

SINCRONIZAÇÃO DE UM SISTEMA SPROTT-K CAÓTICO SUBATUADO BASEADO EM CONTROLE PROPORCIONAL COM GANHO VARIÁVEL

KEVIN H. M. GULARTE¹, ABDULLAH ZAITER², ROGÉRIO R. SANTOS³, JOSÉ A. R. VARGAS⁴

^{1,2,3,4}*Departamento de Engenharia Elétrica
Universidade de Brasília*

70910-900 Campus Universitário Darcy Ribeiro, Brasília, DF, Brasil

E-mails: kevinhmg@gmail.com, abdullah.zaiter@gmail.com, rogerio-rsantos@hotmail.com, vargas@unb.br

Abstract — This article proposes a synchronization scheme for a under-actuated chaotic Sprott-K system. Based on Lyapunov theory, to ensure robustness and convergence, and by employing a proportional control with variable gain, to dominate positive terms in the Lyapunov analysis, the convergence of the synchronization error to an arbitrary compact set is shown, allowing an error close to a neighborhood of the origin to be obtained. The main peculiarities of the proposed scheme are its robustness against internal and external disturbances and its simplicity, being useful in several synchronization applications, for example in secure telecommunication systems. To validate the proposed approach, the synchronization of a chaotic Sprott system using real components and in the presence of disturbances is considered.

Keywords — Lyapunov theory, analog electronics, nonlinear control, Sprott system.

Resumo — Este artigo propõe um esquema de sincronização para um sistema Sprott-K caótico subatuado. Com base na teoria de estabilidade de Lyapunov, para garantir a robustez e convergência, é empregando uma lei de controle proporcional com ganho variável, para dominar termos positivos na análise de Lyapunov, é provada a convergência do erro de sincronização para um conjunto compacto arbitrário, permitindo-se obter um erro próximo de uma vizinhança da origem. As principais peculiaridades do esquema proposto são a sua robustez contra perturbações internas e externas e sua simplicidade, sendo útil em diversas aplicações de sincronização como, por exemplo, em sistemas de telecomunicação com segurança. Para validar a abordagem proposta, a sincronização de um sistema Sprott caótico usando componentes reais e na presença de distúrbios é considerada.

Palavras-chave — Teoria de Lyapunov, eletrônica analógica, controle não linear, sistema de Sprott.

1 Introdução

A criptografia analógica baseada em caos é um assunto que tem despertado o interesse de vários pesquisadores no âmbito acadêmico e industrial. Esse interesse é motivado pela possibilidade de gerar sinais aparentemente aleatórios usando osciladores caóticos que podem ser definidos a partir de equações diferenciais ordinárias determinísticas (Sprott, 2010, Jovic, 2011).

Basicamente, a telecomunicação segura é baseada na sincronização de um circuito caótico para codificar as informações a serem transmitidas, denominado transmissor ou mestre, com um oscilador caótico para decodificar a informação cifrada, denominado receptor ou escravo. Por exemplo, em Kocamaz, et. al. (2018) é proposto um sistema de comunicação segura baseado em passividade para dois sistemas idênticos. Embora seja considerado um controlador de baixa ordem, na análise de estabilidade não é considerada a presença de distúrbios, o que limita a aplicação do sistema proposto, pois a presença de distúrbios internos ou externos é inevitável. Em Çiçek, et. al. (2018) é proposto um sistema para telecomunicação com base na teoria de estabilidade de Lyapunov que usa um sistema subatuado e não considera distúrbios na análise. Em Abd et. al.

(2017) é proposto um sistema de comunicação segura baseado em mascaramento caótico (Jovic, 2011) e estimação de estado, todavia não seja necessário a utilização de atuação em todos os estados do sistema receptor, já que é utilizado um observador adaptativo. A técnica tem uma aplicação limitada, pois não considera distúrbios e o controle é complexo, o que é decorrente do uso de estimadores de estado. Outros trabalhos na literatura apresentam também as deficiências supracitadas (Melendez-Cano et. al. 2017, Li et. al. 2017, Wang et. al., 2016, Halimi et. al. 2014, Bettayeb et. al. 2017).

Convém ressaltar que em todos os trabalhos anteriores somente foi considerada a validação usando elementos ideais nos circuitos analógicos, o que limita as conclusões que poderiam ser inferidas sobre a sua relevância em aplicações reais consiste na sua robustez na presença distúrbios e na sua facilidade de implementação.

Motivado pelos fatos anteriores, neste trabalho é proposto um sistema para telecomunicação segura baseado no circuito de Sprott-K (Sprott, 2010) subatuado e na teoria de estabilidade de Lyapunov. Cabe salientar que as principais peculiaridades do sistema proposto consistem em:

1) O esquema é robusto uma vez que considera distúrbios limitados em todos os estados para análise de estabilidade;

2) Ao contrário de Abd et. al. (2017), no sincronizador proposto somente é necessária a atuação em dois estados;

3) O sincronizador é estruturalmente simples já que utiliza o sistema simplificado de Sprott-K e não precisa de observadores adaptativos, ao contrário de Abd et. al. (2017). As leis de controle são mínimas quando comparadas com Kocamaz, et. al. (2017).

Por outro lado, o trabalho também tem como objetivo a implementação e validação do esquema proposto usando eletrônica analógica com componentes reais.

O artigo está organizado da seguinte forma: na seção 1 apresentá-se a motivação e a revisão da literatura; na seção 2 formula-se o problema e estabelece-se uma hipótese de limitação sobre a perturbação; na seção 3 encontra-se a dinâmica do erro, propõe-se o controle e prova-se que o erro residual de estado é limitado a partir da teoria de estabilidade de Lyapunov; na seção 4 foram feitas algumas simulações computacionais usando os softwares Matlab e Multisim e comentam-se os resultados; e na seção 5 elencam-se as principais conclusões do trabalho.

2 Formulação do Problema

Considere o seguinte sistema caótico.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= xy - z + u_1 \\ \dot{y} &= x - y \\ \dot{z} &= x + ay + u_3\end{aligned}\quad (1)$$

O sistema (1) é proposto por Sprott (2010), em que $x(t)$, $y(t)$ e $z(t)$ são os estados do sistema e $a = 0,3$. Com base em (1), considere os sistemas mestre e escravo perturbados:

$$\begin{aligned}\dot{x}_m &= x_m y_m - z_m + h_{1m}(t) \\ \dot{y}_m &= x_m - y_m + h_{2m}(t) \\ \dot{z}_m &= x_m + a y_m + h_{3m}(t)\end{aligned}\quad (2)$$

$$\begin{aligned}\dot{x}_s &= x_s y_s - z_s + h_{1s}(t) + u_1 \\ \dot{y}_s &= x_s - y_s + h_{2s}(t) \\ \dot{z}_s &= x_s + a y_s + h_{3s}(t) + u_3\end{aligned}\quad (3)$$

em que x_m , y_m e z_m são os estados do sistema mestre, e x_s , y_s e z_s são os estados do sistema escravo, e h_{1m} , h_{2m} e h_{3m} são distúrbios presentes no sistema mestre e h_{1s} , h_{2s} e h_{3s} são distúrbios presentes no sistema escravo.

Objetiva-se a sincronização dos sistemas (2) e (3), em que o sistema escravo é de natureza subatuada.

Comentário 1: Como o sistema (1) é caótico, seu comportamento é aperiódico e depende consideravelmente das condições iniciais, de modo que o sistema é sensível a mudanças nestas

condições iniciais. Por causa disso a sincronização de sistemas caóticos costuma ser considerada mais desafiante do que a sincronização feita em outros sistemas dinâmicos.

Hipótese 1: Assume-se que os distúrbios são limitados. Mais especificamente, se

$$\begin{aligned}\tilde{h}_1 &= h_{1s}(t) - h_{1m}(t) \\ \tilde{h}_2 &= h_{2s}(t) - h_{2m}(t) \\ \tilde{h}_3 &= h_{3s}(t) - h_{3m}(t)\end{aligned}\quad (4)$$

Considere que $\tilde{h}_1(t) \leq \bar{h}_1$, $\tilde{h}_2(t) \leq \bar{h}_2$ e $\tilde{h}_3(t) \leq \bar{h}_3$, sendo $\bar{h}_1$, $\bar{h}_2$ e $\bar{h}_3$ constantes desconhecidas e .

Comentário 2: O objetivo para se apresentar os sistemas (2) e (3) em que os distúrbios h são explicitamente considerados, é para salientar que o esquema de sincronização estudado é válido ainda que na presença de alterações decorrentes na dinâmica do sistema. Essas mudanças podem ser de natureza interna (tolerância dos componentes, comportamento não ideal, desgaste dos equipamentos) e externa (ruído, temperatura).

3 Equação do Erro de Sincronização e sinal de controle proposto

Definem-se os erros do sistema como sendo:

$$\begin{aligned}e_1 &= x_s - x_m \\ e_2 &= y_s - y_m \\ e_3 &= z_s - z_m\end{aligned}\quad (5)$$

Sendo que a dinâmica dos erros é dada pelas suas derivadas. Substituindo-se (2) e (3) nas derivadas de (5) e aplicando-se (4), obtém-se que:

$$\begin{aligned}\dot{e}_1 &= e_1 e_2 + e_1 y_m + e_2 x_m - e_3 + \tilde{h}_1 + u_1 \\ \dot{e}_2 &= e_1 - e_2 + \tilde{h}_2 \\ \dot{e}_3 &= e_1 + a e_2 + \tilde{h}_3 + u_3\end{aligned}\quad (6)$$

Teorema 1:

Considere os sistemas mestre e escravo descritos em (2) e (3) e as leis de controle proporcionais com ganho variáveis descritas por

$$\begin{aligned}u_1 &= -\psi_1 e_1 - e_1 y_s \\ u_3 &= -\psi_3 e_3\end{aligned}\quad (7)$$

Então, o erro de sincronização converge em tempo finito para o conjunto compacto $\Omega = \{e \in \mathbb{R}^3 \mid \|e\| \leq \theta\}$. Em que ψ_1 e ψ_3 são constantes positivas definidas pelo usuário.

Prova:

Considere a seguinte candidata de Lyapunov

$$V = \frac{1}{2}(e_1^2 + \gamma e_2^2 + e_3^2) \quad (8)$$

em que $\gamma \geq 0$. Derivando (9) em relação ao tempo ao longo das trajetórias dos erros resulta

$$\dot{V} = e_1 \dot{e}_1 + \gamma e_2 \dot{e}_2 + e_3 \dot{e}_3 \quad (9)$$

Substituindo-se (6) em (9), tem-se

$$\begin{aligned} \dot{V} = & e_1(e_1 e_2 + e_1 y_m + e_2 x_m - e_3 + \tilde{h}_1 + u_1) \\ & + \gamma e_2(e_1 - e_2 + \tilde{h}_2) \\ & + e_3(e_1 + a e_2 + \tilde{h}_3 + u_3) \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \dot{V} = & -\gamma e_2^2 + e_1 \tilde{h}_1 + \gamma e_2 \tilde{h}_2 + e_3 \tilde{h}_3 \\ & + e_1(u_1 + \gamma e_2 + e_1 e_2 + e_1 y_m + e_2 x_m) \\ & + e_3 u_3 + a e_2 e_3 \end{aligned} \quad (11)$$

Passando (11) para inequação, notando que $e_1 \tilde{h}_1 \leq \frac{1}{2}(e_1^2 + \tilde{h}_1^2)$, $\gamma e_2 \tilde{h}_2 \leq \frac{\gamma}{2}(e_2^2 + \tilde{h}_2^2)$, $e_3 \tilde{h}_3 \leq \frac{1}{2}(e_3^2 + \tilde{h}_3^2)$, $a e_2 e_3 \leq \frac{1}{2}(a^2 e_2^2 + e_3^2)$, $(\gamma + x_m)e_1 e_2 \leq \frac{1}{2}[(\gamma^2 + \bar{x}^2)e_1^2 + e_2^2]$ e substituindo (7) em (11), resulta em

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & -e_1^2 \left(\psi_1 - \frac{\gamma^2 + \bar{x}^2}{2} \right) \\ & - e_2^2 \left(\frac{\gamma}{2} - \frac{a^2}{2} - 1 \right) \\ & - e_3^2 (\psi_3 - 1,5) \\ & + \frac{1}{2} (\tilde{h}_1^2 + \gamma \tilde{h}_2^2 + 4 \tilde{h}_3^2) \end{aligned} \quad (12)$$

Considere que $\rho_1 = \psi_1 - \frac{\gamma^2 + \bar{x}^2}{2}$, $\rho_2 = \frac{\gamma}{2} - \frac{a^2}{2} - 1$, $\rho_3 = \psi_3 - 1,5$ e $\beta = \frac{1}{2} (\tilde{h}_1^2 + \gamma \tilde{h}_2^2 + 4 \tilde{h}_3^2)$, assim

$$\dot{V} \leq -e_1^2 \rho_1 - e_2^2 \rho_2 - e_3^2 \rho_3 + \beta \quad (13)$$

Note que como γ , ψ_1 e ψ_3 são arbitrários, é possível defini-los de modo que ρ_1, ρ_2 e ρ_3 sejam positivos. Definindo $\rho = \min \{\rho_1, \rho_2, \rho_3\}$, (14) pode ser escrita como

$$\dot{V} \leq -\rho \|e\|^2 + \beta \quad (14)$$

Definindo também o conjunto compacto $\Omega = \{e \in \mathbb{R}^3 \mid \|e\| \leq \theta\}$, busca-se a partir de (14) a situação em que $\dot{V} \leq 0$, que ocorre em $\|e\| > \sqrt{\frac{\beta}{\rho}} := \theta$, como θ é constante, pode-se afirmar que o erro de sincronização é limitado. Em outras palavras, pode-se afirmar que se por qualquer razão $\|e\|$ deixar o conjunto residual Ω , $\dot{V}$ se torna negativo definido e força a convergência do erro de sincronização para o conjunto residual Ω , conforme (15). Em outras palavras, se a $\dot{V} \leq 0$ for satisfeita,

a norma do erro somente poderá diminuir com o decorrer do tempo. Conclui-se então que o erro de sincronização é limitado e converge para uma bola com raio igual a θ .

Comentário 4: Pode-se notar pela prova que distúrbios limitados já foram considerados. Assim, a partir da escolha de parâmetros de projeto do controlador pode se levar a um erro de sincronização próximo de zero, ainda que na presença de distúrbios limitados.

4 Simulação

Simulações computacionais foram realizadas visando validar a lei de controle (7) para o sistema (1). Utilizou-se o software Matlab com o método ode113 com passo variável e o software Multisim com passo variável, método de integração Trapezoidal e tolerância absoluta de erro de voltagem igual a 0,001.

Foram consideradas como condições iniciais nos sistemas mestre e escravo como $x_m(0) = 0$; $y_m(0) = 0,1$; $z_m(0) = 0,1$, $x_s(0) = 0,1$; $y_s(0) = 0$ e $z_s(0) = 0$. Para sincronização do sistema mestre e do escravo, utilizou-se a lei de controle (7) e escolheram-se os parâmetros como sendo $\psi_1 = 20$ e $\psi_3 = 2$. Para sincronização do sistema mestre e do escravo, utilizou-se a lei de controle (7) e escolheram-se os parâmetros como sendo $\psi_1 = 20$ e $\psi_3 = 2$. As figuras 1-3 mostram os resultados da sincronização feita no Matlab. Percebe-se que o sistema escravo consegue se aproximar do sistema mestre, de forma que se pode afirmar que o erro de sincronização está numa vizinhança da origem. As figuras mostram que embora se coloque o sinal de controle em apenas dois dos estados (estados x e z), mesmo assim a sincronização ocorre de forma efetiva para os três estados. Em outras palavras, pelas simulações, pode-se notar que o sinal transmitido pelo transmissor foi sincronizado com o receptor.

Nas figuras 4-6 são mostrados os circuitos mestre, escravo, de controle, de codificação e de decodificação feitos no Multisim. Na figura 7 é exibida uma mensagem original transmitida e a versão recebida e decodificada, na figura 8 é mostrada a mensagem codificada com a presença de distúrbios e interferências no canal público. Note que os circuitos que foram implementados no Multisim utilizando componentes reais com diferentes tolerâncias para testar o esquema proposto na presença de perturbações internas importantes, o que faz com que se tenha dinâmica não modelada em todas as equações de estados. Além disso, foi considerada uma fonte de distúrbios externa (D) para representar as interferências que o sinal, a ser transmitido, sofre no canal público. Apesar de tudo isso a figura 7 mostra que o sincronizador se comportou de forma satisfatória, ou seja, não houve muita perda de informação mesmo na presença de componentes

não ideais e distúrbios limitados. Isso demonstra sofisticação do sincronizador proposto como esperado teoricamente.

5 Conclusão

Neste artigo, com base na teoria de estabilidade de Lyapunov foi proposto um algoritmo de sincronização para sistemas Sprott-K caóticos subatuados e sujeitos a distúrbios limitados. Provou-se que somente é necessário o emprego de dois sinais de controle para realizar a sincronização completa dos sistemas mestre e escravo. Validou-se a eficácia do sinal de controle a partir de simulações computacionais. Trabalhos futuros que consideram a implementação prática do circuito elétrico do Multisim estão atualmente em andamento.

6 Referências

- Abd, M. H.; Tahir F. R.; Ghaida A. A.; Pham, V. “An adaptive observer synchronization using chaotic time-delay system for secure communication”, *Nonlinear Dynamics*, Springer, vol. 90, n. 4, p. 2583-2598, 2017.
- Bettayeb, M.; Al-saggaf, U. M.; Djennoune, S. “Single channel secure communication scheme based on synchronization of fractional-order chaotic Chua’s systems”, *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, p. 0142331217729425, 2017.
- Çiçek, S.; Kocamaz, U. E.; Uyaroğlu, Y. “Secure Communication with a Chaotic System owning Logic Element”, *International Journal of Electronics and Communications*, vol. 88, p. 52-62, 2018.
- Halimi, M.; Kemih, K.; Ghanes, M. “Circuit Simulation of an Analog Secure Communication based on Synchronized Chaotic Chua’s System”, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, vol. 8, n. 4, p. 1509, 2016.
- Jovic, B. “Synchronization Techniques for Chaotic Communication Systems”, Springer Science & Business Media, 2011.
- Kocamaz, U. E.; Çiçek, S.; Uyaroğlu, Y. “Secure Communication with Chaos and Electronic Circuit Design Using Passivity-Based Synchronization”, *Journal of Circuits Systems, and Computers*, vol. 27, n. 4, p. 1850057, 2018.
- Li, C.; Sprott, J. C.; Mei, Y. “An infinite 2-D lattice of strange attractors”, *Nonlinear Dynamics*, Springer, vol. 89, n. 4, p. 2629-2639, 2017.
- Melendez-Cano, A.; Rodrigues, J. S.; Sandoval-Ibarra Y.; Cardenas-Valdez J. R.; Garcia-Ortega, M. J. “Chaotic Synchronization of Sprott Collection and RGB Image Transmission”, *International Conference on Mechatronics, Electronics and Automotive Engineering*, p. 49-54, 2017.
- Sprott, J. C. “Elegant Chaos. Algebraically Simple Chaotic Flows”, World Scientific, 2010.
- Wang, B.; Zhong, S. M. ; Dong, X. C. “On the novel chaotic secure communication scheme design”, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, vol. 39, p. 108-117, 2016.

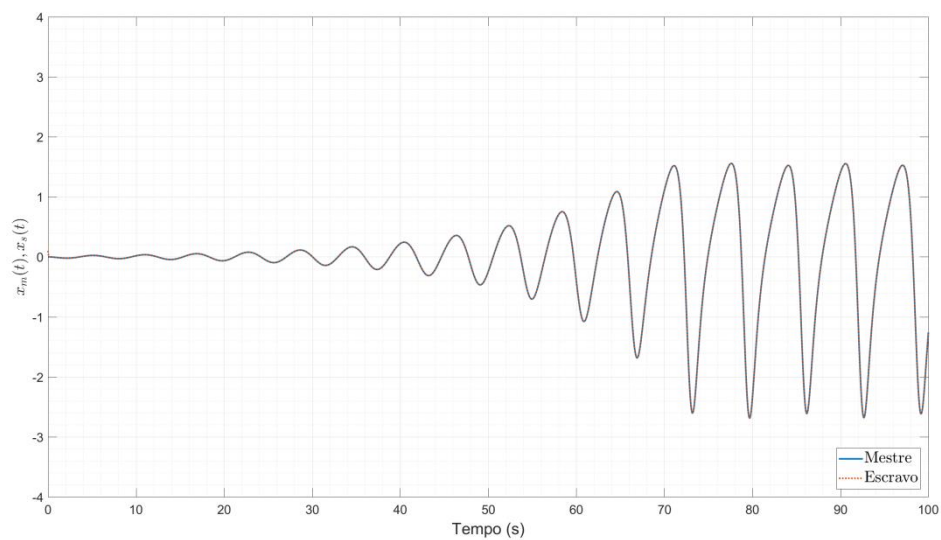


Figura 1 – Desempenho na sincronização de $x_m(t)$ e $x_s(t)$

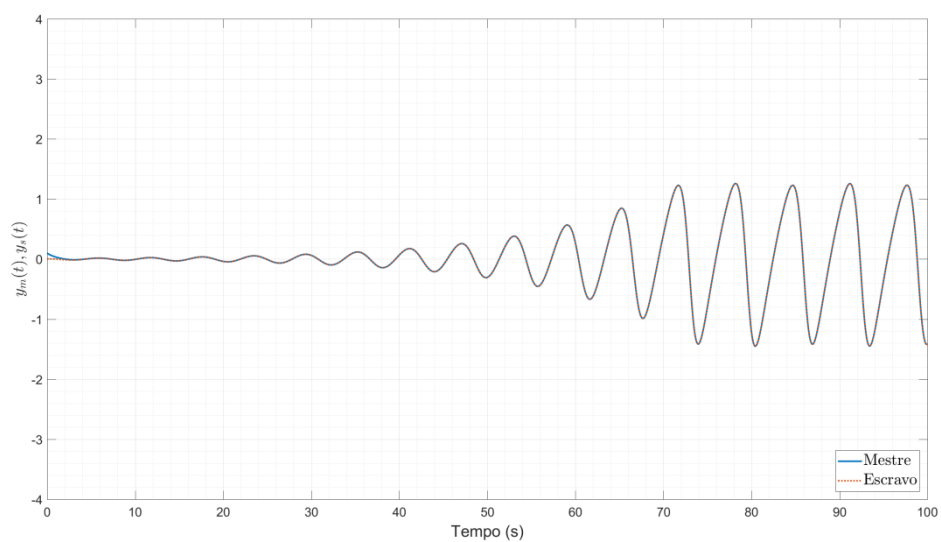


Figura 2 – Desempenho na sincronização de $y(t)$ e $y_s(t)$

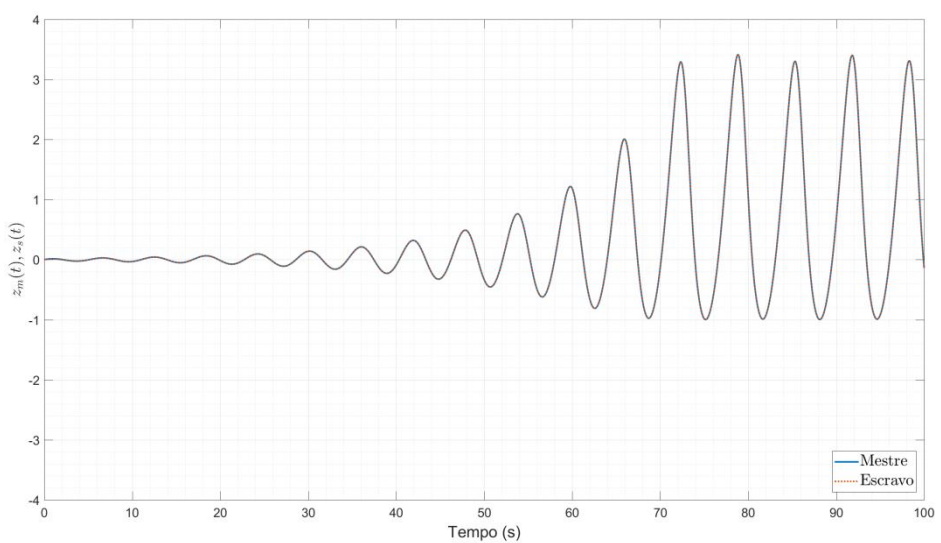


Figura 3 – Desempenho na sincronização de $z_m(t)$ e $z_s(t)$

$$x' = xy - z$$

$$y' = x - y$$

$$z' = x + 0,3z$$

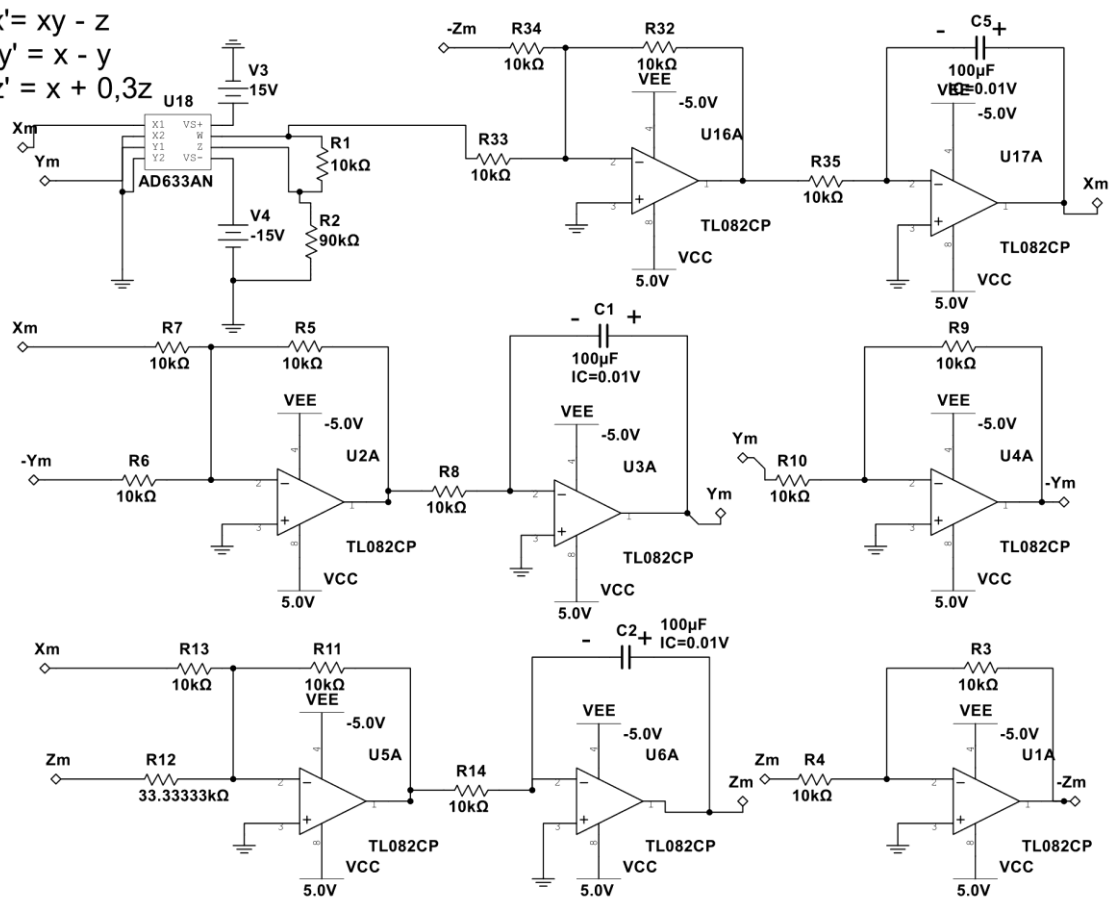


Figura 4 – Circuito Mestre

$$x' = xy - z + U1$$

$$y' = x - y$$

$$z' = x + 0.3z + U3$$

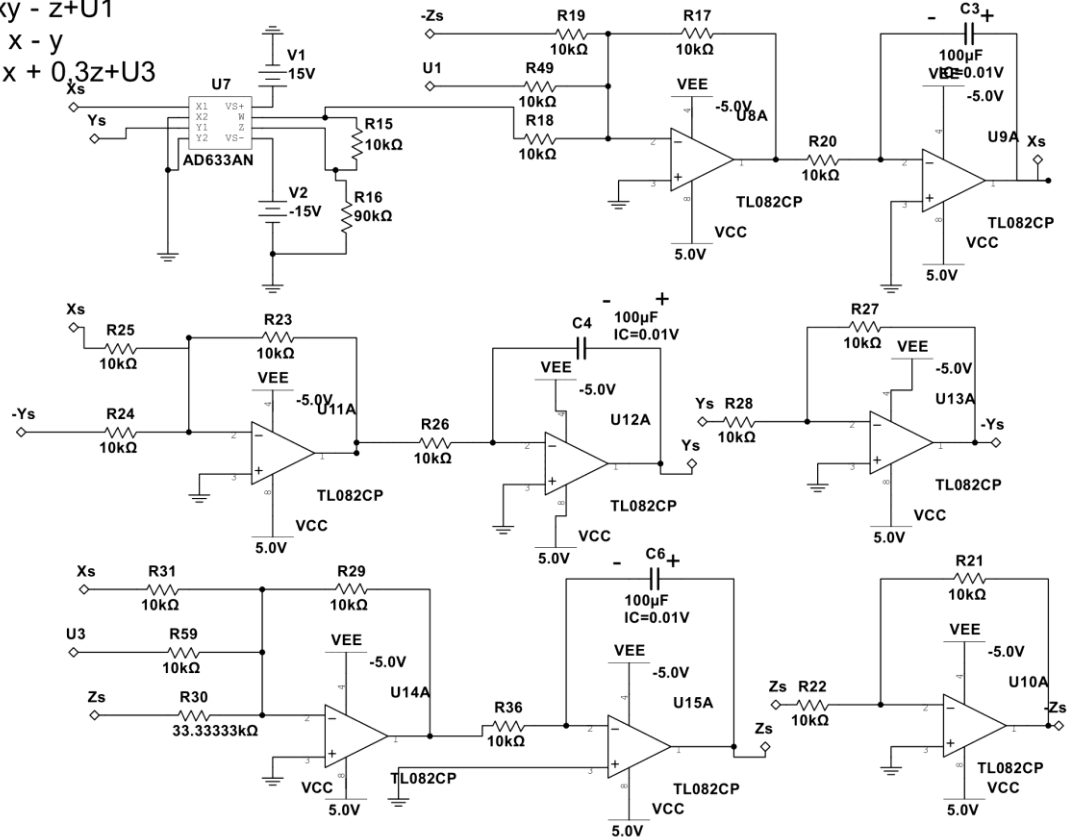


Figura 5 – Circuito Escravo

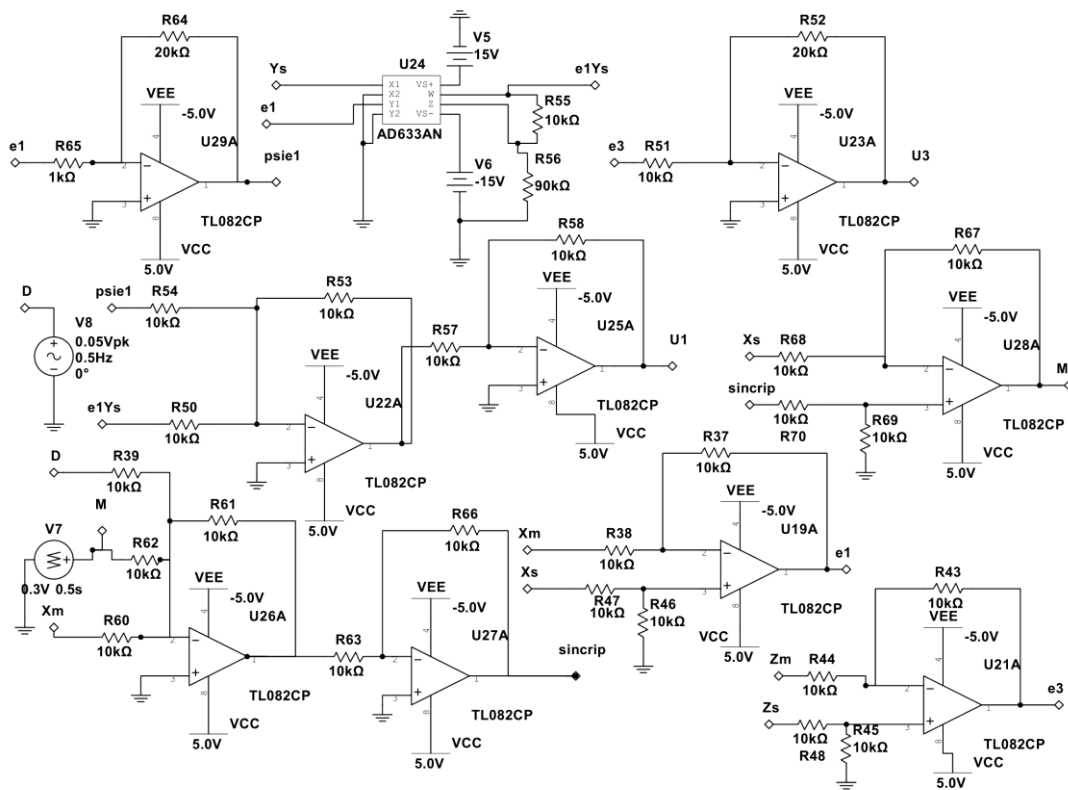


Figura 6 – Controle, codificação e decodificação considerando distúrbios no canal público

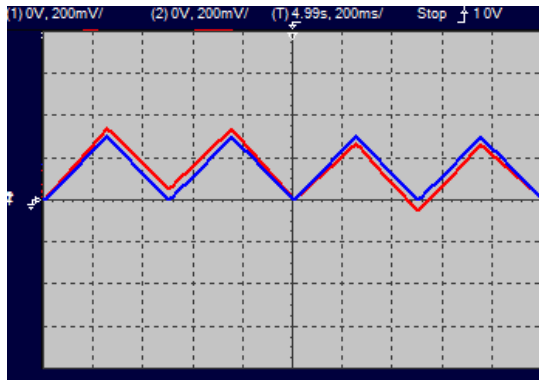


Figura 7 – mensagem original (azul) e mensagem decodificada (vermelho)

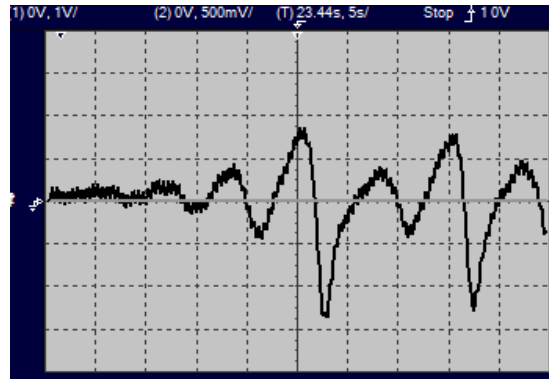


Figura 8 – Mensagem codificada (canal público)