UMA NOVA METODOLOGIA PARA A MODELAGEM NEBULOSA EVOLUTIVA MULTIVARIÁVEL *ONLINE* A PARTIR DE DADOS EXPERIMENTAIS

Luís Miguel Magalhães Torres*, Ginalber Luiz de Oliveira Serra†

*Instituto Federal do Maranhão
Av. Newton Belo, S/N, Vila Maria
Imperatriz, Maranhão, Brasil

†Instituto Federal do Maranhão
Av. Getúlio Vargas, 04, Monte Castelo
São Luís, Maranhão, Brasil

Abstract— In this paper, an evolving fuzzy methodology for the identification of nonlinear systems is proposed. The obtained evolving model is capable of automatically adjust its structure according to the data flow. In addition, the minimum realization of consequent part of the fuzzy rule ensures the simplicity of the obtained model. To demonstrate the applicability of the evolving fuzzy methodology for recursive state space identification, it was proposed the estimation of the trajectory of a rocket used for training. The results obtained were encouraging and demonstrated the applicability of the proposed methodology in applications with a high level of complexity.

Keywords— System Identification, Multivariable Dynamic Systems, Evolving Fuzzy System, State Space.

Resumo— Neste trabalho, uma metodologia nebulosa evolutiva para a identificação de sistemas não-lineares é proposta. O modelo evolutivo obtido é capaz de alterar sua estrutura de maneira autônoma de acordo com o fluxo de dados. Além disso, a realização mínima dos submodelos do consequente das regras garante a simplicidade do modelo obtido. Para demonstrar a aplicabilidade da metodologia nebulosa evolutiva para identificação recursiva no espaço de estados, foi proposta a estimação da trajetória de um foguete utilizado para treinamento. Os resultados obtidos foram animadores e demonstraram a aplicabilidade da metodologia proposta em aplicações que necessitam de alto desempenho.

Palavras-chave— Identificação de Sistemas, Sistema Dinâmico Multivariável, Sistema Nebuloso Evolutivo, Espaço de Estados.

1 Introdução

Devido ao grande avanço tecnológico das últimas décadas, os sistemas dinâmicos presentes nos mais diversos tipos de industrias tem se tornado cada vez mais complexos. Assim, torna-se um desafio para os pesquisadores da área o desenvolvimento de técnicas de identificação de sistemas dinâmicos que permitam a obtenção de modelos que sejam capazes de representar as mais diversas características presentes no processo, entre elas podemos destacar: não linearidade, variação temporal dos parâmetros do processo, incertezas, entre tantas outras (Fu and Li, 2013).

Desde a proposta inicial do modelo nebuloso Takagi-Sugeno (TS) até os dias atuais, este tipo de modelo tem sido bastante utilizado na modelagem de sistemas altamente complexos (Tan et al., 2018). Em (Salgado et al., 2017), é proposto um algoritmo de agrupamento nebuloso híbrido para a obtenção de modelos nebuloso Takagi-Sugeno. O principal objetivo desta abordagem é trabalhar com séries temporais com características variantes no tempo. Em (Rotondo et al., 2015), é apresentado um estudo das analogias e conexões entre modelos lineares variantes no tempo (LPV) e modelos nebulosos Takagi-Sugeno; e são propostas duas metodologias para a geração automática de tais modelos.

A idéia de se desenvolver sistemas autônomos, capazes de alterar sua estrutura de maneira independente, teve origem com alguns trabalhos aplicados ao projeto de redes neurais artificiais (Kohonen, 1998). Sistemas nebulosos evolutivos foram desenvolvidos para suprir uma demanda de modelos flexíveis, adaptativos e interpretáveis. Entre as diversas aplicações dos modelos nebulosos evolutivos, podem ser destacados os trabalhos que desenvolvem metodologias evolutivas para a modelagem de sistemas dinâmicos complexos (Sa'ad et al., 2018).

Neste trabalho uma nova metodologia para obtenção evolutiva de modelos nebulosos TS a partir de dados experimentais, é proposta. A metodologia proposta será aplicada na predição da trajetória de um foguete de treinamento.

2 Metodologia Nebulosa Evolutiva para Identificação no Espaço de Estados: Formulação

Neste trabalho o modelo nebuloso *Takagi-Sugeno* (TS) apresenta a i-ésima regra, dada por:

$$R^i: \ \mathbf{SE}\ (\mathbf{z}_k \ \sim \ \mathbf{z^{i*}})\ \mathbf{ENT\tilde{A}O} \quad (1)$$
$$\begin{cases} \mathbf{x}_{k+1}|^i = \mathbf{A}^i\mathbf{x}_k|^i + \mathbf{B}^i\mathbf{u}_k \\ \mathbf{y}_k|^i = \mathbf{C}^i\mathbf{x}_k|^i + \mathbf{D}^i\mathbf{u}_k \end{cases}$$

onde $i = 1, 2, \cdots, L$ é o número de regras, $\mathbf{z}_k =$

$\left[z_k^1\ z_k^2\ \cdots\ z_k^p\right]$ são as variáveis do antecedente, $\mathbf{z^{i*}} = \left[z_1^{i*}\ z_2^{i*}\ \cdots\ z_p^{i*}\right]$ é o ponto focal da i-ésima regra, $\mathbf{A}^i \in \Re^{n\times n}$, $\mathbf{B}^i \in \Re^{n\times r}$, $\mathbf{C}^i \in \Re^{q\times n}$ e $\mathbf{D}^i \in \Re^{q\times r}$ são os parâmetros do modelo linear local para cada regra, $\mathbf{x}_k|^i = \left[x_k^1\ \ x_k^2\ \ \ldots\ \ x_k^n\right] \in \Re^n$ é o vetor de estados do i-ésimo modelo linear local, $\mathbf{y}_k|^i = \left[y_k^1\ \ y_k^2\ \ \ldots\ \ y_k^q\right] \in \Re^q$ é o vetor de saída do i-ésimo modelo linear local e $\mathbf{u}_k = \left[u_k^1\ \ u_k^2\ \ \ldots\ \ u_k^r\right] \in \Re^r$ é o vetor de entrada.

O grau de pertinência de uma dada amostra para a i-ésima regra é dado por uma gaussiana centrada no pronto focal da regra, dada por:

$$\mu_j^i(z_k^j) = e^{-\frac{(z_k^j - z_j^{i*})^2}{2(\sigma_j^i)^2}} \tag{2}$$

onde σ_j^i é a variância da j-ésima variável de entrada para a i-ésima regra.

O grau de ativação normalizado da i-ésima regra, é formulado como:

$$\gamma^i(\mathbf{z}_k) = \frac{\prod_{j=1}^{p} \mu_j^i(z_k^j)}{\sum_{i=1}^{R} \prod_{j=1}^{p} \mu_j^i(z_k^j)} \tag{3}$$

A saída do modelo nebuloso TS, é dada por:

$$\begin{cases} \tilde{x}_{k+1} = \sum_{i=1}^{R} \gamma^i(\mathbf{z}_k)\mathbf{x}_{k+1}|^i \\ \tilde{y}_k = \sum_{i=1}^{R} \gamma^i(\mathbf{z}_k)\mathbf{y}_k|^i \end{cases} \tag{4}$$

2.1 Estimação dos Parâmetros do Antecedente: Abordagem Evolutiva

O algoritmo usado para estimar as regras nebulosas emprega o conceito de estimação recursiva de densidade (RDE no inglês *recursive density estimation*). A densidade de uma amostra $\mathbf{z}_k$, é dada por:

$$D(\mathbf{z}_k) = \frac{1}{1 + \frac{1}{k-1}\sum_{i=1}^{k} |\mathbf{z}_k - \mathbf{z}_i|^2} \tag{5}$$

Recursivamente, a equação (5) pode ser formulada, como:

$$D_k(\mathbf{z}_k) = \frac{k-1}{(k-1)\left(\sum_{i=1}^{p+q}\left(z_k^j\right)^2 + 1\right) + b_k - \Lambda_k} \tag{6}$$

onde $\Lambda_k = 2\sum_{i=1}^{p+q} z_k^j c_k^j,\ D_1(\mathbf{z}_1) = 1, b_k = b_{k-1} + \sum_{j=1}^{p+q}\left(z_k^j\right)^2, b_1 = 0, c_k^j = c_k^j + z_k^j, c_1^j = 0.$

A densidade $D(\mathbf{z}_k)$ indica a capacidade de generalização e representação de uma amostra. A condição usada para selecionar uma amostra como um novo ponto focal, chamada **Condição A**, é dada por (Angelov, 2013):

$$D_k(\mathbf{z}_k) > \max_{i=1}^{L} D_k\mathbf{z}^{i*} \textbf{ or } D_k(\mathbf{z}_k) < \min_{i=1}^{L} D_k\mathbf{z}^{i*} \tag{7}$$

Quando $\mathbf{z}_k$ é selecionada para ser um novo ponto focal, sua densidade precisa ser atualizada a cada nova amostra. Esta tarefa é realizada, recursivamente, como mostrado a seguir:

$$D_k(\mathbf{z}^{i*}) = \frac{t-1}{t-1+(t-2)(\frac{1}{D_{k-1}(z^{i*})}-1)+\Psi_k} \tag{8}$$

onde $\Psi_k = \sum_{j=1}^{p+q}(z_{k,j} - z_{(k-1),j})^2$.

Para evitar redundancia das regras e controlar o grau de sobreposição, a **condição B** é usada (Angelov and Kordon, 2010):

$$\begin{aligned} &\textbf{SE } \mu_i^j(z_{k,j}) > \epsilon, i = [1, L-1], j = [1,p] \\ &\textbf{ENTÃO } L = L-1 \end{aligned} \tag{9}$$

De acordo com a equação (9) quando uma nova regra é criada todas as regras pré-existente com grau de pertinencia acima de um certo limiar ϵ são substituídas pela nova regra, evitando que regras redundantes coexistam.

De modo a garantir que apenas regras com alguma contribuição sejam mantidas, minimizando o efeito de pertubações, uma condição para eliminar as regras com baixa qualidade, é utilizada, como segue (Angelov and Kordon, 2010):

$$\textbf{SE } U_k^i < \eta \ \ \textbf{ENTÃO } L = L-1 \tag{10}$$

com $\eta \in [0.01, 0.3]$, e

$$U_k^i = \frac{\sum_{j=1}^{k}\gamma_j^i}{k - I^{i*}} \tag{11}$$

onde $i = [1, L]$ e I^* é o instante que a i-ésima regra foi criada. A utilidade da regra U_k^i mensura o valor médio do grau de ativação de uma dada regra, para o instante no qual a regra foi criada até o instante atual (Maciel et al., 2017). Logo, uma regra com baixa utilidade não está contribuindo com a saída do modelo nebuloso; por esse motivo, a eliminação de tal regra não impactaria a qualidade do modelo obtido.

A variância σ_j^i, também conhecida como zone de influência da regra, é atualizada, recursivamente, como segue (Angelov, 2013):

$$\sigma_{k,j}^i = \sqrt{\zeta\left(\sigma_{(k-1),j}^i\right)^2 + (1-\zeta)\frac{1}{S_k^i}(z_k^j - z_j^{i*})^2} \tag{12}$$

onde ζ é uma contante de aprendizado e S_k^i é o número de amostras associadas com a i-ésima regra no k-ésimo instante de tempo.

2.2 Estimação dos Parâmetros do Consequente: Abordagem Recursiva

O algoritmo evolutivo apresentado na seção anterior é capaz de alterar a estrutura, o número e os parâmetros das regras nebulosas, de acordo com o fluxo de dados. Nesta seção, é proposta uma nova metodologia para a estimação recursiva dos parâmetros do consequente do modelo Nebuloso, chamada de Algoritmo de Realização de Auto-Sistema Nebuloso (F-ERA no inglês Fuzzy Eigensystem Realization Algorithm), que utiliza os parâmetros de Markov para a estimação do modelo local linear no espaço de estados para a i-ésima regra.

2.2.1 Algoritmo de Realização de Auto-Sistema Nebuloso (F-ERA)

O Algoritmo de Realização de Auto-Sistema Nebuloso (F-ERA) proposto neste trabalho, utiliza os parâmetros de Markov nebulosos do sistema, para encontrar as matrizes no espaços de estados $\mathbf{A}^i$, $\mathbf{B}^i$ and $\mathbf{C}^i$ para a i-ésima regra nebulosa. O algoritmo é baseado na matriz de Hankel generalizada com a os parâmetros de Markov nebulosos do sistema

$$\mathbf{H}_{j-1}^i = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_j^i & \mathbf{M}_{j+1}^i & \cdots & \mathbf{M}_{j+\beta-1}^i \\ \mathbf{M}_{j+1}^i & \mathbf{M}_{j+2}^i & \cdots & \mathbf{M}_{j+\beta}^i \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{M}_{j+\alpha-1}^i & \mathbf{M}_{j+\alpha}^i & \cdots & \mathbf{M}_{j+\alpha+\beta-2}^i \end{bmatrix} \tag{13}$$

onde α e β são números inteiros tal que $\alpha q \leq \beta r$, sendo r e q os números de entrada e saída do sistema, respectivamente.

Dado o modelo linear local para a i-ésima regra

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{k+1}|^i = \mathbf{A}^i \mathbf{x}_k|^i + \mathbf{B}^i \mathbf{u}_k \\ \mathbf{y}_k|^i = \mathbf{C}^i \mathbf{x}_k|^i + \mathbf{D}^i \mathbf{u}_k \end{cases} \tag{14}$$

os parâmetros de Markov nebulosos do sistema, são definidos a seguir:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_0^i &= \mathbf{D}^i \\ \mathbf{M}_j^i &= \mathbf{C}^i(\mathbf{A}^i)^{j-1}\mathbf{B}^i \end{aligned} \tag{15}$$

Substituindo (15) em (13), temos:

$$\mathbf{H}_{j-1}^i = \begin{bmatrix} \mathbf{C}^i(\mathbf{A}^i)^{j-1}\mathbf{B}^i & \cdots & \mathbf{C}^i(\mathbf{A}^i)^{j+\beta-1}\mathbf{B}^i \\ \mathbf{C}^i(\mathbf{A}^i)^{j}\mathbf{B}^i & \cdots & \mathbf{C}^i(\mathbf{A}^i)^{j+\beta}\mathbf{B}^i \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{C}^i(\mathbf{A}^i)^{j+\alpha-1}\mathbf{B}^i & \cdots & \mathbf{C}^i(\mathbf{A}^i)^{j+\alpha+\beta-1}\mathbf{B}^i \end{bmatrix} \tag{16}$$

$$\mathbf{H}_{j-1}^i = \mathbf{P}_\alpha^i(\mathbf{A}^i)^{j-1}\mathbf{Q}_\beta^i \tag{17}$$

onde $\mathbf{P}_\alpha^i$ é a matriz de controlabilidade e $\mathbf{Q}_\beta^i$ é a matriz de observabilidade do modelo linear local.

Fazendo $j = 1$ (16), temos

$$\mathbf{H}_0^i = \begin{bmatrix} \mathbf{C}^i\mathbf{B}^i & \cdots & \mathbf{C}^i(\mathbf{A}^i)^{\beta-1}\mathbf{B}^i \\ \mathbf{C}^i\mathbf{A}^i\mathbf{B}^i & \cdots & \mathbf{C}^i(\mathbf{A}^i)^{\beta}\mathbf{B}^i \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{C}^i(\mathbf{A}^i)^{\alpha-1}\mathbf{B}^i & \cdots & \mathbf{C}^i(\mathbf{A}^i)^{\alpha+\beta-1}\mathbf{B}^i \end{bmatrix} \tag{18}$$

$$\mathbf{H}_0^i = \mathbf{P}_\alpha^i\mathbf{Q}_\beta^i \tag{19}$$

O posto máximo de $\mathbf{H}_0^i$, ou o número de valores singulares não nulos, é igual ao posto das matrizes $\mathbf{P}_\alpha^i$ e $\mathbf{Q}_\beta^i$. Uma vez que o sistema é considerado controlável e observável, pode-se afirmar que a ordem do modelo linear local identificado é igual ao posto da matriz $\mathbf{H}_0^i$, ou em outras palavras, o número de valores singulares não nulos de $\mathbf{H}_0^i$.

A decomposição em valores singulares (SVD) da matriz de Hankel com $j = 1$, para a i-ésima regra, é dada por

$$\mathbf{H}_0^i = \mathbf{R}^i\mathbf{\Sigma}^i(\mathbf{S}^i)^T \tag{20}$$

onde $\mathbf{R}^i$ e $\mathbf{S}^i$ são matrizes ortogonais, e $\mathbf{\Sigma}^i$ é uma matriz retangular, dada por:

$$\mathbf{\Sigma}^i = \begin{bmatrix} \mathbf{\Sigma}_n^i & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{21}$$

com

$$\mathbf{\Sigma}_n^i = \begin{bmatrix} \sigma_1^i & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2^i & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_n^i \end{bmatrix} \tag{22}$$

onde $\sigma_1^i > \sigma_2^i > \cdots > \sigma_n^i > 0$ são os n valores singulares mais significativos de $\mathbf{H}_0^i$, sendo $\sigma_n^i \gg \sigma_{n+1}$. Então, considerando $\mathbf{R}_n^i$ e $\mathbf{S}_n^i$ matrizes formadas pelas n primeiras colunas de $\mathbf{R}^i$ e $\mathbf{S}^i$, respectivamente, a matriz $\mathbf{H}_0^i$ pode ser aproximada por

$$\mathbf{H}_0^i = \mathbf{R}_n^i\mathbf{\Sigma}_n^i(\mathbf{S}_n^i)^T \tag{23}$$

com

$$\left(\mathbf{R}_n^i\right)^T\mathbf{R}_n^i = \mathbf{I} = \left(\mathbf{S}_n^i\right)^T\mathbf{S}_n^i \tag{24}$$

e sua pseudo-inversa dada por

$$(\mathbf{H}_0^i)^\dagger = \mathbf{S}_n^i\left(\mathbf{\Sigma}_n^i\right)^{-1}(\mathbf{R}_n^i)^T \tag{25}$$

onde $\dagger$ representa uma pseudo-inversa.

Realizando uma comparação entre as equações (23) e (19), pode-se definir $\mathbf{P}_{\alpha}^{i}$ e $\mathbf{Q}_{\beta}^{i}$ como sendo

$$\mathbf{P}_{\alpha}^{i} = \mathbf{R}_{n}^{i} \left(\boldsymbol{\Sigma}_{n}^{i}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{26}$$

e

$$\mathbf{Q}_{\beta}^{i} = \left(\boldsymbol{\Sigma}_{n}^{i}\right)^{\frac{1}{2}} (\mathbf{S}_{n}^{i})^{T} \tag{27}$$

Substituindo as equações (26) e (27) em (17) com $j = 2$, obtemos

$$\mathbf{H}_{1}^{i} = \mathbf{R}_{n}^{i} \left(\boldsymbol{\Sigma}_{n}^{i}\right)^{\frac{1}{2}} \mathbf{A}^{i} \left(\boldsymbol{\Sigma}_{n}^{i}\right)^{\frac{1}{2}} (\mathbf{S}_{n}^{i})^{T} \tag{28}$$

A equação (28) pode ser resolvida para obtermos $\mathbf{A}^{i}$, como segue

$$\mathbf{A}^{i} = \left(\boldsymbol{\Sigma}_{n}^{i}\right)^{-\frac{1}{2}} (\mathbf{R}_{n}^{i})^{T} \mathbf{H}_{1}^{i} \mathbf{S}_{n}^{i} \left(\boldsymbol{\Sigma}_{n}^{i}\right)^{-\frac{1}{2}} \tag{29}$$

A partir da equação (17), define-se $\mathbf{T}_{bo}^{i}$ como sendo o primeiro bloco de dimensão $\Re^{n\times n}$ de $\mathbf{P}_{\alpha}^{i}$. Logo, existe a seguinte matriz de transformação $\mathbf{T}_{n}^{i}$ que satisfaz

$$\mathbf{T}_{n}^{i} = \mathbf{T}_{bo}^{i} \left(\mathbf{P}_{\alpha}^{i}\right)^{\dagger} \tag{30}$$

Seja

$$\mathbf{A}_{0}^{i} = \mathbf{T}_{bo}^{i} \mathbf{A}^{i} \left(\mathbf{T}_{bo}^{i}\right)^{-1} \tag{31}$$

Substituindo a equação (29) em (31), obtemos

$$\mathbf{A}_{0}^{i} = \mathbf{T}_{n}^{i} \mathbf{H}_{1}^{i} \mathbf{H}_{0}^{\dagger} \left(\mathbf{T}_{n}^{i}\right)^{\dagger} \tag{32}$$

Como $\mathbf{T}_{bo}$ foi definida como o primeiro bloco de dimensão $\Re^{n\times n}$, $\mathbf{T}_{n}$ pode ser definida como

$$\mathbf{T}_{n}^{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{n} & \mathbf{0}_{n} & \cdots & \mathbf{0}_{n} \end{bmatrix} \tag{33}$$

onde $\mathbf{T}_{n}$ possui dimensão $\Re^{(q\alpha)\times n}$. Assim, chegamos ao seguinte resultado

$$\mathbf{A}_{0}^{i} = \mathbf{T}_{n}^{T} \mathbf{H}_{1}^{i} \left[\mathbf{T}_{n}^{T} \mathbf{H}_{0}\right]^{\dagger} \tag{34}$$

A partir das equações (16), (17), (23), (25), (34), uma realização mínima para o i-ésimo modelo linear local pode ser obtida como

$$\hat{\mathbf{A}}^{i} = \mathbf{T}_{bo}^{i} \mathbf{A}^{i} \left(\mathbf{T}_{bo}^{i}\right)^{-1} \tag{35}$$

$$\hat{\mathbf{B}}^{i} = \mathbf{T}_{n}^{T} \mathbf{H}_{0}^{i} \mathbf{T}_{(r+q)} \tag{36}$$

$$\hat{\mathbf{C}}^{i} = \mathbf{T}_{q}^{T} \mathbf{T}_{n} \tag{37}$$

onde

$$\mathbf{T}_{q}^{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{q} & \mathbf{0}_{q} & \cdots & \mathbf{0}_{q} \end{bmatrix} \tag{38}$$

e

$$\mathbf{T}_{(r+q)}^{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{(r+q)} & \mathbf{0}_{(r+q)} & \cdots & \mathbf{0}_{(r+q)} \end{bmatrix} \tag{39}$$

2.2.2 Estimação Recursiva dos Parâmetros de Markov Nebulosos

Para calcular os parâmetros dos modelos locais é necessário o conhecimento dos parâmetros de Markov nebulosos do sistema para a i-ésima regra. É possível encontrar os parâmetros de Markov a partir um conjunto de dados de entrada e saída, mesmo para sistemas dinâmicos instáveis ou fracamente amortecidos, adicionando uma realimentação através de um observador para garantir estabilidade. Adicionando e subtraindo $\mathbf{G}^{i}\mathbf{y}_{k}|^{i}$ no lado direito do termo dos estados na equação (14), temos

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1}^{i} &= \mathbf{A}^{i}\mathbf{x}_{k}|^{i} + \mathbf{B}^{i}\mathbf{u}_{k} + \mathbf{G}^{i}\mathbf{y}_{k}|^{i} - \mathbf{G}^{i}\mathbf{y}_{k}|^{i} && (40)\\ &= \bar{\mathbf{A}}^{i}\mathbf{x}_{k}|^{i} + \bar{\mathbf{B}}^{i}\mathbf{v}_{k}|^{i} && (41) \end{aligned}$$

com

$$\bar{\mathbf{A}}^{i} = \mathbf{A}^{i} + \mathbf{G}^{i}\mathbf{C}^{i} \tag{42}$$

$$\bar{\mathbf{B}}^{i} = \mathbf{B}^{i} + \mathbf{G}^{i}\mathbf{D}^{i} \tag{43}$$

$$\mathbf{v}_{k}|^{i} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{k} \\ \mathbf{y}_{k}|^{i} \end{bmatrix} \tag{44}$$

onde $\mathbf{G}^{i} \in \Re^{n\times q}$ é o ganho do observador do modelo linear local da i-ésima regra.

Resolvendo a equação (41) para $j = 0, 1, \ldots, k$ e $\mathbf{x}_{0}|^{i} = 0$, obtém-se:

$$\mathbf{x}_{k}|^{i} = \sum_{j=1}^{k} \left(\bar{\mathbf{A}}^{i}\right)^{j-1} \bar{\mathbf{B}}^{i}\mathbf{v}_{k-j}|^{i} \tag{45}$$

Substituindo-se (45) no termo da saída de (14), tem-se:

$$\mathbf{y}_{k}|^{i} = \sum_{j=1}^{k} \mathbf{C}^{i} \left(\bar{\mathbf{A}}^{i}\right)^{j-1} \bar{\mathbf{B}}^{i}\mathbf{v}_{k-j}|^{i} + \mathbf{D}^{i}\mathbf{u}_{k} \tag{46}$$

Devido a presença do observador de estados, é valido considerar $\left(\bar{\mathbf{A}}^{i}\right)^{t} \approx 0$. Portanto, a equação (46) pode ser reescrita como:

$$\mathbf{y}_{k}|^{i} = \sum_{j=1}^{t} \bar{\mathbf{M}}_{j}^{i}\mathbf{v}_{k-1}|^{i} + \mathbf{D}^{i}\mathbf{u}_{k} \tag{47}$$

onde $\bar{\mathbf{M}}_{j}^{i} = \mathbf{C}^{i}\left(\bar{\mathbf{A}}^{i}\right)^{j-1}\bar{\mathbf{B}}^{i}$ é o j-ésimo parametro de Markov do observador do i-ésimo modelo local.

A equação (47) possui a seguinte representação matricial:

$$\mathbf{y}_{k}|^{i} = \boldsymbol{\theta}_{k}^{i}\boldsymbol{\phi}_{k}^{i} \tag{48}$$

onde $\boldsymbol{\theta}_{k}^{i} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{k}^{i} & \bar{\mathbf{M}}_{k_1}^{i} & \ldots & \bar{\mathbf{M}}_{k_p}^{i} \end{bmatrix}$, o sub-índice k indica que $\boldsymbol{\theta}_{k}^{i}$ é estimada utilizando os dados obtidos até o k-ésimo instante de tempo, e $\boldsymbol{\phi}_{k}^{i} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{k}^{T} & (\mathbf{v}_{k-1}|^{i})^{T} & \ldots & (\mathbf{v}_{k-p}|^{i})^{T} \end{bmatrix}^{T}$.

Considerando a equação (48) para $k > p$, que possui em batelada, a seguinte representação matricial:

$$\mathbf{Y}_k|^i = \boldsymbol{\theta}_k^i \boldsymbol{\Phi}_k^i \tag{49}$$

onde $\mathbf{Y}_k|^i = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{p+1}|^i & \mathbf{y}_{p+2}|^i & \cdots & \mathbf{y}_k|^i \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{\Phi}_k = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\phi}_{p+1}^i & \boldsymbol{\phi}_{p+2}^i & \cdots & \boldsymbol{\phi}_k^i \end{bmatrix}$.

A partir da equação (4), a saída do modelo nebuloso TS, é dada por:

$$\tilde{\mathbf{Y}}_k = \sum_{i=1}^{L} \boldsymbol{\theta}_k^i \boldsymbol{\Phi}_k^i \Gamma_k^i \tag{50}$$

onde

$$\Gamma_k^i = \begin{bmatrix} \gamma^i(\mathbf{z}_{p+1}) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \gamma^i(\mathbf{z}_{p+2}) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \gamma^i(\mathbf{z}_k) \end{bmatrix} \tag{51}$$

é a matriz de ponderação nebulosa, com o grau de ativação normalizado como em (3).

De modo a garantir a interpretabilidade dos modelos nebulosos obtidos, a abordagem local é utilizada para a solução do problema de mínimos quadrados, como segue:

$$\boldsymbol{\theta}_k^i = \tilde{\mathbf{Y}}_k \Gamma_k^i \left(\boldsymbol{\Phi}_k^i\right)^T \left[\boldsymbol{\Phi}_k^i \Gamma_k^i \left(\boldsymbol{\Phi}_k^i\right)^T\right]^{-1} \tag{52}$$

onde $\tilde{\mathbf{Y}}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{p+1} & \mathbf{y}_{p+2} & \cdots & \mathbf{y}_k \end{bmatrix}$ é o vetor de saída.

Adicionando-se os termos $\mathbf{u}_{k+1}$ e $\mathbf{y}_{k+1}$ em (52), obtemos:

$$\boldsymbol{\theta}_{k+1}^i = \tilde{\mathbf{Y}}_{k+1} \Gamma_{k+1}^i \left(\boldsymbol{\Phi}_{k+1}^i\right)^T \left[\boldsymbol{\Phi}_{k+1}^i \Gamma_{k+1}^i \left(\boldsymbol{\Phi}_{k+1}^i\right)^T\right]^{-1} \tag{53}$$

onde $\tilde{\mathbf{Y}}_{k+1} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{Y}}_k & \mathbf{y}_{k+1} \end{bmatrix}$ e $\boldsymbol{\Phi}_{k+1}^i = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Phi}_k^i & \boldsymbol{\phi}_{k+1}^i \end{bmatrix}$.

Estimando-se $\boldsymbol{\theta}_k^i$ de acordo com (53) requer a inversão de uma matriz de dimensão elevada, que pode induzir a erros números e uma complexidade computacional elevada (Wu et al., 2015). De modo a evitar esse problema, a solução para a equação (53) pode ser desenvolvida recursivamente. A matriz de covariância, é dada por:

$$\mathbf{P}_{k+1}^i = \left[\boldsymbol{\Phi}_{k+1}^i \Gamma_{k+1}^i \left(\boldsymbol{\Phi}_{k+1}^i\right)^T\right]^{-1} \tag{54}$$

$$\mathbf{P}_{k+1}^i = \left[\boldsymbol{\Phi}_k^i \Gamma_k^i \left(\boldsymbol{\Phi}_k^i\right)^T + \boldsymbol{\phi}_{k+1}^i \gamma^i(z_{k+1}) \left(\boldsymbol{\phi}_{k+1}^i\right)^T\right]^{-1} \tag{55}$$

Utilizando-se o lema da matriz inversa, a equação (55) pode ser reescrita como:

$$\mathbf{P}_{k+1}^i = \mathbf{P}_k^i \left[\mathbf{I} - \frac{\boldsymbol{\phi}_{k+1}^i \left(\boldsymbol{\phi}_{k+1}^i\right)^T \mathbf{P}_k^i}{\left(\gamma^i(z_{k+1})\right)^{-1} + \left(\boldsymbol{\phi}_{k+1}^i\right)^T \mathbf{P}_k^i \boldsymbol{\phi}_{k+1}^i}\right] \tag{56}$$

Substituindo-se (56) em (53), tem-se:

$$\boldsymbol{\theta}_{k+1}^i = \boldsymbol{\theta}_k^i + \left[\mathbf{y}_{k+1} - \boldsymbol{\theta}_k^i \boldsymbol{\phi}_{k+1}^i\right] \times \\ \times \frac{\left(\boldsymbol{\phi}_{k+1}^i\right)^T \mathbf{P}_k^i}{\left(\gamma^i(z_{k+1})\right)^{-1} + \left(\boldsymbol{\phi}_{k+1}^i\right)^T \mathbf{P}_k^i \boldsymbol{\phi}_{k+1}^i} \tag{57}$$

Portanto, a partir das equações (56) e (57), os parâmetros de Markov do observador pode ser obtido recursivamente como segue, como segue:

$$\mathbf{G}_k^i = \frac{\left(\boldsymbol{\phi}_{k+1}^i\right)^T \mathbf{P}_k^i}{\left(\gamma^i(\mathbf{z}_{k+1})\right)^{-1} + \left(\boldsymbol{\phi}_{k+1}^i\right)^T \mathbf{P}_k^i \boldsymbol{\phi}_{k+1}} \tag{58}$$

$$\boldsymbol{\theta}_{k+1}^i = \boldsymbol{\theta}_k^i + \left[\mathbf{y}_{k+1} - \boldsymbol{\theta}_k^i \boldsymbol{\phi}_{k+1}^i\right] \mathbf{G}_k^i \tag{59}$$

$$\mathbf{P}_{k+1}^i = \mathbf{P}_k^i \left[\mathbf{I} - \boldsymbol{\phi}_{k+1}^i \mathbf{G}_k^i\right] \tag{60}$$

Para construir a matriz de Hankel (23) é necessário a obtenção dos parâmetros de Markov nebulosos do sistema a partir dos parâmetros de Markov do observador encontrados. Os parâmetros de Markov do observador $\bar{\mathbf{M}}_j^i$, são definidos como:

$$\bar{\mathbf{M}}_j^i = \mathbf{C}^i \left(\bar{\mathbf{A}}^i\right)^{j-1} \bar{\mathbf{B}}^i \tag{61}$$

$$\triangleq \left[\bar{\mathbf{M}}_j^{i1},\ -\bar{\mathbf{M}}_j^{i2}\right] \tag{62}$$

Deste modo, os parâmetros de Markov nebulosos do sistema podem ser obtidos resolvendo as seguintes equações, para a i-ésima regra nebulosa, como segue:

$$\mathbf{M}_0^i = \mathbf{D}^i \tag{63}$$

$$\mathbf{M}_j^i = \bar{\mathbf{M}}_j^{i1} - \sum_{k=1}^{j} \bar{\mathbf{M}}_k^{i2} \mathbf{M}_{j-k}^i,\ for\ j = 1, 2, \cdots, p \tag{64}$$

$$\mathbf{M}_j^i = -\sum_{k=1}^{p} \bar{\mathbf{M}}_k^{i2} \mathbf{M}_{j-k}^i,\ for\ j > p \tag{65}$$

3 Resultados Experimentais

Para validar a aplicabilidade da metodologia na solução de problemas reais de alta complexidade, é proposta a utilização do modelo nebuloso evolutivo no espaço de estados para a previsão da trajetória de um foguete.

O foguete utilizado para a obtenção dos dados é o FTI (foguete de treinamento intermediário), ilustrado na Fig. 3, que é um veículo de treinamento destinado a proporcionar treinamento operacional, de forma isolada, sem participação de estação remota. O foguete é instrumentado com telemetria banda S, transponder radar banda C, terminação de voo e apogeu superior a 60 km. Utiliza propelente sólido, é lançado a partir de trilhos e é estabilizado aerodinamicamente por quatro empenas retas fixas. O veículo é composto de: motor-foguete, terminação de voo e carga-útil.

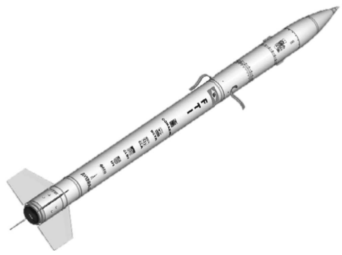

Figura 1: Foguete de treinamento intermediário utilizado para a estimação da trajetória.

O foguete foi modelado como um sistema não linear possuindo três entradas e três saídas. Como o objetivo é a previsão um passo a frente da trajetória do foguete, as entradas utilizadas são o ângulo de elevação y^1_{k-1} em graus, ângulo de azimute y^2_{k-1} em graus, e a distância y^3_{k-1} em km atrasados em uma amostra. As saídas utilizadas são o ângulo de elevação y^1_k em graus, ângulo de azimute y^2_k em graus, e a distância y^3_k em km. O conjunto de dados do lançamento consiste de 4080 amostras com período de amostragem de $50ms$. Desse total, 3891 amostras rotuladas como válidas pelo sistema de aquisição de dados foram utilizadas para a estimação da trajetória.

A regra generalizada para o modelo nebuloso é dada por

$$R^i: \ \textbf{SE}\ \mathbf{z}_k = [\mathbf{y}_{k-1}] \ \sim \ \mathbf{z}^{i*} = [\mathbf{y}^{(i*)}_{k-1}] \\ \textbf{ENTAO} \begin{cases} \mathbf{x}_{k+1}|^i = \mathbf{A}^i\mathbf{x}_k|^i + \mathbf{B}^i\mathbf{y}_k|^i \\ \mathbf{y}_k|^i = \mathbf{C}^i\mathbf{x}_k|^i + \mathbf{D}^i\mathbf{y}_{k-1}|^i \end{cases} \tag{66}$$

Para a implementação da metodologia proposta foram considerados os seguintes parâmetros: $p = 18$ (número de parâmetros de Markov independentes), $\alpha = 100$ (número de linhas da matriz de Hankel), $\beta = 200$ (número de colunas da matriz de Hankel), $\epsilon = 0.3$ (limiar de sobreposição), $\eta = 0.3$ (limiar da utilidade), onde um conjunto de 500 é utilizado para a estimação inicial do modelo.

O número de regras no modelo nebuloso evolutivo, é mostrada na Fig. 3. Depois das 500 amostras iniciais o modelo possui 10 regras; durante o processo evolutivo, o número de regras é de 11 na amostra 1188; o número de regras é 10 na amostra 2378; na amostra 3213 uma regra é criada então o número final de regras é 11.

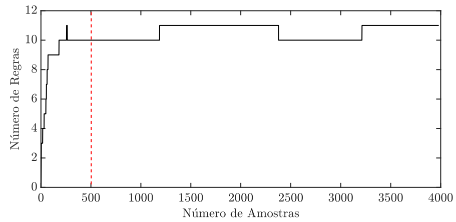

Figura 2: Variação do número de regras durante a estimação da trajetória do foguete FTI.

A evolução dos parâmetros do consequente para cada regra, ilustrados pela atualização recursiva dos elementos da diagonal principal da matriz $\mathbf{A}^i$, é mostrado nas Figs. 3-13.

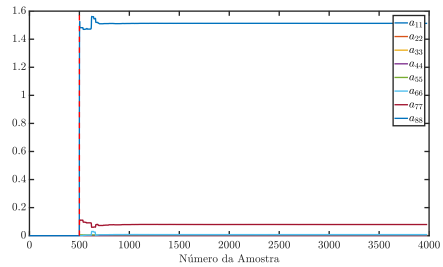

Figura 3: Estimação recursiva dos elementos da diagonal principal $\mathbf{A}^1$ para a regra 1 durante o processo de identificação do foguete.

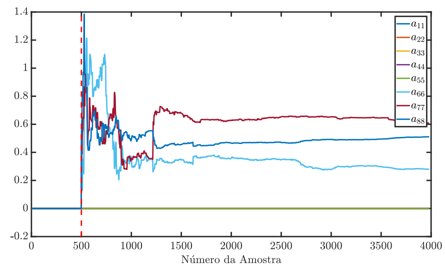

Figura 4: Estimação recursiva dos elementos da diagonal principal $\mathbf{A}^2$ para a regra 2 durante o processo de identificação do foguete.

Uma comparação entre a trajetória estimada e a trajetória real do foguete é mostrada nas Figs. 14-16. A metodologia proposta obteve VAF = 99,95% para o ângulo de elevação, VAF = 99,98% para o ângulo de azimute, e VAF = 99,95% para a distância.

4 Considerações Finais

Neste trabalho, uma metodologia nebulosa evolutiva para a identificação de sistemas não-lineares foi proposta. O modelo evolutivo obtido é capaz

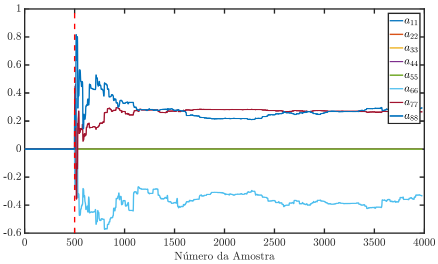

Figura 5: Estimação recursiva dos elementos da diagonal principal $\mathbf{A}^3$ para a regra 3 durante o processo de identificação do foguete.

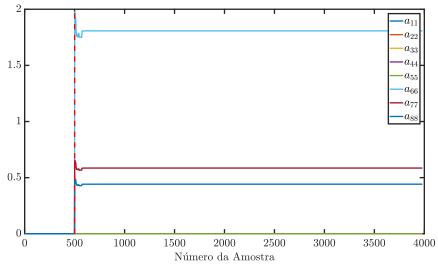

Figura 6: Estimação recursiva dos elementos da diagonal principal $\mathbf{A}^4$ para a regra 4 durante o processo de identificação do foguete.

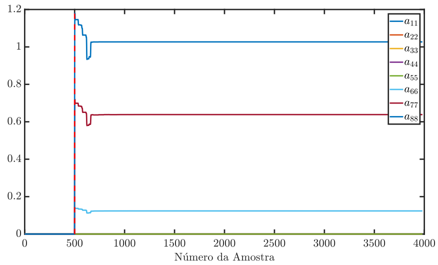

Figura 7: Estimação recursiva dos elementos da diagonal principal $\mathbf{A}^5$ para a regra 5 durante o processo de identificação do foguete.

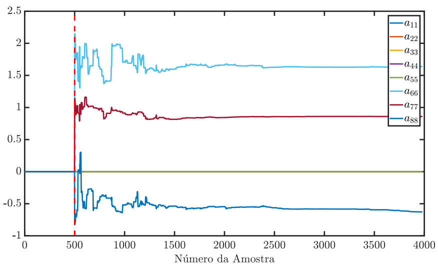

Figura 8: Estimação recursiva dos elementos da diagonal principal $\mathbf{A}^6$ para a regra 6 durante o processo de identificação do foguete.

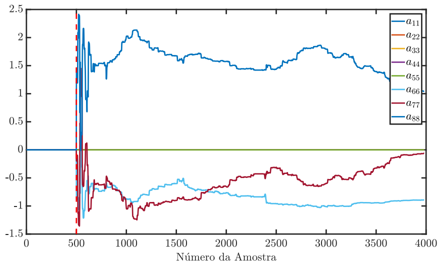

Figura 9: Estimação recursiva dos elementos da diagonal principal $\mathbf{A}^7$ para a regra 7 durante o processo de identificação do foguete.

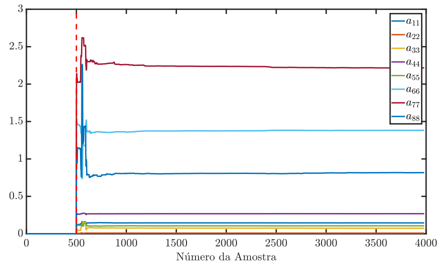

Figura 10: Estimação recursiva dos elementos da diagonal principal $\mathbf{A}^8$ para a regra 8 durante o processo de identificação do foguete.

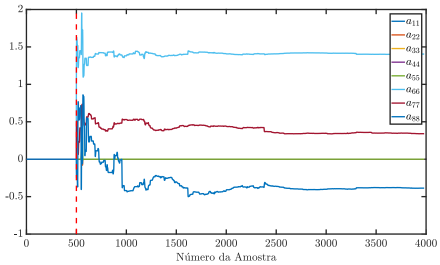

Figura 11: Estimação recursiva dos elementos da diagonal principal $\mathbf{A}^9$ para a regra 9 durante o processo de identificação do foguete.

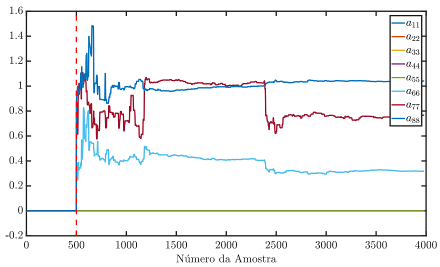

Figura 12: Estimação recursiva dos elementos da diagonal principal $\mathbf{A}^{10}$ para a regra 10 durante o processo de identificação do foguete.

de alterar sua estrutura de maneira autônoma de acordo com o fluxo de dados, i.e., a metodologia proposta permite a eficiência do modelo nebuloso evolutivo no rastreio das incertezas inerentes a dados experimentais. O Além disso, a realização mínima dos submodelos do consequente das regras garante a simplicidade do modelo obtido. O algoritmo proposto foi desenvolvido para lidar com os dados que chegam a cada instante, ou seja, realizar seu processamento de forma *online*. Os resul-

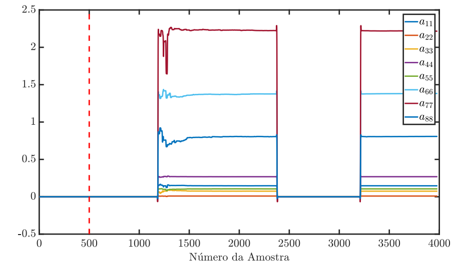

Figura 13: Estimação recursiva dos elementos da diagonal principal $\mathbf{A}^{11}$ para a regra 11 durante o processo de identificação do foguete.

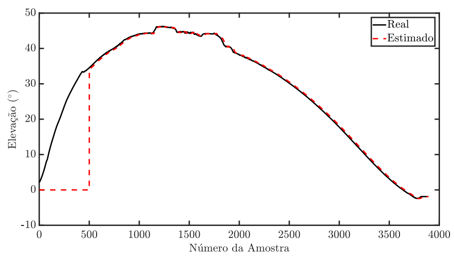

Figura 14: Ângulo de elevação real e estimado para o foguete.

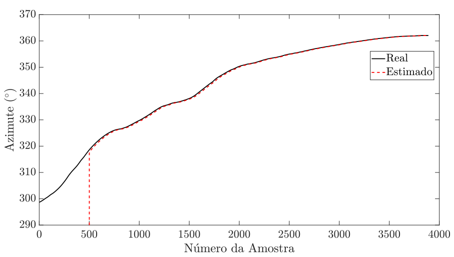

Figura 15: Ângulo de azimute real e estimado para o foguete.

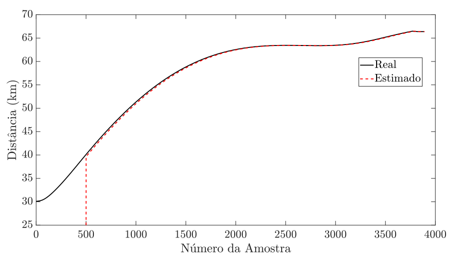

Figura 16: Distância real e estimada para o foguete.

tados obtidos na predição da trajetória do foguete de treinamento demonstram a aplicabilidade da metodologia proposta em sistemas complexos.

Como trabalho futuro é proposta uma analise comparativa do custo computacional da metodologia proposta em relação a outras técnicas existentes na literatura.

Agradecimentos

Os autores agradecem ao Instituto Federal do Maranhão e ao CNPq pelo apoio à pesquisa.

Referências

Angelov, P. (2013). *Autonomous learning systems: from data streams to knowledge in real-time*, John Wiley & Sons.

Angelov, P. and Kordon, A. (2010). Adaptive inferential sensors based on evolving fuzzy models, *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B (Cybernetics)* **40**(2): 529–539.

Fu, L. and Li, P. (2013). The research survey of system identification method, *2013 5th International Conference on Intelligent Human-Machine Systems and Cybernetics*, Vol. 2, pp. 397–401.

Kohonen, T. (1998). The self-organizing map, *Neurocomputing* **21**(1): 1–6.

Maciel, L., Ballini, R. and Gomide, F. (2017). Evolving possibilistic fuzzy modeling for realized volatility forecasting with jumps, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* **25**(2): 302–314.

Rotondo, D., Puig, V., Nejjari, F. and Witczak, M. (2015). Automated generation and comparison of takagi-sugeno and polytopic quasi-lpv models, *Fuzzy Sets and Systems* **277**: 44 – 64.

Sa'ad, H. H. Y., Isa, N. A. M., Ahmed, M. M. and Sa'd, A. H. Y. (2018). A robust structure identification method for evolving fuzzy system, *Expert Systems with Applications* **93**(Supplement C): 267 – 282.

Salgado, C. M., Viegas, J. L., Azevedo, C. S., Ferreira, M. C., Vieira, S. M. and d. C. Sousa, J. M. (2017). Takagi-sugeno fuzzy modeling using mixed fuzzy clustering, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* **PP**(99): 1–1.

Tan, J., Dian, S. and Zhao, T. (2018). Further studies on stability and stabilization of t-s fuzzy systems with time-varying delays via fuzzy lyapunov-krasovskii functional method, *Asian Journal of Control* .

Wu, C.-Y., Tsai, J.-H., Guo, S.-M., Shieh, L.-S., Canelon, J., Ebrahimzadeh, F. and Wang, L. (2015). A novel on-line observer/kalman filter identification method and its application to input-constrained active fault-tolerant tracker design for unknown stochastic systems, *Journal of the Franklin Institute* **352**(3): 1119 – 1151.