

# ABORDAGEM PARA IDENTIFICAÇÃO RECURSIVA DE SISTEMAS DINÂMICOS MULTIVARIÁVEIS NÃO LINEARES BASEADA EM MODELOS DE HAMMERSTEIN FUZZY EVOLUTIVOS

Email:

**Abstract**— In this paper a novel approach for evolving fuzzy identification of nonlinear multivariable dynamic systems, is proposed. The adopted methodology is based on state space multivariable Hammerstein models, in which, the static nonlinearity block is approximated by an evolving Takagi-Sugeno fuzzy inference system and the linear dynamic block is represented by a state space linear model obtained through a recursive eigensystem realization algorithm. Computational results from the online identification of a multivariable dynamic system with a complex combined nonlinearity, which is benchmark widely cited in the literature, illustrate the efficiency and applicability of the proposed approach.

**Keywords**— Evolving fuzzy systems, Takagi-Sugeno fuzzy inference system, Hammerstein model, Systems identification, Eigensystem realization algorithm.

**Resumo**— Neste artigo, uma nova abordagem para identificação *fuzzy* evolutiva de sistemas dinâmicos multivariáveis não lineares, é proposta. A metodologia adotada é baseada no modelo de Hammerstein multivariável no espaço de estados, no qual, o bloco estático não linear é aproximado por um sistema de inferência *fuzzy* Takagi-Sugeno e o bloco dinâmico linear é representado por um modelo linear no espaço de estados obtido através de um algoritmo recursivo de realização mínima de auto-sistema. Resultados computacionais da identificação online de um sistema dinâmico multivariável com não linearidades combinadas complexas, que é um *benchmark* frequentemente citado na literatura, ilustram a eficiência e aplicabilidade da abordagem proposta.

**Palavras-chave**— Sistemas *fuzzy* evolutivos, Sistemas de inferência *fuzzy* Takagi-Sugeno, Modelo de Hammerstein, Identificação de Sistemas, Algoritmo de realização de auto-sistema.

## 1 Introdução

Diversos métodos de identificação de sistemas dinâmicos multivariáveis e suas não linearidades são estudados atualmente (Jafari et al., 2014; Ljung, 1998; Jin et al., 2017; Shang et al., 2016; Wibowo and Saad, 2010; Gomez and Baeyens, 2004). O modelo de Hammerstein, um típico modelo de bloco orientado, consiste em um bloco estático não linear em cascata com um bloco dinâmico linear (Jia et al., 2016; Jafari et al., 2014). Este tipo de modelo tem sido comprovadamente uma ferramenta eficiente na modelagem de sistemas dinâmicos não lineares biológicos, químicos, térmicos e elétricos (Jalaleddini and Kearney, 2013; Hammar et al., 2015).

Sistemas de inferência *fuzzy* Takagi-Sugeno (TS) tem sido largamente aplicados na modelagem de muitos sistemas complexos. Em (Júnior and de Oliveira Serra, 2017), uma nova metodologia de modelagem baseada na evolução de uma rede neuro-*fuzzy* Takagi-Sugeno, usada para prever séries temporais sazonais, é proposta. Em (Rocha Filho and de Oliveira Serra, 2017) é proposto um algoritmo de identificação online para modelagem neuro-*fuzzy* evolutiva baseada em variáveis instrumentais aplicado a sistemas dinâmicos em ambiente ruidoso.

Este artigo apresenta uma nova metodologia para identificação evolutiva de sistemas dinâmicos não lineares multivariáveis baseado em modelo de Hammerstein no espaço de estados. As principais contribuições da metodologia proposta apresentam os seguintes aspectos de interesse:

- Não depende da aplicação de sinais distintos para estimação da não linearidade estática e dinâmica linear como em algumas abordagens da literatura (Jia et al., 2016; Hammar et al., 2015);
- Um sistema de inferência *fuzzy* TS evolutivo para estimação online de não linearidades multivariáveis complexas.
- Identificação recursiva da dinâmica linear a partir de modelos no espaço de estados de ordem mínima.

## 2 Formulação: Modelo de Hammerstein Fuzzy Multivariável no Espaço de Estados

Nesta Seção, é formulada uma abordagem para parametrização online do modelo de Hammerstein *fuzzy* multivariável no espaço de estados. O modelo de Hammerstein multivariável no espaço de estados com não linearidades combinadas, ilustrado na Fig. 1, consiste na conexão em cascata de dois blocos: o primeiro descreve a característica estática não linear e o segundo descreve a dinâmica linear no espaço de estados (Ljung, 1998).

Este tipo de modelo de bloco orientado é formulado como segue:

$$\mathbf{w}_k = f(\mathbf{u}_k) \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= A\mathbf{x}_k + B\mathbf{w}_k \\ \mathbf{y}_k &= C\mathbf{x}_k + D\mathbf{w}_k \end{aligned} \quad (2)$$

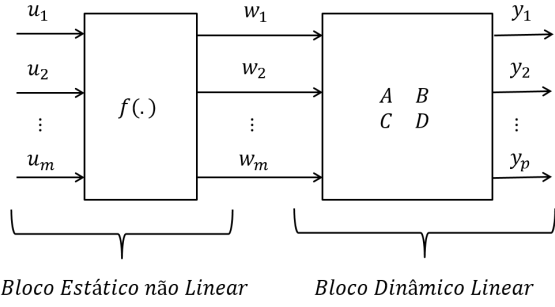


Figura 1: Modelo de Hammerstein multivariável no espaço de estados.

onde  $\mathbf{u}_k \in \mathbb{R}^m$  é o vetor de entrada,  $\mathbf{y}_k \in \mathbb{R}^p$  é o vetor de saída e  $f(\mathbf{u}_k)$  é a função estática não linear relacionada à entrada do modelo de Hammerstein. O vetor  $\mathbf{w}_k \in \mathbb{R}^p$  representa o sinal intermediário desconhecido. Os parâmetros do bloco dinâmico linear no espaço de estados são descritos pelas matrizes  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$  e  $D \in \mathbb{R}^{p \times m}$  e pelo vetor de estados  $\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$ .

### 2.1 Parametrização da não Linearidade Estática

Nesta Seção, o sistema de inferência *fuzzy* Takagi-Sugeno evolutivo para parametrização online do bloco estático não linear do modelo de Hammersstein no espaço de estados, a partir de dados experimentais, é formulado. A função estática não linear  $f(\mathbf{u}_k)$  é aproximada por um sistema de inferência *fuzzy* TS, onde sua estrutura é dada por:

$$\begin{aligned} R^i : \text{SE } \tilde{x}_{1,k} \text{ É } Q_{j|\tilde{x}_{1,k}}^i \text{ E...} \\ \dots \text{ E } \tilde{x}_{l,k} \text{ É } Q_{j|\tilde{x}_{l,k}}^i \\ \text{ENTÃO } \tilde{\mathbf{w}}_k^i = (E^i(I - G^i)^{-1}H^i + F^i)\mathbf{u}_k \end{aligned} \quad (3)$$

com  $i = [1, L]$ , onde  $L$  é o número de regras,  $\tilde{\mathbf{x}}_k = [\tilde{x}_{1,k} \ \tilde{x}_{2,k} \ \dots \ \tilde{x}_{l,k}] \in \mathbb{R}^l$  é o vetor que contém as variáveis linguísticas do antecedente para a  $k$ -ésima amostra. As matrizes  $G^i \in \mathbb{R}^{s \times s}$ ,  $H^i \in \mathbb{R}^{s \times m}$ ,  $E^i \in \mathbb{R}^{q \times s}$  e  $F^i \in \mathbb{R}^{p \times m}$  são os parâmetros do  $i$ -ésimo modelo linear local do consequente,  $\mathbf{u}_k \in \mathbb{R}^m$  é o vetor de entrada e  $\tilde{\mathbf{w}}_k^i \in \mathbb{R}^p$  é o vetor de saída do  $i$ -ésimo modelo linear local.

A resposta do modelo *fuzzy* TS consiste em uma soma ponderada das funções do consequente, como segue:

$$\mathbf{w}_k = \sum_{i=1}^L \gamma^i(\tilde{\mathbf{x}}_k) \tilde{\mathbf{w}}_k^i \quad (4)$$

com

$$\sum_{i=1}^L \gamma^i(\tilde{\mathbf{x}}_k) = 1 \quad (5)$$

onde  $\gamma^i(\cdot)$  é o grau de ativação normalizado para a  $i$ -ésima regra.

### 2.1.1 Abordagem Evolutiva para Estimacão do Antecedente

O algoritmo evolutivo aplicado na estimação das regras *fuzzy* é baseado no algoritmo evolutivo FLEXFIS (Lughofer, 2008). A atualização recursiva dos centros dos *clusters*, para melhor adaptação das características desses *clusters* aos dados experimentais, é definida por:

$$\tilde{\mathbf{x}}_{k, \text{ novo}}^{v*} = \tilde{\mathbf{x}}_{k, \text{ anterior}}^{v*} + \eta_k^v \left( \tilde{\mathbf{x}}_k - \tilde{\mathbf{x}}_{k, \text{ anterior}}^{v*} \right) \quad (6)$$

onde  $\tilde{\mathbf{x}}_{k, \text{ novo}}^{v*}$ , é a posição do *cluster* vencedor  $\tilde{\mathbf{x}}_k^{v*}$  (*cluster* com centro mais próximo da amostra  $\tilde{\mathbf{x}}_k$  no instante  $k$ , de acordo com norma Euclidiana) após a atualização e  $\tilde{\mathbf{x}}_{k, \text{ anterior}}^{v*}$  é a posição anterior. O termo  $\eta_k^v$  corresponde a um ganho de aprendizagem do *cluster* vencedor no instante  $k$ . O cálculo recursivo de  $\eta_k^v$  é dado por:

$$\eta_k^v = \frac{g_{\text{inicial}}}{S_k^v} \quad (7)$$

onde  $S_k^v$  é o suporte (número amostras pertencentes ao *cluster* vencedor  $\tilde{\mathbf{x}}_k^{v*}$  no instante  $k$ ) e  $g_{\text{inicial}}$  é um parâmetro constante equivalente a um ganho de aprendizagem inicial que depende da característica dos dados. Uma nova regra é criada conforme a seguinte condição:

$$\|\tilde{\mathbf{x}}_k - \tilde{\mathbf{x}}_k^{v*}\|_A \geq \rho \quad (8)$$

onde  $A$  indica norma Euclidiana e  $\rho$  é um parâmetro de vigilância que gerencia a evolução de novos *clusters*. O parâmetro  $\rho$  é calculado por:

$$\rho = fac \frac{\sqrt{l}}{2} \quad (9)$$

onde  $fac$  é uma constante que geralmente assume os valores:  $fac \in [0, 1]$ , dependendo das características dos dados, e  $l$  é a dimensão do vetor  $\tilde{\mathbf{x}}_k$ . A zona de influência de cada *cluster* é definida baseada em uma medida de variância dos dados de cada *cluster*. A atualização recursiva da variância é dada por:

$$\sigma_{k,j}^{v, \text{ novo}} = \sqrt{\frac{(S_k^v - 1)(\sigma_{k,j}^v)^2 + S_k^v(\Delta \tilde{x}_{k,j}^{v*})^2 + (\tilde{x}_{k,j}^{v*} - \tilde{x}_j)^2}{S_k^v}} \quad (10)$$

onde  $j = [1, l]$ , sendo  $l$  a dimensão do vetor  $\tilde{\mathbf{x}}_k$ ,  $S_k^v$  é o suporte do *cluster* vencedor no instante  $k$ ,  $\Delta \tilde{x}_{k,j}^{v*}$  é a distância entre a posição anterior do *cluster* vencedor e a nova posição, na  $j$ -ésima dimensão.

### 2.1.2 Abordagem Recursiva para Estimacão do Consequente

A estimação do antecedente baseada em uma abordagem evolutiva leva a mudanças contínuas

na estrutura do modelo de acordo com a característica dos dados disponibilizados a cada instante. Assim, uma estratégia recursiva de estimação dos parâmetros do consequente, é implementada. Considerando-se o seguinte sistema nebuloso TS no espaço de estados:

$$\begin{aligned} R^i : \mathbf{SE} \quad \tilde{x}_{k,1} \quad \mathbf{\hat{E}} \quad Q_{j|\tilde{x}_{k,1}}^i \quad \mathbf{E} \dots \\ \dots \quad \mathbf{E} \quad \tilde{x}_{k,l} \quad \mathbf{\hat{E}} \quad Q_{j|\tilde{x}_{k,l}}^i \\ \mathbf{ENT\tilde{A}O} \quad \tilde{y}_k^i = \begin{cases} \mathbf{z}_{k+1}^i = G^i \mathbf{z}_k^i + H^i \mathbf{u}_k \\ \tilde{\mathbf{y}}_k^i = E^i \mathbf{z}_k^i + F^i \mathbf{u}_k \end{cases} \end{aligned} \quad (11)$$

onde as matrizes  $G^i \in \mathbb{R}^{s \times s}$ ,  $H^i \in \mathbb{R}^{s \times m}$ ,  $E^i \in \mathbb{R}^{p \times s}$  e  $F^i \in \mathbb{R}^{p \times m}$  são as matrizes do consequente do sistema nebuloso dado em (3) e  $\mathbf{z}_k^i \in \mathbb{R}^s$  é o vetor de estados de cada submodelo local. A estimação recursiva de  $G^i$ ,  $H^i$ ,  $E^i$  e  $F^i$  é realizada por um algoritmo de realização mínima no contexto *fuzzy*, que tem como base os parâmetros de Markov de cada submodelo local. Inserindo-se um observador de estados no consequente da  $i$ -ésima regra *fuzzy*, dada em (11) (Juang et al., 1993; Wu et al., 2015), o submodelo local pode ser reescrito como:

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_{k+1}^i &= \bar{G}^i \mathbf{z}_k^i + \bar{H}^i \mathbf{v}_k \\ \tilde{\mathbf{y}}_k^i &= E^i \mathbf{z}_k^i + F^i \mathbf{v}_k \end{aligned} \quad (12)$$

onde  $\bar{G}^i = G^i + \Omega^i E^i$ ,  $\bar{H}^i = [H^i + \Omega^i F^i, -\Omega^i]$  e  $\mathbf{v}_k^i = [\mathbf{u}_k \quad \tilde{\mathbf{y}}_k^i]^T$  e  $\Omega^i \in \mathbb{R}^{p \times m}$  é o ganho do observador do  $i$ -ésimo submodelo linear local. Resolvendo-se (12) em função das matrizes  $\bar{G}^i$ ,  $\bar{H}^i$ ,  $E^i$  e  $F^i$  e dos vetores  $\mathbf{u}_k$  e  $\mathbf{y}_k$ , onde  $k$  indica que são usadas amostras do instante inicial 0 até o instante  $k$ , e  $\mathbf{z}_0^i = 0$ , obtém-se a seguinte relação:

$$\tilde{\mathbf{y}}_k^i = \sum_{j=1}^k E^i (\bar{G}^i)^{j-1} \bar{H}^i \mathbf{v}_{k-j}^i + F^i \mathbf{u}_k \quad (13)$$

Devido à presença do observador de estados, pode-se obter  $(\bar{G}^i)^{q_f} \approx 0$ , com  $q_f$  grande suficiente. Assim, (13) pode ser reescrita como:

$$\tilde{\mathbf{y}}_k^i = \sum_{j=1}^{q_f} \bar{Y}_{k,j}^i \mathbf{v}_{k-j}^i + F^i \mathbf{u}_k \quad (14)$$

onde  $\bar{Y}_{k,j}^i = E^i (\bar{G}^i)^{j-1} \bar{H}^i$  é o  $j$ -ésimo parâmetro de Markov do observador *fuzzy* e  $\bar{Y}_{k,0}^i = F^i$ . Reescrevendo-se (14) como uma operação matricial, resulta:

$$\tilde{\mathbf{Y}}_k^i = \Theta_k^i \Phi_k^i \quad (15)$$

onde  $\Theta_k^i = [F_k^i \quad \bar{Y}_{k,1}^i \quad \dots \quad \bar{Y}_{k,q_f}^i]$  é o vetor de parâmetros de Markov do observador *fuzzy* da  $i$ -ésima regra. A matriz de regressores *fuzzy* é dada por:

$$\Phi_k^i = \begin{pmatrix} (\phi_{q_f+1}^i)^T \sqrt{\gamma^i(\tilde{\mathbf{x}}_{q_f+1})} \\ \vdots \\ (\phi_N^i)^T \sqrt{\gamma^i(\tilde{\mathbf{x}}_N)} \end{pmatrix} \quad (16)$$

com  $\phi_k^i = [\mathbf{u}_k^T \quad \mathbf{v}_{k-1}^T \quad \dots \quad \mathbf{v}_{k-q_f}^T]^T$ , e o vetor de saídas *fuzzy* é dado por:

$$\tilde{\mathbf{Y}}_k^i = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{y}}_{q_f+1}^i \sqrt{\gamma^i(\tilde{\mathbf{x}}_{q_f+1})} \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{y}}_N^i \sqrt{\gamma^i(\tilde{\mathbf{x}}_N)} \end{pmatrix} \quad (17)$$

onde  $N$  é o número de amostras até o instante  $k$ . Aplicando-se uma abordagem de aprendizagem local (Lughofer, 2011) e resolvendo-se (15) por meio do algoritmo de mínimos quadrados ponderado batelada, para se gerar a inicialização da abordagem recursiva, obtém-se:

$$(\Theta_k^i)^T = (\Phi^i (\Phi^i)^T)^{-1} (\Phi^i) (\tilde{\mathbf{Y}}_k^i)^T \quad (18)$$

A estimação recursiva dos parâmetros de Markov *fuzzy*, baseada em dados experimentais de entrada e saída, é realizada pela abordagem de aprendizagem local dos mínimos quadrados ponderados *fuzzy* recursivo (Lughofer, 2011), denotado por:

$$(\Theta_{k+1}^i)^T = (\Theta_k^i)^T + (\Gamma_{k+1})^T ((\mathbf{y}_{k+1})^T - (\phi_{k+1}^i) (\Theta_k^i)^T) \quad (19)$$

$$(\Gamma_{k+1})^T = \frac{(P_k^i)^T (\phi_{k+1}^i)^T}{\frac{1}{\gamma^i(\tilde{\mathbf{x}}_{k+1})} + (\phi_{k+1}^i) (P_k^i)^T (\phi_{k+1}^i)^T} \quad (20)$$

$$(P_{k+1}^i)^T = (I - (\Gamma_{k+1})^T (\phi_{k+1}^i)) (P_k^i)^T \quad (21)$$

onde  $P_k^i$  é a matriz de covariância. Rearranjando-se o  $r$ -ésimo parâmetro de Markov do observador da  $i$ -ésima regra *fuzzy* no instante  $k$  (Juang et al., 1993), obtém-se:

$$\bar{Y}_{k,r}^i = [\bar{Y}_{k,r}^{i,1}, -\bar{Y}_{k,r}^{i,2}] \quad (22)$$

Os parâmetros de Markov *fuzzy* são extrídos recursivamente usando as seguintes equações (Wu et al., 2015):

$$Y_{k,0}^i = \bar{Y}_{k,0}^i \quad (23)$$

$$Y_{k,r}^i = \bar{Y}_{k,r}^{i,1} - \sum_{j=1}^r \bar{Y}_{k,j}^{i,2} Y_{k,r-1}^i, \quad r = [1, q_f] \quad (24)$$

$$Y_{k,r}^i = - \sum_{j=1}^{q_f} \bar{Y}_{k,j}^{i,2} Y_{k-j}^i, \quad r > q_f \quad (25)$$

onde  $Y_{k,r}^i$  é o  $r$ -ésimo parâmetro de Markov *fuzzy* da  $i$ -ésima regra no instante  $k$ . Uma vez que os parâmetros de Markov do observador de cada submodelo local são recursivamente estimados, os parâmetros de Markov *fuzzy* também são computados nas Eqs. 23,24 e 25. O algoritmo para encontrar as matrizes  $G^i$ ,  $H^i$ ,  $E^i$  e  $F^i$  de ordem mínima se inicia com a construção da matriz de Hankel *fuzzy* para cada submodelo local (Juang and Phan, 2001), denotadas por:

$$H_0^i = \begin{bmatrix} Y_1^i & Y_2^i & \dots & Y_{\beta_f}^i \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_{\alpha_f}^i & Y_{\alpha_f+1}^i & \dots & Y_{\alpha_f+\beta_f-1}^i \end{bmatrix} \quad (26)$$

e

$$H_1^i = \begin{bmatrix} Y_2^i & Y_3^i & \dots & Y_{\beta_f+1}^i \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_{\alpha_f+1}^i & Y_{\alpha_f+2}^i & \dots & Y_{\alpha_f+\beta_f}^i \end{bmatrix} \quad (27)$$

onde  $\alpha_f$  e  $\beta_f$  são inteiros restringidos pela condição  $\alpha_f m \leq \beta_f p$ ,  $m$  e  $p$  é o número de entradas e saídas, respectivamente. A ordem mínima dos submodelos é definida pelo posto da sua respectiva matriz de Hankel, ou seja, o número de valores singulares de  $H_0^i$ . O próximo passo para obtenção desses parâmetros é aplicar decomposição em valor singular (SVD) em (26), como segue:

$$H_0^i = R^i \Sigma^i (S^i)^T \quad (28)$$

onde  $\Sigma^i = \begin{bmatrix} \Sigma_s^i & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$  é uma matriz retangular e  $\Sigma_s^i = \text{diag} [\delta_1^i, \delta_2^i, \dots, \delta_s^i]$  é uma matriz diagonal composta pelos valores singulares mais significativos do  $i$ -ésimo submodelo local. As matrizes  $R_s^i$  e  $S_s^i$  são formadas pelas primeiras  $s$  colunas das matrizes  $R$  e  $S$ , respectivamente. Assim, a matriz de Hankel  $H_0^i$  pode ser reescrita como:

$$H_0^i = R_s^i \Sigma_s^i (S_s^i)^T \quad (29)$$

Os parâmetros dos submodelos locais são obtidos como segue:

$$G^i = (\Sigma_s^i)^{-1/2} (R_s^i)^T (H_1^i) (S_s^i) (\Sigma_s^i)^{-1/2} \quad (30)$$

$$H^i = \text{primeiras } s \text{ colunas de } (\Sigma_s^i)^{1/2} (S_s^i)^T \quad (31)$$

$$E^i = \text{primeiras } s \text{ linhas de } (R_s^i) (\Sigma_s^i)^{1/2} \quad (32)$$

$$F^i = Y_0^i \quad (33)$$

Finalmente, a aproximação da não linearidade estática é dada pelo seguinte modelo *fuzzy*:

$$\mathbf{w}_k = \sum_{i=1}^L \gamma^i(\tilde{\mathbf{x}}_k) (E^i (I - G^i) H^i + F^i) \mathbf{u}_k \quad (34)$$

## 2.2 Parametrização da Dinâmica Linear

Nesta Seção, o algoritmo de realização mínima de auto-sistema para parametrização online do bloco dinâmico linear do modelo de Hammerstein, a partir de dados experimentais, é formulado. Uma vez que a amostra  $\mathbf{w}_k$  do sinal intermediário  $\mathbf{w}$  é recursivamente obtida, os parâmetros do modelo dinâmico linear podem ser estimados recursivamente. Considerando-se o modelo apresentado em (2) e adicionando-se um observador de estados, resulta em:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= \bar{A} \mathbf{x}_k + \bar{B}^i \mathbf{w}_k \\ \mathbf{y}_k &= C \mathbf{x}_k + D \mathbf{w}_k \end{aligned} \quad (35)$$

onde  $\bar{A} = A + MC$ ,  $\bar{B} = [B + MD, -M]$ ,  $\tau_k = [\mathbf{w}_k \ \mathbf{y}_k]^T$  e  $M \in \mathbb{R}^{p \times m}$  a matriz de ganho do observador. A resolução de (35) em termos das matrizes  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$ , e dos vetores  $\mathbf{w}_k$  e  $\mathbf{y}_k$ , onde  $k$  indica que foram usadas amostras de um instante inicial 0 até o instante  $k$ , e  $\mathbf{x}_0 = 0$ , resultando em:

$$\mathbf{y}_k = \sum_{j=1}^k C(\bar{A})^{j-1} \bar{B} \tau_{k-j} + D \mathbf{w}_k \quad (36)$$

A presença do observador de estados leva  $(\bar{A})^{q_l} \approx 0$ , onde  $q_l$  é uma constante inteira grande suficiente. Assim, (36) pode ser reescrita como:

$$\mathbf{y}_k = \sum_{j=1}^{q_l} \bar{\psi}_{k,j} \tau_{k-j} + D \mathbf{w}_k \quad (37)$$

onde  $\bar{\psi}_{k,j} = C(\bar{A})^{j-1} \bar{B}$  é o  $j$ -ésimo parâmetro de Markov do observador e  $\bar{\psi}_{k,0} = D_k$ . Escrevendo-se (14) na forma matricial, obtém-se:

$$\Upsilon_k = \bar{\Psi}_k W_k \quad (38)$$

onde  $\Upsilon_k = [\mathbf{y}_{q_l+1} \ \dots \ \mathbf{y}_k]$ ,  $\bar{\Psi}_k = [D_k \ \bar{\psi}_{k,1} \ \dots \ \bar{\psi}_{k,q_l}]$  é o vetor de parâmetros de Markov do observador e  $W_k$  é a matriz de regressores, denotada por:

$$W_k = \begin{bmatrix} \mathbf{w}_{q_l+1} & \mathbf{w}_{q_l+2} & \dots & \mathbf{w}_{k-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tau_1 & \tau_2 & \dots & \tau_{k-q_l-1} \end{bmatrix} \quad (39)$$

A inicialização da abordagem recursiva é feita aplicando-se o algoritmo de mínimos quadrados, como segue (Juang et al., 1993):

$$\bar{\Psi}_k = \Upsilon_k W_k^T [W_k W_k^T]^{-1} \quad (40)$$

A estimação recursiva dos parâmetros de Markov do observador, por sua vez, é realizada pelos mínimos quadrados recursivos (Wu et al., 2015), como na sequência:

$$\tilde{Z} = \frac{\pi_{k+1}^T \tilde{P}_k}{\lambda_l + \pi_{k-1}^T \tilde{P}_k \pi_{k+1}} \quad (41)$$

$$\bar{\Psi}_{k+1} = \bar{\Psi}_k + [\mathbf{y}_{k+1} - \bar{\Psi}_k \pi_{k+1}] \tilde{Z} \quad (42)$$

$$\tilde{P}_{k+1} = \lambda_l^{-1} \tilde{P}_k [I - \pi_{k+1} \tilde{Z}] \quad (43)$$

onde  $\tilde{Z}$  é um vetor de ganhos,  $\tilde{P}_k$  é a matriz de covariância e  $\pi_k = [\mathbf{w}_k^T \ \tau_{k-1}^T \ \dots \ \tau_{k-q_l}^T]^T$  é o vetor de regressores. Assim, a partir dos parâmetros de Markov do observador, os parâmetros de Markov são extraídos como segue:

$$\psi_{k,0} = \bar{\psi}_{k,0} \quad (44)$$

$$\psi_{k,r} = \bar{\psi}_{k,r}^{(1)} - \sum_{j=1}^r \bar{\psi}_{k,j}^{(2)} \psi_{k,r-1}, \quad r = [1, q_l] \quad (45)$$

$$\psi_{k,r} = - \sum_{j=1}^{q_l} \bar{\psi}_{k,j}^{(2)} \psi_{k-j}, \quad r > q_l \quad (46)$$

onde  $\bar{\psi}_{k,j} = [\bar{\psi}_{k,j}^{(1)}, \bar{\psi}_{k,j}^{(2)}]$  e  $\psi_{k,r}$  é o  $r$ -ésimo parâmetro de Markov do sistema dinâmico linear no  $k$ -ésimo instante. As matrizes de Hankel do modelo dinâmico linear são dadas por:

$$\Pi_0 = \begin{bmatrix} \psi_1 & \psi_2 & \dots & \psi_{\beta_l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_{\alpha_l} & \psi_{\alpha_l+1} & \dots & \psi_{\alpha_l+\beta_l-1} \end{bmatrix} \quad (47)$$

$$\Pi_1 = \begin{bmatrix} \psi_2 & \psi_3 & \dots & \psi_{\beta_l+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_{\alpha_l+1} & \psi_{\alpha_l+2} & \dots & \psi_{\alpha_l+\beta_l} \end{bmatrix} \quad (48)$$

onde  $\alpha_l$  e  $\beta_l$  são inteiros definidos por  $\alpha_l m \leq \beta_l p$  (Juang and Phan, 2001). O próximo passo para a realização mínima do sistema dinâmico linear é aplicando-se SVD na Eq 47, dado por:

$$\Pi_0 = \Lambda \Delta \Xi^T \quad (49)$$

onde  $\Delta = \begin{bmatrix} \Delta_n & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$  e  $\Delta_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$  é uma matriz diagonal composta pelos valores singulares mais significativos de  $\Pi_0$ . Assim, (49) é reescrita por:

$$\Pi_0 = \Lambda_n \Delta_n \Xi_n^T \quad (50)$$

onde  $\Delta_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$  é uma matriz diagonal e as matrizes  $\Lambda_n$  e  $\Xi_n$  são as  $n$  primeira colunas de  $\Lambda$  e  $\Xi$ , respectivamente.

Finalmente, as matrizes do modelo dinâmico linear do bloco linear do modelo de Hammerstein são recursivamente computadas por:

$$A = (\Delta_n)^{-1/2} (\Lambda_n)^T (\Pi_1) (\Xi_n) (\Delta_n)^{-1/2} \quad (51)$$

$$B = \text{primeiras } n \text{ colunas de } (\Delta_n)^{1/2} (\Xi_n)^T \quad (52)$$

$$C = \text{primeiras } n \text{ linhas de } (\Lambda_n) (\Delta_n)^{1/2} \quad (53)$$

$$D = \psi_0 \quad (54)$$

### 3 Resultados Computacionais

Nesta Seção, para ilustrar a eficiência e a aplicabilidade da abordagem proposta, resultados computacionais da identificação online de um sistema multivariável com não linearidades combinadas complexas, *benchmark* frequentemente citados na literatura, são apresentados. Os critérios de desempenho aplicados para avaliar os modelos obtidos são o erro quadrático médio (*Mean Square Error* - MSE) (Jafari et al., 2014), dado por:

$$MSE_j = \frac{1}{N_T} \sum_{k=1}^{N_T} (y_{k,j} - \hat{y}_{k,j})^2 \quad (55)$$

com  $j = [1, p]$ , onde  $p$  é o número de saídas,  $N_T$  é o número de amostras,  $y_{k,j}$  e  $\hat{y}_{k,j}$  denotam a  $j$ -ésima saída real e estimada, respectivamente, e *Best Fit* (FIT), dado por:

$$FIT_j = \left( 1 - \frac{\|\mathbf{y}_j - \hat{\mathbf{y}}_j\|}{\|\mathbf{y}_j - \mathbf{y}_{mean}^j\|} \right) \times 100\% \quad (56)$$

onde  $\mathbf{y}_j$  e  $\hat{\mathbf{y}}_j$  denota os vetores contendo a  $j$ -ésima saída real e estimada, respectivamente, outputs,  $\mathbf{y}_{mean}^j$  é o vetor contendo o valor médio de  $\mathbf{y}_j$  e  $\|\cdot\|$  indica a norma Euclidiana.

O sistema dinâmico multivariável com duas entradas e duas saídas, com não linearidades complexas combinadas, aplicado como *benchmark* em (Jia et al., 2016), é expresso por:

$$\begin{cases} w_{k,1} = 1.6740u_{k,1} + 0.8370u_{k,1}^2 - 0.5816u_{k,2} - 0.2908u_{k,2}^2 \\ w_{k,2} = -0.1410u_{k,1} + 0.0705u_{k,1}^2 - 0.1614u_{k,2} + 0.0807u_{k,2}^2 \end{cases} \quad (57)$$

$$\begin{bmatrix} y_{k,1} \\ y_{k,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.025 & -0.100 \\ 0.190 & -0.050 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{k-1,2} \\ y_{k-1,2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.025 & 0.100 \\ -0.190 & 1.050 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{k-1,1} \\ w_{k-1,2} \end{bmatrix} \quad (58)$$

onde  $\mathbf{u}_k = [u_{k,1} \ u_{k,2}]^T$  é o vetor de entradas,  $\mathbf{w}_k = [w_{k,1} \ w_{k,2}]^T$  é o vetor contendo o sinal intermediário desconhecido e  $\mathbf{y}_k = [y_{k,1} \ y_{k,2}]^T$  é o vetor de saídas. Um conjunto de dados com 1000 amostras, cuja entrada é um sinal multi-degrau aleatório com distribuição uniforme entre  $[-2, 2]$ , apresentado na Fig. 2, é aplicado para estimação do modelo de Hammerstein *fuzzy* evolutivo multi-variável. As primeiras 200 amostras são consideradas para inicialização da metodologia.

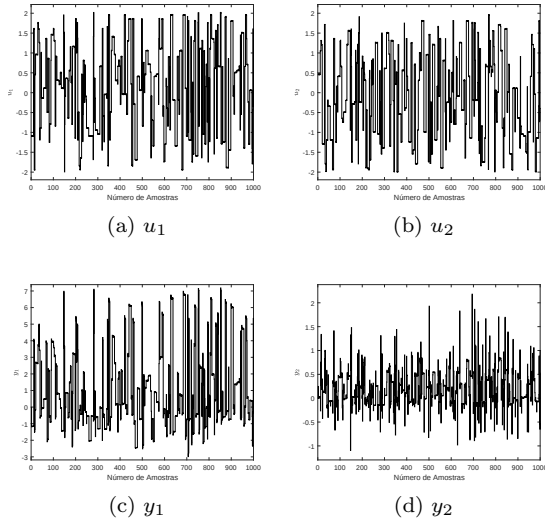


Figura 2: Dados de identificação. (a) entrada  $u_1$ ; (b) entrada  $u_2$ ; (c) saída  $y_1$ ; (d) saída  $y_2$ .

### 3.1 Estimação Paramétrica Evolutiva da não Linearidade Estática

Para estimação evolutiva do antecedente, de acordo com a Seção 2.1.1, os seguintes parâmetros de projeto são empregados:  $fac = 0.15$  (parâmetro que controla a zona de influência de cada *cluster* evoluído),  $g_s = 0.02$  (ganho de aprendizagem inicial que influencia o deslocamento dos centros dos *cluster* e é responsável pela convergência dos submodelos). A evolução do número de *cluster* do sistema *fuzzy* evolutivo durante o treinamento é mostrado na Fig. 3, onde pode ser visto que o modelo evolui 12 regras na fase de inicialização e ao final do treinamento apresenta 18 regras.

A estimação recursiva das matrizes de estado de cada submodelo do consequente do sistema de inferência *fuzzy* evolutivo formulado na Seção 2.1.2 é realizada aplicando-se os seguintes parâmetros de projeto:  $q_f = 1$  (número de parâmetros de Markov *fuzzy* de cada submodelo),  $\alpha_f = 3$  (número de linhas da matriz de Hankel) e  $\beta_f = 7$  (número de colunas da matriz de Hankel). Os valores singulares das matrizes de Hankel  $H_0^i$ ,  $i=1, \dots, 12$ , construídas a partir dos dados de entrada e saída,  $\mathbf{u}_k$  e  $\mathbf{y}_k$ , considerando-se as 200 amostras aplicadas para inicialização do algoritmo, são apresenta-

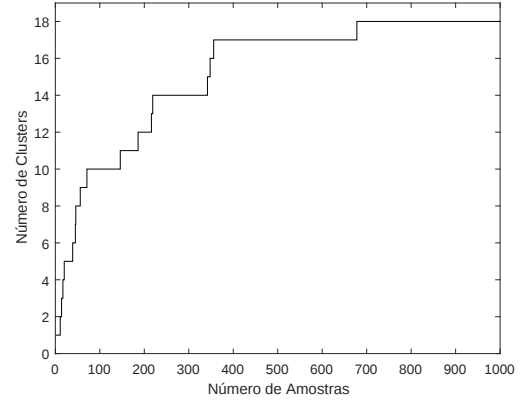


Figura 3: Evolução do número de *cluster* durante treinamento.

dos na Fig. 4. A análise desses valores singulares resulta em submodelos *fuzzy* no espaço de estados de ordem mínima  $n = 2$ . A diagonal principal das matrizes  $G^i$ ,  $i=1, \dots, 18$  de cada submodelo *fuzzy*, estimadas recursivamente, são apresentadas na Fig. 5.

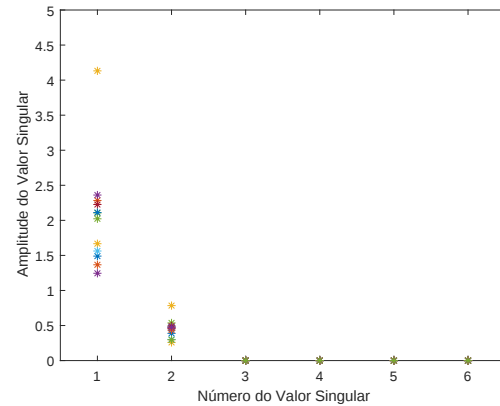


Figura 4: Valores singulares das matrizes de Hankel  $H_0^i$ ,  $i=1, \dots, 12$  para cada regra *fuzzy*.

### 3.2 Estimação Paramétrica Recursiva da Dinâmica Linear

Para parametrização da dinâmica linear do modelo de Hammerstein, os seguintes parâmetros de projeto são empregados:  $q_l = 2$  (número de parâmetros de Markov do sistema dinâmico linear),  $\alpha_l = 25$  (número de linhas da matriz de Hankel do sistema dinâmico linear),  $\beta_l = 50$  (número de colunas da matriz de Hankel do sistema dinâmico linear) e  $\lambda_l = 0.98$  (fator de esquecimento). Os valores singulares da matriz de Hankel  $\Pi_0$ , construída a partir do sinal intermediário  $\mathbf{w}_k$  e do sinal de saída  $\mathbf{y}_k$ , são ilustrados na Fig. 6. Assim, a ordem mínima do modelo dinâmico linear no espaço de estados é  $n = 4$ .

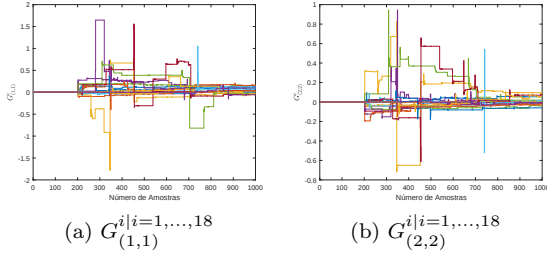


Figura 5: Matriz de parâmetros  $G^i$ : (a) elementos  $G_{(1,1)}^i$ ; (b) elemento  $G_{(2,2)}^i$ .

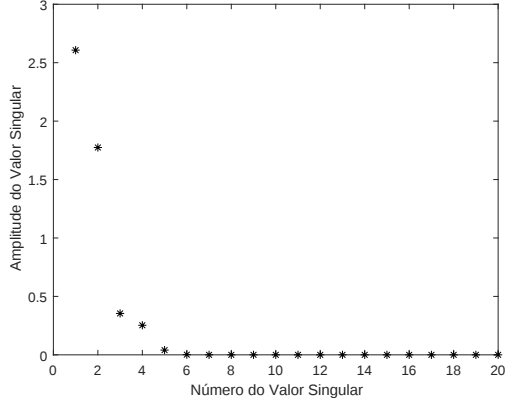


Figura 6: Valores singulares das matrizes de Hankel  $H_0^i$  |  $i=1, \dots, 12$ .

A estimação recursiva das matrizes de parâmetros  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  é ilustrada na Fig. 7.

O conjunto de dados de validação, com 350 amostras, diferente do conjunto de dados apresentados na Fig. 2, aplicado no modelo de Hammerstein *fuzzy* evolutivo multivariável resulta na Fig. 8. A validação da não linearidade estática é mostrada na Fig. 9. O MSE e FIT, critérios de desempenho, considerando-se treinamento e validação, são mostrados na Tabela 1.

Tabela 1: Análise Comparativa.

| Critério Desempenho | Saída   |         |               |               |
|---------------------|---------|---------|---------------|---------------|
|                     | $y_1^*$ | $y_2^*$ | $y_1^\otimes$ | $y_2^\otimes$ |
| $MSE^*$             | 0,0377  | 0,0015  | 0,008         | 0,0005        |
| $FIT^*$             | 92,34%  | 90,18%  | —             | —             |
| $MSE^+$             | 0,0602  | 0,0021  | —             | —             |
| $FIT^+$             | 89,75%  | 87,48%  | —             | —             |

\*Resultados de treinamento.

+Resultados de validação.

\*Metodologia proposta.

$\otimes$  Metodologia proposta em (Jia et al., 2016).

#### 4 Conclusões

A abordagem proposta neste artigo se mostrou eficiente na identificação online de sistemas dinâmicos não lineares multivariáveis complexos. O sis-

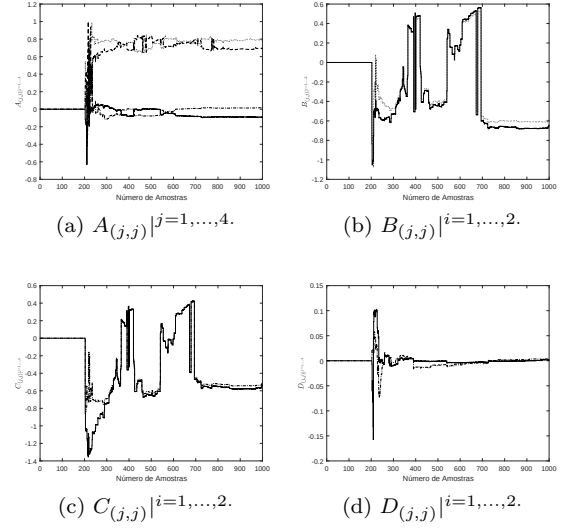


Figura 7: Parâmetros do modelo dinâmico linear: (a) elementos da matriz  $A$  - linha sólida  $A_{(1,1)}$ , linha pontilhada  $A_{(2,2)}$ , linha tracejada  $A_{(3,3)}$ , linha pontilhada  $A_{(4,4)}$ ; (b) elementos da matriz  $B$  - linha sólida  $B_{(1,1)}$ , linha pontilhada  $B_{(2,2)}$ ; (c) elementos da matriz  $C$  - linha sólida  $C_{(1,1)}$ ; linha pontilhada  $C_{(2,2)}$ ; (D) elementos da matriz  $D$  - linha sólida  $D_{(1,1)}$ ; linha pontilhada  $D_{(2,2)}$ .

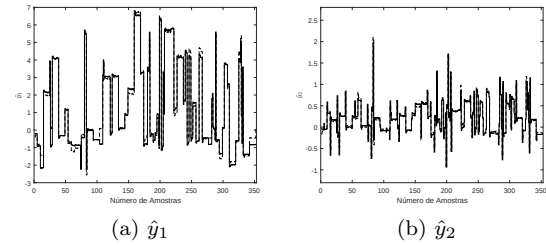


Figura 8: Resultado de validação (a)  $\hat{y}_1$  e (b)  $\hat{y}_2$ : linha sólida - saída real e linha tracejada - metodologia proposto.

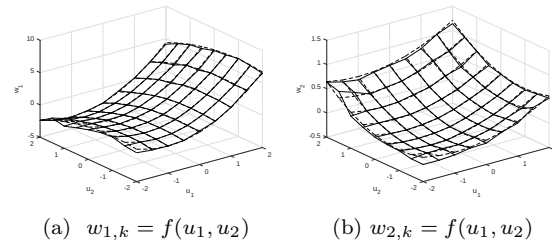


Figura 9: Função estática não linear  $\mathbf{w}_k = f(\mathbf{u}_k)$ . Linha tracejada: saída real; linha sólida: metodologia proposta.

tema de inferência *fuzzy* TS evolutivo foi eficiente na aproximação online da não linearidade estática multivariável do tipo combinada. Além disso, o algoritmo recursivo de realização mínima de auto-sistema foi capaz de representar de forma online o comportamento dinâmico linear do sistema dinâmico não linear multivariável.

### Referências

- Gomez, J. C. and Baeyens, E. (2004). Identification of block-oriented nonlinear systems using orthonormal bases, *Journal of Process Control* **14**(6): 685–697.
- Hammar, K., Djamah, T. and Bettayeb, M. (2015). Fractional hammerstein system identification using polynomial non-linear state space model, *Control, Engineering & Information Technology (CEIT), 2015 3rd International Conference on*, IEEE, pp. 1–6.
- Jafari, M., Salimifard, M. and Dehghani, M. (2014). Identification of multivariable nonlinear systems in the presence of colored noises using iterative hierarchical least squares algorithm, *ISA transactions* **53**(4): 1243–1252.
- Jalaleddini, K. and Kearney, R. E. (2013). Subspace identification of siso hammerstein systems: application to stretch reflex identification, *IEEE Transactions on Biomedical Engineering* **60**(10): 2725–2734.
- Jia, L., Li, X. and Chiu, M.-S. (2016). The identification of neuro-fuzzy based mimo hammerstein model with separable input signals, *Neurocomputing* **174**: 530–541.
- Jin, Q., Wang, H., Su, Q., Jiang, B. and Liu, Q. (2017). A novel optimization algorithm for mimo hammerstein model identification under heavy-tailed noise, *ISA transactions*.
- Juang, J.-N., Phan, M., Horta, L. G. and Longman, R. W. (1993). Identification of observer/kalman filter markov parameters: theory and experiments, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics* **16**(2): 320–329.
- Juang, J.-N. and Phan, M. Q. (2001). *Identification and control of mechanical systems*, Cambridge University Press.
- Júnior, S. E. R. and de Oliveira Serra, G. L. (2017). A novel intelligent approach for state space evolving forecasting of seasonal time series, *Engineering Applications of Artificial Intelligence* **64**: 272–285.
- Ljung, L. (1998). System identification, *Signal analysis and prediction*, Springer, pp. 163–173.
- Lughofer, E. (2011). *Evolving fuzzy systems-methodologies, advanced concepts and applications*, Vol. 53, Springer.
- Lughofer, E. D. (2008). Flexfis: A robust incremental learning approach for evolving takagi–sugeno fuzzy models, *IEEE Transactions on fuzzy systems* **16**(6): 1393–1410.
- Rocha Filho, O. D. and de Oliveira Serra, G. L. (2017). Recursive fuzzy instrumental variable based evolving neuro-fuzzy identification for non-stationary dynamic system in a noisy environment, *Fuzzy Sets and Systems*.
- Shang, L., Liu, J. and Zhang, Y. (2016). Recursive fault detection and identification for time-varying processes, *Industrial & Engineering Chemistry Research* **55**(46): 12149–12160.
- Wibowo, T. C. S. and Saad, N. (2010). MIMO model of an interacting series process for robust mpc via system identification, *ISA transactions* **49**(3): 335–347.
- Wu, C.-Y., Tsai, J.-H., Guo, S.-M., Shieh, L.-S., Canelon, J., Ebrahimzadeh, F. and Wang, L. (2015). A novel on-line observer/kalman filter identification method and its application to input-constrained active fault-tolerant tracker design for unknown stochastic systems, *Journal of the Franklin Institute* **352**(3): 1119–1151.