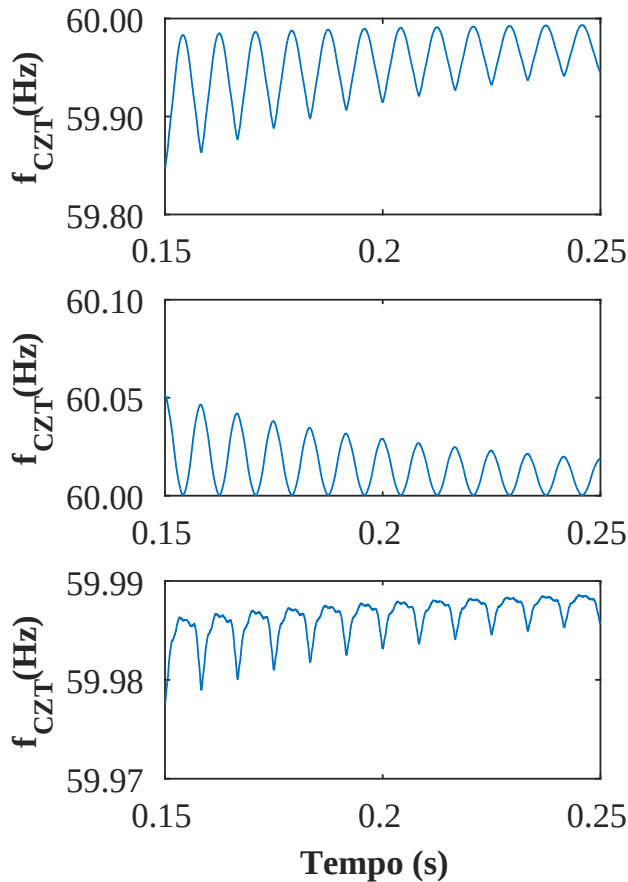


Fig. 4: Simulação usando a OATCZ.

VI. REFERÊNCIAS

- [1] N. Abeywickrama, T. Bengtsson, and R. Saers, "Transformer explorer: Monitoring transformer status by fundamental frequency signals," in *2016 International Conference on Condition Monitoring and Diagnosis (CMD)*, Sep. 2016, pp. 396–399.
- [2] ANEEL, "Resolução normativa nº 697, de 16 de dezembro de 2015." Dec. 2015, Agência Nacional de Energia Elétrica. [Online]. Available: <http://www2.aneel.gov.br/cedoc/ren2015697.pdf>
- [3] P. Kundur, N. Balu, and M. Lauby, *Power System Stability and Control*, ser. Discussion Paper Series. McGraw-Hill Education, 1994. [Online]. Available: <https://books.google.com.br/books?id=2cbvyf8Ly4AC>
- [4] P. F. Ribeiro, *Probabilistic Aspects of Time-Varying Harmonics*. Wiley-IEEE Press, 2010, pp. 3–18. [Online]. Available: <http://ieeexplore.ieee.org/xpl/articleDetails.jsp?arnumber=6168971>
- [5] C. Kocaman, O. Ozgonenel, M. Ozdemir, and U. K. Terzi, "Calculation of fundamental power frequency for digital relaying algorithms," in *10th IET International Conference on Developments in Power System Protection (DPSP 2010). Managing the Change*. Institution of Engineering and Technology (IET), March 2010, pp. 1–5. [Online]. Available: <http://dx.doi.org/10.1049/cp.2010.0327>
- [6] V. K. Jain, W. L. Collins, and D. C. Davis, "High-accuracy analog measurements via interpolated FFT," *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, vol. 28, no. 2, pp. 113–122, June 1979.
- [7] A. A. Girgis, W. B. Chang, and E. B. Makram, "A digital recursive measurement scheme for online tracking of power system harmonics," *IEEE Transactions on Power Delivery*, vol. 6, no. 3, pp. 1153–1160, Jul 1991.
- [8] M. Karimi-Ghartemani and M. Iravani, "Measurement of harmonics/inter-harmonics of time-varying frequencies," *IEEE Transactions on Power Delivery*, vol. 20, no. 1, pp. 23–31, Jan 2005. [Online]. Available: <http://dx.doi.org/10.1109/TPWRD.2004.837674>
- [9] P. F. Ribeiro, *Measurement Techniques and Benchmarking*. Wiley-IEEE Press, 2010, ch. 12, pp. 149–158. [Online]. Available: <http://ieeexplore.ieee.org/xpl/articleDetails.jsp?arnumber=6168982>
- [10] IEC, *Electromagnetic compatibility (EMC) – Part 4-7: 2002 Testing and measurement techniques - General guide on harmonics and interharmonics measurements and instrumentation, for power supply systems and equipment connected thereto*, IEC, 2002, rLV. [Online]. Available: <https://webstore.iec.ch/publication/4228>
- [11] L. Rabiner, R. Schafer, and C. Rader, "The chirp Z-transform algorithm," *IEEE Transactions on Audio and Electroacoustics*, vol. 17, no. 2, pp. 86–92, Jun 1969.
- [12] L. R. Rabiner, R. W. Schafer, and C. M. Rader, "The chirp Z-transform algorithm and its application," *Bell System Technical Journal*, vol. 48, no. 5, pp. 1249–1292, 1969. [Online]. Available: <http://dx.doi.org/10.1002/j.1538-7305.1969.tb04268.x>
- [13] L. Bluestein, "A linear filtering approach to the computation of discrete Fourier transform," *IEEE Transactions on Audio and Electroacoustics*, vol. 18, no. 4, pp. 451–455, Dec 1970.
- [14] G. D. Martin, "Chirp Z-transform spectral zoom optimization with matlab," Sandia National Laboratories, Tech. Rep., Nov 2005.
- [15] T. H. Ortmeier, *Transients and Harmonics*. Wiley-Blackwell, 2009, ch. 3, pp. 25–27. [Online]. Available: <http://dx.doi.org/10.1002/9780470746752.ch3>
- [16] G. Liu, Z. Dong, S. Yang, and X. Zhao, "Power fundamental frequency detection based on orthometric average chirp-z transform," in *Automation and Computing (ICAC), 2012 18th International Conference on*, Sept 2012, pp. 1–6.
- [17] A. Oppenheim, *Discrete-Time Signal Processing*, 2nd ed., ser. Pearson education signal processing series. Pearson Education, 1999. [Online]. Available: <https://books.google.com.br/books?id=geTn5W47KEsC>
- [18] M. Aiello, A. Cataliotti, and S. Nuccio, "An induction motor speed measurement method based on current harmonic analysis with the chirp-z transform," *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, vol. 54, no. 5, pp. 1811–1819, Oct 2005.
- [19] M. Aiello, A. Cataliotti, V. Cosentino, and S. Nuccio, "Synchronization techniques for power quality instruments," in *Instrumentation and Measurement Technology Conference, 2004. IMTC 04. Proceedings of the 21st IEEE*, vol. 2, May 2004, pp. 1399–1404 Vol.2.
- [20] P. Welch, "The use of fast fourier transform for the estimation of power spectra: A method based on time averaging over short, modified periodograms," *IEEE Transactions on Audio and Electroacoustics*, vol. 15, no. 2, pp. 70–73, Jun 1967.
- [21] M. Aiello, A. Cataliotti, and S. Nuccio, "A Chirp-Z transform-based synchronizer for power system measurements," *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, vol. 54, no. 3, pp. 1025–1032, June 2005.