

CARACTERIZAÇÃO PARAMÉTRICA DE SISTEMA NÃO LINEAR NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA POR SÉRIE DE VOLTERRA DIAGONAL

Email:

Abstract— This paper presents a strategy for the characterization of a linear nonlinear system represented by a series of linear, one - dimensional, and independent input disciplines. By expressing as invariant characteristics of the system, it makes use of functions of response in the diagonal frequency for the analysis and characterization of a mechanical non-linear Duffing oscillator. The study is justified by the great complexity in which nonlinear systems bring better results in the frequency domain. Thus, using consolidated verification and structural selection techniques, polynomial models are identified from simulated system data. The results allow to characterize the behavior of the system in terms of its properties and to recover the state of the nonlinear coefficient through the diagonal powers for the aid in frequency of each diagonal term of the model.

Keywords— Nonlinear System, Identification, Analysis, Characterization.

Resumo— Este trabalho apresenta uma estratégia para a caracterização paramétrica de um sistema não linear representado por séries de Volterra diagonais, formalismo que expressa cada funcional por uma série de convoluções lineares, unidimensionais e independentes da entrada. Por expressarem as características invariantes do sistema, faz-se uso de funções de resposta em frequência das diagonais para análise e caracterização de um oscilador mecânico não linear do tipo Duffing. O estudo é justificado pela grande complexidade em que sistemas não lineares oferecem para suas análises no domínio da frequência. Assim, utilizando técnicas consolidadas de estimação e seleção de estruturas, modelos polinomiais Volterra em coordenadas diagonais são identificados a partir de dados simulados do sistema. Os resultados permitem caracterizar o comportamento do sistema em termos de suas propriedades invariantes e recuperar o estado do coeficiente não linear, através das potências diagonais obtidas pela resposta em frequência de cada componente diagonal do modelo.

Palavras-chave— Sistema Não-linear, Identificação, Análise, Caracterização.

1 Introdução

Caracterização paramétrica pode ser interpretada como o processo de descrever o comportamento e demais propriedades físicas de um sistema diante da variação de um parâmetro de interesse (Jing et al., 2008). Tais informações são importantes para projetos de controladores e problemas de diagnóstico de faltas, por exemplo. Tal procedimento encontra-se bem consolidado no contexto de sistemas lineares e invariantes no tempo (LIT), uma vez que as representações viabilizam a aplicação de técnicas sistemáticas, tais como lugar geométrico das raízes e diagramas de resposta em frequência. Aplicações bem sucedidas no contexto LIT atestam. No contexto não linear, por outro lado, a grande diversidade dinâmica e a complexa relação destas com os parâmetros dos modelos constituem desafios para a abordagem (Pearson, 1999).

As séries funcionais de Volterra (Volterra, 1959) têm se mostrado uma representação promissora neste sentido por oferecerem uma perspectiva de análise no domínio da frequência, onde as representações tendem a ser únicas (Xiao and Jing, 2015). A primeira opção neste cenário são as chamadas Funções de Resposta em Frequência Generalizadas (GFRFs). Estas funções expressam características invariantes do sistema, sendo uma extensão natural das funções de resposta em frequência (FRF) de sistemas LIT e têm sido base para estratégias de caracterização (Jing et al., 2006) e projeto. Contudo, estes métodos são severamente limitados devido à natureza mul-

tidimensional das GFRFs, o que dificulta sua determinação e interpretação física. Por esse motivo, conceitos alternativos de FRF tem sido propostos (Rijlaarsdam et al., 2017).

As funções de resposta em frequência de saída (OFRF) para sistemas não lineares (Z.Q. Lang S.A. Billings and Li, 2007) oferecem uma descrição explícita e analítica da relação entre o espectro de saída e os parâmetros, expandidos na forma polinomial, dos termos não lineares de um sistema. A técnica tem encontrado aplicações em problemas de análise e síntese, como na avaliação de ressonâncias e projeto visando o isolamento de vibrações mecânicas (Laalej and Lang, 2010). Dificuldades associadas à derivação das OFRF a partir dos modelos desencorajam essa abordagem em contextos mais amplos.

Este trabalho apresenta uma proposta de caracterização paramétrica a partir de representações Volterra em coordenadas diagonais (Raz and Van Veen, 1998). Neste formalismo, os funcionais da série Volterra são decompostos em um banco de filtros unidimensionais que podem ser interpretados como lineares de resposta finita ao impulso (FIR). Estas propriedades dos aqui denominados filtros diagonais constituem vantagens expressivas em relação às técnicas fundamentadas em GFRFs e oferecem perspectivas interessantes para a caracterização paramétrica de sistemas não lineares no domínio da frequência.

A metodologia proposta, consiste de identificar um modelo Volterra diagonal para cada valor do parâmetro de interesse, dentre um conjunto discreto de possibilidades em uma faixa pré-

estabelecida. Tais representações são medidas a partir de dados de entrada e saída do sistema, o que garante potencial em aplicações em sistemas reais. Então, a resposta em frequência dos filtros diagonais de cada modelo é determinada para processamento posterior, na tentativa de reconhecer padrões específicos de comportamento do sistema associados a valores únicos do parâmetro variante.

Para avaliar a abordagem utilizou-se um oscilador mecânico não-linear do tipo Duffing, onde a não-linearidade cúbica associada a mola confere à este sistema uma grande diversidade de comportamentos dinâmicos (Kovacic and Brennan, 2011). A partir de dados simulados de entrada e saída, modelos Volterra diagonais foram identificados com o algoritmo de mínimos quadrados ortogonais e seleção de estrutura baseada em taxa de redução do erro. Os modelos diagonais assim obtidos são avaliados de forma qualitativa.

O restante do trabalho é desenvolvido da seguinte maneira. Na seção 2 apresenta-se a metodologia do trabalho onde são mostradas as formulações da série Volterra de tempo discreto a série em coordenadas diagonais. Apresenta-se ainda o algoritmo de identificação OLS-ERR, juntamente com a função de resposta em frequência dos modelos Volterra dada por filtros lineares invariantes no tempo. Na seção 3, a partir da identificação do sistema Duffing, apresentam-se os resultados obtidos por meio das FRF. A seção 4 apresenta as conclusões do trabalho e possíveis abordagens futuras.

2 Metodologia

Um sistema não-linear, causal, de memória assintótica (Boyd and Chua, 1985) e invariante no tempo, com entrada $u(t)$ e saída $y(t)$, pode ser representado por uma série de Volterra de tempo discreto (Mathews and Sicuranza, 2000a),

$$y(t) = \sum_{d=1}^D y_d(t) \quad (1)$$

onde D é o grau máximo das não-linearidades e $y_d(t)$ expressa o funcional de grau d , descrito por

$$y_d(t) = \sum_{\tau} h_d(\tau_1, \dots, \tau_d) \prod_{i=1}^d u(t - \tau_i) \quad (2)$$

onde foi utilizada a notação simétrica (ref) simplificada

$$\sum_{\tau} \equiv \sum_{\tau_1=0}^{\infty} \dots \sum_{\tau_d=\tau_{d-1}}^{\infty} \quad (3)$$

A função multidimensional $h_d(\tau_1, \dots, \tau_d)$ é denominado kernel de grau d do funcional e está associada às características invariantes do sistema.

Assume-se que o operador funcional (2) exibe simetria em relação às possíveis permutações dos elementos das d -tuplas, propriedade desejável por reduzir a estrutura da série em relação à sua formulação convencional (Rugh, 1981).

Um atrativo particular da representação Volterra é a possibilidade de extrapolar para o contexto não linear o conceito de FRF, base da análise e síntese de sistemas lineares. Neste caso, define-se a transformada multidimensional de Fourier do kernel de grau d como a GFRF de mesmo grau:

$$\tilde{H}_d(\omega_1, \dots, \omega_d) = \sum_{\tau_1=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{\tau_d=-\infty}^{\infty} \chi_d \quad (4)$$

onde

$$\chi_d = h_d(\tau_1, \dots, \tau_d) e^{-j(\omega_1 \tau_1 + \dots + \omega_d \tau_d)} \quad (5)$$

sendo $0 \leq \omega_i \leq 2\pi$, $i \in \{1, 2, \dots, d\}$, representa a frequência angular normalizada em relação à frequência de amostragem.

Embora conceitualmente bem estabelecido, o conceito de GFR e a consequente tentativa de caracterização do sistema no domínio da frequência são desencorajados pelas dificuldades que existem para se determinar e principalmente analisar estas funções, devido basicamente suas propriedades serem descritas em espaço multidimensional, o que é particularmente problemático para $d > 2$.

2.1 Série Volterra diagonal

O principal problema com a forma (2) que é obstáculo à análise, identificação e implementação computacional, é o grande número de termos e coeficientes que a realização do funcional exige. Uma forma particular desta estrutura que busca contornar estes problemas é a chamada transformação em coordenadas diagonais (Raz and Van Veen, 1998), que consiste da seguinte mudança de variáveis sobre (2):

$$\tau_1 = l \quad (6)$$

$$\tau_i = l + k_{i-1} \quad (7)$$

para $d > 1$, onde $0 \leq k_{i-1} \leq k_i$, $i \in \{2, \dots, d-1\}$. Assim,

$$y_d(t) = \sum_{\mathbf{k}}^n g_d(t; \mathbf{k}) * u_d(t; \mathbf{k}) \quad (8)$$

onde $*$ representa a convolução discreta em relação ao tempo t , $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_d)$,

$$g_d(t; \mathbf{k}) = h_d(t, t + k_1, \dots, t + k_{d-1}) \quad (9)$$

representa os núcleos (kernels) ou filtros diagonais e

$$u_d(t; \mathbf{k}) = u(t) \prod_{i=1}^{d-1} u(t - k_i) \quad (10)$$

é o monômio generalizado de entrada de grau d e

$$\sum_{\mathbf{k}} \equiv \sum_{k_1=0}^n \cdots \sum_{k_{d-1}=k_{d-2}}^n \quad (11)$$

sendo n é um limitante sobre o número de diagonais utilizadas no modelo.

A forma diagonal é importante porque reduz os funcionais a uma série de convoluções unidimensionais, o que simplifica bastante a implementação computacional, uma vez que estas podem ser calculadas usando algoritmos eficientes, tais como baseados em transformada rápida de Fourier (Zeller and Kellermann, 2010). Contudo, a formulação também deve ser encarada como uma forma alternativa de representação do sistema, em que as operações multidimensionais são caracterizadas por filtragens dos termos $u_d(t, \mathbf{k})$. Como os filtros $g_d(t, \mathbf{k})$ são derivados diretamente dos kernels, eles carregam informações sobre as propriedades intrínsecas do sistema, o que, combinado a sua natureza unidimensional, os tornam ferramentas em potencial para resolver o problema de caracterização.

Perceber que na formulação diagonal, há uma redução substancial de notação, uma vez que não é necessário escrever explicitamente os termos do modelo associados ao mesmo monômio, devido a estes estarem incorporados nas convoluções. A tabela 1 ilustra como uma possível representação para uma série de grau 3, com $n = 1$. Notar que o ordenamento das diagonais é arbitrário.

Tabela 1: Monômios do sinal de entrada

Diagonal	d	$\mathbf{k}$	$u_d(t; \mathbf{k})$
1°	2	(0)	$u(t)^2$
2°	2	(1)	$u(t)u(t-1)$
3°	3	(0, 0)	$u(t)^3$
4°	3	(0, 1)	$u(t)^2u(t-1)$
5°	3	(1, 1)	$u(t)u(t-1)^2$

2.2 Resposta em frequência

Tomando a Transformada $\mathcal{Z}$ de (8), a série pode ser expressa no domínio da frequência como:

$$Y(z) = Y_1(z) + \sum_d \sum_k G_d(z; \mathbf{k}) U_d(z; \mathbf{k}) \quad (12)$$

onde $Y_1(z) = H_1(z)U(z)$, $G_d(z; \mathbf{k})$ e $U_d(z; \mathbf{k})$ são as Transformadas $\mathcal{Z}$ de $g_d(t; \mathbf{k})$ e $u_d(t; \mathbf{k})$, respectivamente. A equação (12) pode ser interpretada como uma representação explícita do sinal de saída como a soma das respostas de filtros lineares invariantes no tempo, cujas entradas são os monômios da entrada.

A figura 1 ilustra um diagrama de blocos que sintetiza um sistema a partir da formulação Vol-

terra diagonal em três estágios fundamentais. Inicialmente calculam-se atrasos puros do sinal de entrada, que são posteriormente processados por uma rede multiplicativa sem memória para construir os monômios; por fim, estes são filtrados pelos operadores diagonais, cujos resultados são então somados para compor a saída.

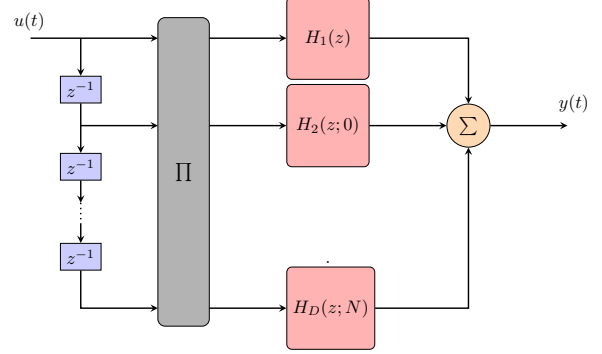


Figura 1: Representação em blocos de um modelo Volterra diagonal.

A proposta deste trabalho é caracterizar o sistema através da análise das propriedades de cada FRF invariante obtida quando $z = e^{j\omega}$, similar à análise de regime permanente senoidal em sistemas lineares. Obviamente, isso só pode ser feito se for possível medir as funções de transferência $G_d(z; \mathbf{k})$, o que é discutido na seção seguinte.

2.3 Algoritmo OLS-ERR

Se as convoluções em (8) forem truncadas em algum limite razoável, cada funcional pode ser escrito como uma combinação linear de versões atrasadas dos monômios associados, sendo os kernels diagonais $g_d(t; \mathbf{k})$ os coeficientes destas combinações. Isto torna o modelo Volterra diagonal linear nos parâmetros e, portanto, passível de identificação por métodos de regressão consagrados. Esta proposta não difere muito da identificação convencional de séries Volterra (Mathews and Sicuranza, 2000b), apenas no fato de que, ao final, os coeficientes estimados são interpretados diretamente no contexto diagonal, ao invés dos kernels multidimensionais.

Neste cenário, uma forma geral para a série Volterra diagonal, pode ser descrita pela equação de regressão:

$$y(t) = \sum_{m=1}^M \theta_m \psi_m(t) + e(t) \quad (13)$$

onde θ_m é um vetor de parâmetros correspondente às amostras de cada kernel do modelo, e os regressores $\psi_m(t)$ correspondem a versões atrasadas dos monômios do sinal de entrada. O erro $e(t)$ é um vetor de discrepâncias observadas ao tentar explicar a saída $y(t)$. Por exemplo, para um

modelo especificado pelos monômios de grau 3 da Tabela 1, e com convoluções truncadas em $L = 2$, têm-se: $\psi_1(t) = u(t-1)^3$, $\psi_2(t) = u(t-2)^3$, $\psi_3(t) = u(t-1)^2u(t-2)$, $\psi_4(t) = u(t-2)^2u(t-3)$, $\psi_5(t) = u(t-1)u(t-2)^2$, $\psi_6(t) = u(t-2)u(t-3)^2$ e $\theta_1 = g_3(1; 0, 0)$, $\theta_2 = g_3(2; 0, 0)$, $\theta_3 = g_3(1; 0, 1)$, $\theta_4 = g_3(2; 0, 1)$, $\theta_5 = g_3(1; 1, 1)$ e $\theta_6 = g_3(2; 1, 1)$.

Supondo disponíveis amostras dos sinais de entrada e saída, a identificação consiste de resolver o sistema de equações lineares da forma

$$\mathbf{Y} = \mathbf{\Psi}\mathbf{\theta} + \mathbf{e} \quad (14)$$

onde: $\mathbf{\theta} = [\theta_1 \cdots \theta_M]^T$ e $\mathbf{\Psi}$ é a matriz de regressores. A solução clássica de mínimos quadrados dos erros, dada por: $\hat{\mathbf{\theta}} = (\mathbf{\Psi}^T \mathbf{\Psi})^{-1} \mathbf{\Psi}^T \mathbf{Y}$ é usualmente evitada, devido a natureza polinomial do modelo Volterra diagonal resultar em um número elevado de colunas na matriz de regressão, o que normalmente introduz problemas numéricos.

Uma forma de contornar este problemas é utilizando o algoritmo de Mínimos Quadrados Ortogonais (MQO) (Koremborg et al., 1988), em que o problema original (14) é convertido para uma forma ortogonalizada:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{W}\mathbf{\beta} + \mathbf{e} \quad (15)$$

onde

$$\mathbf{\Psi}\mathbf{T} = \mathbf{W} \quad (16)$$

$$\mathbf{\beta} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{\theta} \quad (17)$$

sendo $\mathbf{T}$ uma matriz de transformação invertível e $\mathbf{W}$ ortogonal. A transformação pode ser realizada utilizando-se algoritmos de fatoração matricial, e.g.: QR, SVD, etc.

O principal motivo para a transformação é que, na forma ortogonal é possível quantificar a relevância de cada regressor através da taxa de redução de erro (Error Ratio Reduction), dada por (Koremborg et al., 1988):

$$ERR_i = \frac{\beta_i^2 \mathbf{w}_i^T \mathbf{w}_i}{\mathbf{Y}^T \mathbf{Y}} \leq 1 \quad (18)$$

onde β_i o i -ésimo coeficiente do modelo ortogonalizado, $\mathbf{w}_i$ é a i -ésima coluna de $\mathbf{W}$ e ERR_i é a taxa de redução de erro associada ao i -ésimo regressor. ERR_i expressa em quanto o erro de predição será reduzido caso o regressor em questão seja incluído.

3 Resultados

A estratégia de caracterização proposta foi testada em simulação, utilizando um oscilador do tipo Duffing como sistema de estudo. O equivalente mecânico é mostrado na figura 2, e consiste de um arranjo massa-mola-amortecedor, cuja não linearidade está associada à força de restituição elástica cúbica em relação ao deslocamento da massa.

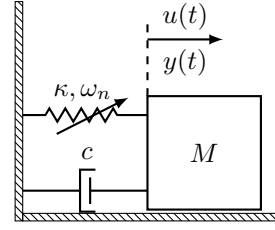


Figura 2: Oscilador mecânico do tipo Duffing.

O sistema Duffing é descrito pela equação dinâmica não linear

$$Ay(t) + \kappa\omega_n^2 y(t)^3 = \omega_n^2 u(t) \quad (19)$$

onde

$$Ay(t) = \frac{d^2}{dt^2} y(t) + 2\xi\omega_n \frac{d}{dt} y(t) + \omega_n^2 y(t) \quad (20)$$

com entrada $u(t)$ e saída $y(t)$, tendo como parâmetros o coeficiente de amortecimento ξ , a frequência natural ω_n e o coeficiente de não linearidade cúbica κ . Para o estudo proposto, a caracterização foi realizada a partir do parâmetro κ , buscando representar a influência deste sobre as propriedades do sistema. Foram estabelecidos os seguintes valores para os parâmetros: amortecimento linear $\xi = 0,5$ e frequência natural $\omega_n = 2\pi f_n$, com $f_n = 5$ Hz. O parâmetro κ foi considerado dentro da faixa $0,3 \leq \kappa \leq 2,5$.

3.1 Identificação de modelos diagonais

Para fins de identificação, foram coletadas 1000 amostras dos sinais de entrada e saída gerados na simulação de (19), com uma frequência de amostragem $F_s = 100$ Hz.

Após testar diversas configurações (variando número de diagonais e memória dos filtros), verificou-se que os melhores ajustes consistiram de três filtros diagonais de grau 3, com $n = 1$. Para fins de discussão, os filtros receberam notação conforme a Tabela 2.

Tabela 2: Diagonais identificadas

Diagonal	Filtro	Entrada
1°- Linear	$h_1(t)$	$u(t)$
2°- Cúbica 1	$g_3(t; 0, 0)$	$u(t)^3$
3°- Cúbica 2	$g_3(t; 0, 1)$	$u(t)^2 u(t-1)$

Importante ressaltar que o monômio $u(t)u(t-1)^2$ foi eliminado ao longo da identificação. Além disso, é interessante mencionar que para $n > 1$, todas as identificações produziram modelos instáveis. Não há uma razão óbvia para isso; valores elevados de n tendem a oferecer mais liberdade de ajuste, e dado que o amortecimento do sistema não é muito elevado (o que exige mais memória

do modelo para uma representação adequada do sistema), supõe-se que seria razoável a inclusão de diagonais superiores. Este é um assunto interessante, que deve ser investigado em trabalhos futuros.

3.2 Análise e Caracterização das FRFs

A magnitude da resposta em frequência de cada uma das três diagonais identificadas foram calculadas, para testar a estratégia de caracterização. Os resultados são mostrados nas figuras 3-5, em função tanto da frequência como do coeficiente cúbico do oscilador.

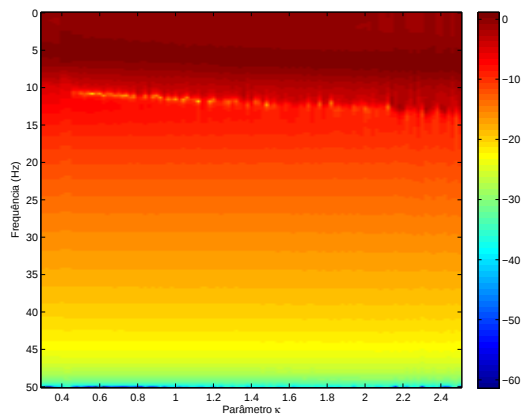


Figura 3: Magnitude da diagonal linear

A figura 3 apresenta a magnitude da primeira diagonal $H_1(e^{j\omega})$ em decibéis. Observa-se um comportamento relativamente constante ao longo da direção do parâmetro em praticamente todas as frequências, sendo isto mais evidente na faixa acima de 15 Hz. Abaixo deste valor são observadas algumas variações, que podem ser atribuídas a erros de modelagem devido seu padrão irregular. A baixa sensibilidade de primeira diagonal em relação a variação do coeficiente cúbico é justificada pela associação deste filtro à parte linear do modelo, para a qual existe a expectativa de influência apenas dos coeficientes relativos a termos lineares.

As FRFs da segunda diagonal $G_3(e^{j\omega}; 0, 0)$ estão ilustradas na figura 4, onde evidencia-se uma tendência de aumento da magnitude com o crescimento de κ . É interessante observar que em $\kappa = 1,36$ ocorre um aumento abrupto na amplitude na região de baixas frequências (menores que 10 Hz). A segunda diagonal é bastante sensível a erros de modelagem, em vista do padrão relativamente irregular da figura. Apesar disso, é possível observar um expressivo aumento da banda da diagonal a medida que κ aumenta.

As características da resposta em frequência da segunda diagonal cúbica, $G_3(e^{j\omega}; 0, 1)$, são ilustradas na figura 5. Neste caso, percebe-se um padrão bem menos ruidoso, mas explicitamente sensível ao coeficiente cúbico. Observa-

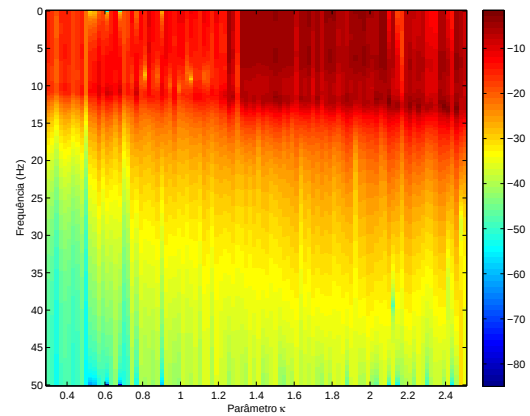


Figura 4: Resposta em frequência da 2° diagonal.

se um aumento gradativo e aproximadamente linear da banda a medida que κ aumenta. Além disso, em baixas frequências, a diagonal apresenta o mesmo aumento abrupto de amplitude próximo do valor crítico $\kappa = 1,36$. É também possível ver claramente picos de magnitude próximo a 10 Hz em praticamente para todos os valores de κ . Este também é um comportamento esperado, uma vez que, o amortecimento e frequência natural escolhidos tendem a gerar uma ressonância em aproximadamente 3,5 Hz. Contudo, por ser uma diagonal cúbica, este ponto precisa ser deslocado para uma frequência três vezes maior no filtro diagonal, de modo a produzir o referido máximo no sinal de saída em uma frequência de entrada de 3,5 Hz.

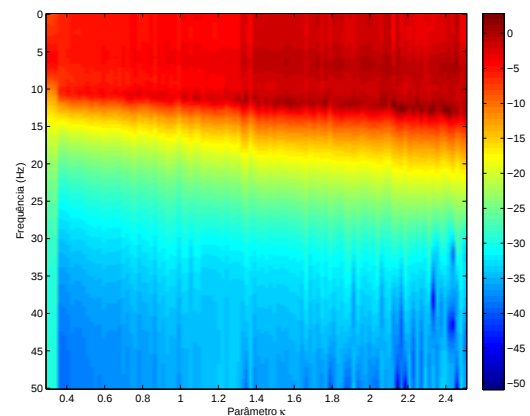


Figura 5: Resposta em frequência da 3° diagonal

Estes resultados e a forma como foram apresentados confirmam a tese de que os filtros diagonais permitem descrever o comportamento do sistema em termos de propriedades físicas bem definidas em relação ao parâmetro de interesse. Obviamente a análise tende a ficar mais complexa quando o sistema exibe um número elevado de diagonais; nestes casos, o ideal é incorporar à metodologia algoritmos de inteligência computacional (reconhecimento de padrões ou detecção de características) para tentar descrever de forma mais

automática e compacta o comportamento do sistema.

3.3 Estimação de κ

Um procedimento importante em análise de sistemas é a capacidade de associar aspectos mensuráveis do sistema a parâmetros do modelo cuja interpretação física seja clara. Em análise modal, por exemplo, pode-se associar a mudança nas frequências naturais do modelo (mensuráveis a partir dos dados) às características de rigidez da estrutura, que por sua vez está associada a sua integridade física. No caso do oscilador Duffing, torna-se interessante desenvolver uma forma de estimar o valor de κ (isto é, caracterizar a não linearidade da mola do oscilador) a partir de aspectos mensuráveis, como os filtros diagonais. Notar que uma tentativa também poderia ser feita usando regressão da equação do modelo físico, desde que algum tipo de filtragem adicional fosse utilizada para tornar viável a utilização de derivadas numéricas de ordem um e dois. Nestas condições, a abordagem baseada nos filtros diagonais torna-se uma alternativa totalmente baseada em tempo discreto.

Para verificar a viabilidade desta hipótese, a variância de cada diagonal foi calculada em relação a variação de κ para cada frequência. Para reduzir o volume de informação, calculou-se então a variância média ao longo de todas as frequências de trabalho. A tabela 3 resume os resultados para cada diagonal. Conforme esperado, a segunda diagonal cúbica, $G_3(e^{j\omega}; 0, 1)$ apresenta a maior variância (calculada a partir dos resultados em dB), sugerindo que seja o melhor conjunto de informações para recuperar o valor do parâmetro físico. Notar que, apesar do padrão mais irregular, a primeira diagonal cúbica apresenta variância menor, mas ainda é mais adequada que a diagonal linear, que, conforme esperado, apresenta pouca sensibilidade à variação de κ .

Tabela 3: Variância média dos filtros diagonais

Diagonal	Variância média
1°- Linear	73, 92
2°- Cúbica 1	129, 20
3°- Cúbica 2	174, 15

Baseado nessa análise preliminar propõe-se um procedimento de estimação de κ utilizando a potência média das diagonais (i.e. energia entre as frequências 0 e 50 Hz). A escolha da energia total no intervalo foi feita por questões de simplicidade, sendo possível utilizar uma (ou múltiplas) faixa(s) de menor largura. A figura 6 ilustra a potência dos filtros diagonais em função de κ . Notar que o domínio foi dividido em dois intervalos, $0,3 \leq \kappa \leq 1,36$ e $1,36 < \kappa \leq 2,5$, devido à mudança abrupta do ponto crítico $\kappa = 1,36$,

que causa problemas de escala nos gráficos. Notar que as diagonais cúbicas não possuem algumas informações registradas para $\kappa < 0,4$ pois nesse intervalo o sistema se comporta de maneira relativamente linear, de modo que o algoritmo de identificação eliminou estas diagonais nessas circunstâncias.

A figura 6 reforça a maior parte do que já foi dito sobre as diagonais: a FRF linear exibe baixa sensibilidade a κ , inclusive ao cruzar o ponto crítico; a primeira diagonal cúbica exibe um padrão bastante irregular, apesar de apresentar tendência de crescimento; já a segunda diagonal cúbica apresenta comportamento relativamente linear, sendo ele mais regular no primeiro intervalo de κ do que no segundo. Isso é relativamente sensato uma vez que valores elevados de κ tornem o sistema mais complexo, dificultando a representação por um modelo Volterra. Importante notar que a escala dos gráficos das diagonais cúbicas relativos ao segundo intervalo é relativamente maior que a do primeiro, evidenciando o salto de potência que ocorre em $\kappa = 1,36$.

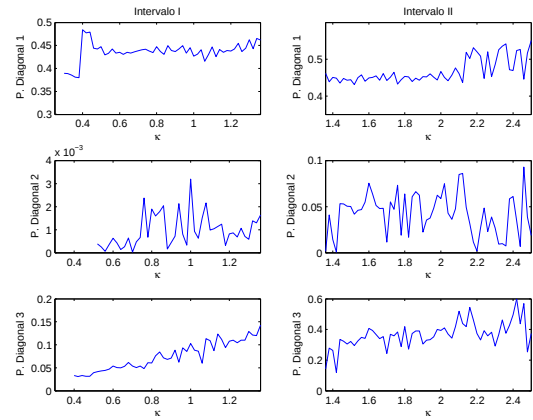


Figura 6: Potências da 1°, 2° e 3° diagonal.

A estimação do parâmetro físico κ em função das potências das diagonais foi testada utilizando-se interpolação polinomial simples. Para isso, considerou-se três possíveis situações: (I) estimação apenas no intervalo $0,3 \leq \kappa \leq 1,36$, (II) estimação apenas no intervalo $1,36 < \kappa \leq 2,5$ e (III) estimação no intervalo completo, $0,3 < \kappa \leq 2,5$. Em cada intervalo, considerou-se ainda três possibilidades de estimação: usando apenas a potência da diagonal linear (PD1), usando apenas a potência da segunda diagonal cúbica (PD3) e usando a potência de ambas (PD1 e PD3). Observar que optou-se por não usar a primeira diagonal cúbica em função da irregularidade percebida na figura 6. A tabela 4 apresenta o índice R^2 da regressão polinomial para estimação do parâmetro κ .

Observa-se pelo resultado que, apesar da diagonal linear apresentar baixa sensibilidade ao parâmetro κ , é possível fazer estimativas razoáveis utilizando-se apenas a informação proveniente

Tabela 4: Índices R^2 para estimação de κ .

Variáveis	Intervalos		
	<i>I</i>	<i>II</i>	<i>III</i>
PD1	0,86	0,81	0,93
PD3	0,93	0,64	0,93
PD1 e PD3	0,97	0,85	0,95

dela. Isto é sensato quando se considera que muitos métodos de monitoramento e análise modal baseados em modelagem linear, mesmo quando a estrutura não é linear, são relativamente bem sucedidos quando se sustentam na hipótese de que a não linearidade produz mudanças nas frequências naturais (embora isso seja essencialmente reflexo do algoritmo de identificação tentar acomodar o erro de modelagem).

Contudo, observa-se que o uso da informação proveniente da diagonal cúbica produz mudanças na estimativa de κ . Para o intervalo I, o modelo PD3 produz significativo ganho em relação a PD1. No intervalo II há uma piora, enquanto que para a situação III, não há diferença. Isto é razoável, considerando a regularidade e incertezas da segunda diagonal cúbica nos respectivos intervalos. Todavia, o uso simultâneo da informação linear e não linear produz melhores índices de estimação em qualquer situação, mostrando que a abordagem proposta atua em caráter complementar, melhorando a precisão das estimativas.

4 Conclusões

Os resultados expostos na seção anterior sugerem que a metodologia proposta é viável para problemas de caracterização de sistemas não lineares. A principal contribuição do trabalho é a síntese de um procedimento que permite não apenas caracterizar o comportamento do sistema em termos de suas propriedades invariantes, mas também de recuperar um parâmetro com claro significado físico a partir dessas informações em um contexto de modelagem não linear.

A metodologia consiste de identificar um modelo Volterra diagonal a partir de dados entrada e saída e utilizar os filtros estimados como informação básica para descrever o comportamento do sistema. A proposta foi testada com sucesso em um oscilador Duffing, onde o parâmetro de interesse é o coeficiente associado à mola não linear do equivalente mecânico.

Mostrou-se que as diagonais são um meio eficaz de descrever o comportamento do sistema, uma vez adequadamente identificadas. Observou-se que a variação do coeficiente cúbico do modelo produz alterações pequenas na resposta em frequência da diagonal linear, o que é sensato do ponto de vista físico, mas produz grandes varia-

ções de amplitude e largura de banda nas diagonais superiores, associadas a não linearidade cúbica do sistema. Em particular, para o sistema Duffing específico deste estudo, destaca-se ainda o aumento abrupto de energia em baixas frequências que ocorre em $\kappa = 1,36$, que, apesar de reconhecido, ainda merece investigação mais profunda.

Foi demonstrado ainda que as potências dos filtros diagonais em um intervalo sensato de frequências podem ser utilizadas como informação básica para um modelo de regressão polinomial montado com o objetivo de estimar o valor do coeficiente cúbico. A principal conclusão é de que a informação proveniente do modelo Volterra pode, de fato, ser utilizada, juntamente com a FRF linear convencional, para produzir estimativas mais precisas do parâmetro cúbico. Isto é importante uma vez que o coeficiente estimado possui interpretação física direta, o que pode ser relevante para problemas de caracterização aplicados (monitoramento ou diagnóstico de faltas, por exemplo).

Este trabalho sugere que a metodologia é viável, mas precisa ser aprofundada. Em especial, é interessante expandir o método para descrições analíticas e correlação de parâmetros com outros tipos de modelos não lineares, o que será investigado em publicações futuras.

Referências

- Boyd, S. and Chua, L. (1985). Fading memory and the problem of approximating nonlinear operators with volterra series, *IEEE Transactions on Circuits and Systems* **32**(11): 1150–1161.
- Jing, X. J., Lang, Z. Q. and Billings, S. A. (2008). Mapping from parametric characteristics to generalized frequency response functions of non-linear systems, *International Journal of Control* **81**(7): 1071–1088.
- Jing, X. J., Lang, Z. Q., Billings, S. A. and Tomlinson, G. R. (2006). The parametric characteristic of frequency response functions for nonlinear systems, *International Journal of Control* **79**(12): 1552–1564.
- Koremborg, M., Billings, S., Liu, Y. and McIlroy, P. (1988). Orthogonal parameter estimation algorithm for non-linear stochastic systems, *International Journal of Control* **48**(1): 193–210.
- Kovacic, I. and Brennan, M. J. (2011). *The Duffing equation: nonlinear oscillators and their behaviour*, John Wiley & Sons.
- Laalej, H. and Lang, Z. (2010). Numerical investigation of the effects of mr damper characteristic parameters on vibration isolation of sdof systems under harmonic excitations,

- Mathews, V. J. and Sicuranza, G. (2000a). *Polynomial signal processing*, John Wiley & Sons, Inc.
- Mathews, V. J. and Sicuranza, G. L. (2000b). *Polynomial signal processing*, Wiley series in telecommunications and signal processing, Wiley.
- Pearson, R. K. (1999). *Discrete-time dynamic models*, Oxford University Press on Demand.
- Raz, G. M. and Van Veen, B. D. (1998). Baseband volterra filters for implementing carrier based nonlinearities, *IEEE Transactions on Signal Processing* **46**(1): 103–114.
- Rijlaarsdam, D., Nuij, P., Schoukens, J. and Steinbuch, M. (2017). A comparative overview of frequency domain methods for nonlinear systems, *Mechatronics* **42**: 11–24.
- Rugh, W. J. (1981). *Nonlinear system theory: the Volterra/Wiener approach*, Johns Hopkins University Press.
- Volterra, V. (1959). *Theory of functionals and of integral and integro-differential equations*, Dover.
- Xiao, Z. and Jing, X. (2015). Frequency-domain analysis and design of linear feedback of nonlinear systems and applications in vehicle suspensions, *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics* **PP**(99): 1–1.
- Zeller, M. and Kellermann, W. (2010). Fast and robust adaptation of dft-domain volterra filters in diagonal coordinates using iterated coefficient updates, *IEEE Transactions on Signal Processing* **58**(3): 1589–1604.
- Z.Q. Lang S.A. Billings, R. Y. and Li, J. (2007). Output frequency response function of nonlinear volterra systems, *Elsevier*.