

ESTABILIZAÇÃO DE SISTEMAS DE FASE NÃO-MÍNIMA ATRAVÉS DE CONTROLE POR MODOS DESLIZANTES E MÚLTIPLOS OBSERVADORES

ROBERTO SANTOS*, TIAGO ROUX OLIVEIRA*

**Departamento de Engenharia Eletrônica e Telecomunicações
Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ)
Rio de Janeiro, RJ 20550-900, Brasil*

Emails: roberto.silveira@petrobras.com.br, tiagoroux@uerj.br

Abstract— A new control strategy using only output feedback for the stabilization of uncertain non-minimum phase systems is presented in this paper. Multiple observers for the unmeasured states of plant, the output signal and unknown disturbances have served as the basis for the design of a sliding mode control law robust to parametric uncertainties and exogenous perturbations. Global asymptotic stability is demonstrated for the closed-loop system. Simulation results illustrate the performance of the proposed control algorithm.

Keywords— Non-minimum Phase Systems, Sliding Mode Control, High-gain Observers, Reduced Order Observers, Unknown Input Observers.

Resumo— Uma nova estratégia de controle utilizando apenas realimentação de saída para a estabilização de sistemas incertos de fase não-mínima é apresentada neste artigo. Múltiplos observadores para os estados não-medidos da planta, para o sinal de saída e perturbações desconhecidas serviram de base para o projeto de uma lei de controle por modos deslizantes robusta a incertezas paramétricas e distúrbios externos. A estabilidade global e assintótica é demonstrada para o sistema em malha fechada. Resultados de simulação ilustram o desempenho do algoritmo de controle proposto.

Palavras-chave— Sistemas de Fase Não-Mínima, Controle por Modos Deslizantes, Observadores de Alto Ganho, Observadores de Ordem Reduzida, Observadores para Entradas Desconhecidas.

1 Introdução

O problema de regulação/rastreamento de sistemas de fase não-mínima já foi abordado anteriormente por diversos autores - veja (Isidori, 2013). Em um contexto geral de sistemas não-lineares, a condição de fase não-mínima pode ser caracterizada matematicamente através do conceito das dinâmicas dos zeros como um análogo não-linear da transmissão dos zeros “instáveis” da função de transferência de um sistema linear (Isidori, 2013). Basicamente, o desafio principal nos problemas de fase não-mínima é projetar uma lei de controle que atinja os objetivos de regulação/rastreamento enquanto que as dinâmicas dos zeros devem ser estabilizadas simultaneamente, evitando assim que os estados internos alcancem valores ilimitados.

Vários trabalhos propuseram estratégias de controle para sistemas de fase não-mínima, como: a redefinição da saída para obter novas (e estáveis) dinâmicas dos zeros (Gopalswamy and Hedrick, 1993), (Marino and Tomei, 2005); a modificação da saída do sistema de acordo com o paradigma da compensação paralela (*feedforward*) (Kaufman et al., 1994); o método de “*system center*” para projetar um gerador para os perfis das referências dos estados que estabilizem as dinâmicas dos zeros (Shkolnikov and Shtessel, 2001), (Baev et al., 2008); restrição de ganho do controlador em sistemas dissipativos (Priscoli et al., 2009); o uso de observadores de alto ganho para estimação dos estados externos (derivadas do sinal de saída) (Nazrulla and Khalil, 2011); métodos ba-

seados em dados (*data-driven*) para um modelo de referência virtual (Silva et al., 2018), citando alguns exemplos.

Entretanto, estes trabalhos assumem condições restritivas, e.g., realimentação de estados (parcial ou completa) em vez de apenas realimentação de saída, ou o total conhecimento das dinâmicas do sistema. Estratégias de controle que admitem incertezas paramétricas e/ou o relaxamento da hipótese de medição completa dos estados geralmente estão sob a condição da planta ser de fase mínima (Rupp et al., 2017), (Rinaldi et al., 2017), (Chowdhury and Khalil, 2017), (Yang et al., 2018). A princípio a eliminação desta condição permanece um problema em aberto. Considerando-se apenas um conhecimento parcial das dinâmicas da planta, mostraremos ser possível a estabilização de sistemas de fase não-mínima via realimentação de saída através de observadores. Assim, este é o objetivo principal deste trabalho, uma vez que a condição de fase não-mínima concomitante com incertezas paramétricas causam grande dificuldade no projeto do controlador.

Para atingir este objetivo, foram desenvolvidos neste trabalho 3 estimadores (vide Figura 1):

- um observador de ordem reduzida, cuja tarefa é estimar o valor dos estados não-medidos da dinâmica interna da planta;
- um estimador das incertezas paramétricas e perturbações (entrada desconhecida);
- um observador de alto ganho para a saída me-

dida da planta, ferramenta necessária para a implementação do estimador acima.

Através deste esquema de múltiplos observadores, iremos projetar uma lei de controle baseada em modos deslizantes que garanta estabilidade global e assintótica para a planta, mesmo que esta seja de fase não-mínima e admita incertezas paramétricas na dinâmica externa, utilizando apenas realimentação de saída. A estratégia de controle desenvolvida é testada através de simulações numéricas a partir de exemplos acadêmicos.

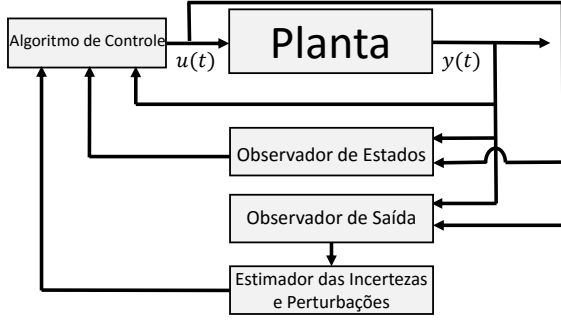


Figura 1: Diagrama de blocos representando a realimentação de saída com esquema de múltiplos observadores.

1.1 Notações e Definições

Ao longo deste trabalho, a norma Euclidiana de um vetor x e a correspondente norma induzida de uma matriz A são denotadas por $\|x\|$ e $\|A\|$, respectivamente.

2 Estabilização com parâmetros conhecidos

Considere o seguinte sistema com grau relativo $n^* = 1$

$$\dot{x} = Ax + B[u + d(t)] \quad (1)$$

$$y = Cx, \quad (2)$$

onde $u \in \mathbb{R}$ é o sinal de controle, $d(t)$ é uma perturbação não medida da planta, $x \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estados e $y \in \mathbb{R}$ é a saída medida do sistema (1) – (2). As matrizes $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^n$, $C \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ são conhecidas.

Este sistema pode ser reescrito na Forma Normal (Khalil, 2002) aplicando-se uma transformação T , descrita por

$$\begin{bmatrix} \eta \\ y \end{bmatrix} = Tx, \quad (3)$$

com $\eta \in \mathbb{R}^{n-1}$. Assim, o sistema (1)–(2) pode ser representado por

$$\dot{\eta} = A_0\eta + B_0y \quad (4)$$

$$\dot{y} = A_1\eta + B_1y + k_p[u + d(t)], \quad (5)$$

onde matrizes $A_0 \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}$, $A_1 \in \mathbb{R}^{(n-1) \times 1}$, $B_0 \in \mathbb{R}^{(n-1) \times 1}$ e $B_1 \in \mathbb{R}^{1 \times 1}$ são conhecidas. O parâmetro k_p representa o ganho de alta frequência da planta, e também é conhecido.

A representação na forma normal decompõe o sistema através de uma dinâmica interna (η) e uma dinâmica externa (y). Fazendo $y = 0$ em (4), segue que

$$\dot{\eta} = A_0\eta, \quad (6)$$

onde esta equação é chamada de *dinâmica dos zeros* e os autovalores da matriz A_0 são os zeros da matriz de transferência da planta (1)–(2).

Abaixo, seguem as hipóteses (H1) e (H2), relativas ao sistema (4)–(5):

(H1) (*Sobre a fase não-mínima*): A matriz A_0 em (4) não é Hurwitz.

(H2) (*Sobre a perturbação*): A perturbação $d(t)$ é uniformemente limitada.

O sinal de controle u deverá ser projetado de maneira que a planta seja estabilizada, ou seja:

$$Tx(t) = \begin{bmatrix} \eta(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \rightarrow 0, \quad (7)$$

com $t \rightarrow \infty$.

2.1 Projeto da lei de controle u

Primeiramente, uma variável de controle auxiliar s é definida como (Gonzalez et al., 2012)

$$s := y - K\eta, \quad (8)$$

com $K \in \mathbb{R}^{1 \times (n-1)}$. Consequentemente, temos que sua derivada temporal é dada por

$$\dot{s} = A_1\eta + B_1y + k_p[u + d(t)] - K A_0\eta - K B_0y. \quad (9)$$

Em seguida, se a lei de controle por modos deslizantes u for projetada como (Utkin et al., 1999)

$$u = -\text{sgn}(k_p)\rho \text{sgn}(s), \quad (10)$$

onde ρ é uma função de modulação definida como

$$\rho \geq \frac{1}{k_{min}} [\|A_1\| \|\eta\| + \|B_1\| |y| + \|K A_0\| \|\eta\| + \|K B_0\| |y|] + |d(t)| + c, \quad (11)$$

com $k_{min} \in (0, |k_p|]$ e $c > 0$ uma constante pequena arbitrária, temos que $s \rightarrow 0$ em tempo finito e consequentemente $y \rightarrow K\eta$. Assim, podemos reescrever (4) como

$$\dot{\eta} = A_0\eta + B_0K\eta = (A_0 + B_0K)\eta. \quad (12)$$

Então, se K for projetado de modo que $(A_0 + B_0K)$ seja Hurwitz, $\eta \rightarrow 0$ exponencialmente e portanto $y \rightarrow 0$.

3 Estabilização com Parâmetros Desconhecidos e Estados não Mensuráveis

Neste trabalho, consideramos que η em (4)–(5) não pode ser medido. Além disto, a partir deste ponto, iremos considerar também que a planta possui incertezas paramétricas e perturbações (não medidas). Assim, torna-se necessário a estimação destas incertezas por meio de algoritmos observadores para que a lei de controle proposta em (10) e (11) possa ser aplicada. A partir destes algoritmos observadores, detalhados nas seções a seguir, podemos implementar a lei de controle proposta para a solução do problema apresentado neste trabalho.

3.1 Estimação das Incertezas Paramétricas e Perturbações Externas

Seja a planta

$$\dot{\eta} = A_0\eta + B_0y \quad (13)$$

$$\dot{y} = A_1\eta + B_1y + k_p[u + d(t)]. \quad (14)$$

Diferentemente de (5), a partir deste ponto temos que $A_1 = \bar{A}_1 + \Delta_{A_1}$ e $B_1 = \bar{B}_1 + \Delta_{B_1}$, onde as matrizes $\bar{A}_1$ e $\bar{B}_1$ são conhecidas e Δ_{A_1} e Δ_{B_1} representam incertezas em torno destes parâmetros. Assim, a saída (14) pode ser reescrita como

$$\dot{y} = \bar{A}_1\eta + \bar{B}_1y + k_p[u + \delta(\eta, y, t)] \quad (15)$$

onde a variável

$$\delta(\eta, y, t) = d(t) + \frac{\Delta_{A_1}\eta + \Delta_{B_1}y}{k_p} \quad (16)$$

representa as incertezas paramétricas da planta e perturbações externas.

(H3) (*Sobre as incertezas paramétricas*): Todos os parâmetros incertos em (14) pertencem a um conjunto compacto Ω .

Para a estimação de $\delta(\eta, y, t)$, primeiramente iremos projetar um observador de alto ganho para a saída y , descrito por

$$\dot{\hat{y}} = \bar{A}_1\hat{\eta} + \bar{B}_1y + k_p u - \frac{1}{\varepsilon}(\hat{y} - y) \quad (17)$$

Em seguida, definindo-se uma variável auxiliar l como

$$l := \frac{\hat{y} - y}{\varepsilon}, \quad (18)$$

segue que

$$\begin{aligned} \varepsilon \dot{l} &= \dot{\hat{y}} - \dot{y} \\ &= \bar{A}_1\hat{\eta} + \bar{B}_1y + k_p u - \frac{1}{\varepsilon}(\hat{y} - y) \\ &\quad - \bar{A}_1\eta - \bar{B}_1y - k_p u - k_p\delta(\eta, y, t) \\ &= \bar{A}_1\tilde{\eta} - k_p\delta(\eta, y, t) - l. \end{aligned} \quad (19)$$

Assim, admitindo-se que o ganho K , discutido na seção 2.1 foi projetado corretamente, temos que $\tilde{\eta} \rightarrow 0$ exponencialmente e, sendo ε uma constante arbitrária pequena, de forma que $\varepsilon \rightarrow 0^+$, então podemos estimar δ como (Chakraborty and Arca, 2009):

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \delta(\eta, y, t) = \frac{-l(t)}{k_p} \quad (\text{caso singular } \varepsilon \rightarrow 0^+), \quad (20)$$

tal que, $\forall \varepsilon \neq 0$:

$$|k_p\delta(\eta, y, t)| \leq |l(t)| + \pi_0(t) + \mathcal{O}(\varepsilon), \quad (21)$$

onde o termo $\pi_0(t)$ denota um termo exponencialmente decrescente devido as condições iniciais do filtro (19).

Uma característica indesejada dos observadores de alto ganho é a presença do fenômeno de *peaking* (Khalil, 2002), que consiste na presença de um sinal similar a um impulso em $t = 0$ na estimativa de δ (e consequentemente no sinal de controle u se esta estimativa for utilizada na função de modulação ρ). Porém como a saída y pode ser medida (de fato a saída só é observada a fim de se obter uma estimativa para δ), pode-se definir como valor inicial de $\hat{y}$ o mesmo valor inicial de y , ou seja, $\hat{y}_0 = y_0$. Esta inicialização elimina os efeitos do *peaking* na estimação de δ (Sussmann and Kokotović, 1991).

3.2 Observador de Ordem Reduzida para os Estados da Dinâmica Interna

Considere a seguinte sistema:

$$\dot{\bar{x}} = \bar{A}\bar{x} + \bar{B}\bar{u} \quad (22)$$

$$\bar{y} = \bar{C}\bar{x}, \quad (23)$$

com $\bar{x} = \eta$, $\bar{A} = A_0$, $\bar{B}\bar{u} = B_0y$, $\bar{y} = \bar{A}_1\eta = \dot{y} - \bar{B}_1y - k_p[u + \delta(\eta, y, t)]$ e $\bar{C} = \bar{A}_1$.

De acordo com (Chen, 1999), podemos desenvolver um observador tal que

$$\dot{\hat{\bar{x}}} = \bar{A}\hat{\bar{x}} + \bar{B}\bar{u} + L(\bar{y} - \hat{\bar{y}}) \quad (24)$$

$$\hat{\bar{y}} = \bar{C}\hat{\bar{x}} \quad (25)$$

e consequentemente

$$\dot{\hat{\eta}} = A_0\hat{\eta} + B_0y + L(\bar{y} - \bar{A}_1\hat{\eta}) \quad (26)$$

$$\hat{\hat{y}} = \bar{A}_1\hat{\eta}. \quad (27)$$

Sendo o erro de observação do estado η dado por $\tilde{\eta} = \eta - \hat{\eta}$, segue que

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\eta}} &= \dot{\eta} - \dot{\hat{\eta}} \\ \dot{\tilde{\eta}} &= A_0\eta + B_0y - A_0\hat{\eta} - B_0y - L(\bar{y} - \bar{A}_1\hat{\eta}) \\ \dot{\tilde{\eta}} &= A_0(\eta - \hat{\eta}) - L\bar{A}_1(\eta - \hat{\eta}) \\ \dot{\tilde{\eta}} &= (A_0 - L\bar{A}_1)\tilde{\eta}. \end{aligned} \quad (28)$$

Assim, se o ganho L for projetado de maneira que a matriz $(A_0 - L\bar{A}_1)$ seja Hurwitz, então

$$\tilde{\eta} \rightarrow 0. \quad (29)$$

Embora foi mostrado que o observador (26)–(27) converge exponencialmente, este não é implementável diretamente, pois $\bar{y} = \bar{A}_1\eta$ depende do próprio estado η não medido. Para solucionar este problema, define-se uma variável auxiliar $Z := \hat{\eta} - Ly$, tal que

$$\begin{aligned} \dot{Z} &= A_0\hat{\eta} + B_0y + L\bar{y} - L\bar{A}_1\hat{\eta} - L\dot{y} \\ \dot{Z} &= A_0\hat{\eta} + B_0y + L\dot{y} - L\bar{B}_1y - L\bar{A}_1\hat{\eta} \\ &\quad - L\dot{y} - Lk_p[u + \delta(\eta, y, t)] \\ \dot{Z} &= A_0\hat{\eta} + B_0y - L\bar{B}_1y - L\bar{A}_1\hat{\eta} \\ &\quad - Lk_p[u + \delta(\eta, y, t)]. \end{aligned} \quad (30)$$

A partir de (21), substitui-se a dependência do termo $\delta(\eta, y, t)$ em (30) por l em (17)–(18) tal que:

$$\begin{aligned} \dot{Z} &= (A_0 - L\bar{A}_1)\hat{\eta} + (B_0 - L\bar{B}_1)y \\ &\quad - Lk_p u + L l. \end{aligned} \quad (31)$$

Desta forma, um observador de ordem reduzida pode ser implementado como

$$\hat{\eta} = Z + Ly. \quad (32)$$

3.3 Aplicação das Variáveis Estimadas na Lei de Controle

A partir dos estimadores apresentados acima, podemos reprojeter as equações que definem a lei de controle u considerando as variáveis observadas. Logo, (8) pode ser reescrita como

$$s = y - K\hat{\eta} \quad (33)$$

e consequentemente, considerando-se também que as incertezas em relação aos parâmetros $\bar{A}_1$ e $\bar{B}_1$ e que a perturbação $d(t)$ estão incorporadas no termo $\delta(\eta, y, t)$, segue que

$$\dot{s} = \bar{A}_1\eta + \bar{B}_1y + k_p[u + \delta] - KA_0\hat{\eta} - KB_0y. \quad (34)$$

Assim, a função de modulação ρ em (11) deve ser redefinida como

$$\begin{aligned} \rho &\geq \frac{1}{k_{min}} [\|\bar{A}_1\| \|\hat{\eta}\| + \|\bar{B}_1\| |y| + \|KA_0\| \|\hat{\eta}\| \\ &\quad + \|KB_0\| |y| + |l|] + c, \end{aligned} \quad (35)$$

com $k_{min} \in (0, |k_p|]$ e $c > 0$ uma constante pequena arbitrária.

3.4 Análise de Estabilidade

O teorema a seguir apresenta uma possível implementação da função de modulação tal que (35) seja verificada e o controlador por modos deslizantes através de múltiplos observadores e realimentação de saída proposto faça com que a saída y e os estados η sejam estabilizados em tempo finito.

Teorema 1: Considere o sistema em sua representação na forma normal (13)–(14), a equação dinâmica da variável auxiliar s (34), a lei de controle (10), o observador de ordem reduzida em (31) e (32), o observador de alto ganho (17) e o estimador para as incertezas paramétricas e perturbações (18) e (21), para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno. Assuma que **(H1)**, **(H2)** e **(H3)** sejam válidas e que a função de modulação ρ em (10), satisfaz (35), e é dada por

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{1}{|k_p|} [\|\bar{A}_1\| \|\hat{\eta}\| + \|\bar{B}_1\| |y| + \|KA_0\| \|\hat{\eta}\| \\ &\quad + \|KB_0\| |y| + |l|] + c, \end{aligned} \quad (36)$$

onde $c > 0$ é uma constante arbitrária pequena. Assuma também que a matriz K em (12) seja projetada de maneira que $(A_0 + B_0K)$ seja Hurwitz e que a matriz L em (32) seja projetada de modo que $(A_0 - L\bar{A}_1)$ também seja Hurwitz. Sendo assim, segue que a saída y e os estados η tendem global e assintoticamente à zero.

Prova: Seja a seguinte equação de Lyapunov

$$V = \frac{s^2}{2}. \quad (37)$$

Sendo assim, sua primeira derivada temporal ao longo de (15) e (26) é dada por

$$\begin{aligned} \dot{V} &= s\dot{s} \\ &= s(\dot{y} - K\dot{\eta}) \\ &= s(\bar{A}_1\eta + \bar{B}_1y + k_p(u + \delta) - KA_0\hat{\eta} - KB_0y \\ &\quad - KL(\underbrace{\bar{y}}_{=\bar{A}_1\eta} - \bar{A}_1\hat{\eta})) \end{aligned} \quad (38)$$

Substituindo-se (10) em (38) obtém-se:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= s(\bar{A}_1\eta + \bar{B}_1y - KA_0\hat{\eta} - KB_0y + k_p\delta \\ &\quad + k_p(-\rho \operatorname{sgn}(k_p) \operatorname{sgn}(s)) - KL(\bar{A}_1\eta - \bar{A}_1\hat{\eta})). \end{aligned}$$

A partir de (28) e (29), temos que a parcela $KL(\bar{A}_1\eta - \bar{A}_1\hat{\eta}) = KL\bar{A}_1\tilde{\eta} \rightarrow 0$ exponencialmente. Assim, podemos definir $\pi_1 := -KL(\bar{A}_1\eta - \bar{A}_1\hat{\eta})$ como um termo de decaimento exponencial. Ainda, a partir de (21), podemos majorar a parcela $|k_p\delta| - |l| \leq \pi_0 + \mathcal{O}(\varepsilon)$. Assim, utilizando a função de modulação ρ dada em (36), segue que

$$\begin{aligned} \dot{V} &= s\bar{A}_1\eta - |s| \|\bar{A}_1\| \|\hat{\eta}\| + s\bar{B}_1y - |s| \|\bar{B}_1\| |y| \\ &\quad - sKA_0\hat{\eta} - |s| \|KA_0\| \|\hat{\eta}\| - sKB_0y \\ &\quad - |s| \|KB_0\| |y| - sl - |s| |l| - |s| |k_p| c + s\pi_1. \end{aligned}$$

Aplicando-se algumas majorações matemáticas, temos que

$$\begin{aligned}\dot{V} &\leq |s| \|\bar{A}_1\| \|\eta\| - |s| \|\bar{A}_1\| \|\hat{\eta}\| \\ &\quad + |s| \|\bar{B}_1\| |y| - |s| \|\bar{B}_1\| |\hat{y}| \\ &\quad + |s| \|KA_0\| \|\hat{\eta}\| - |s| \|KA_0\| \|\eta\| \\ &\quad + |s| \|KB_0\| |y| - |s| \|KB_0\| |\hat{y}| \\ &\quad + |s| |k_p \delta| - |s| |L| - |s| |k_p| c + s\pi_1 \\ \dot{V} &\leq |s| \|\bar{A}_1\| (\|\eta\| - \|\hat{\eta}\|) \\ &\quad + |s| [\pi_0 + \mathcal{O}(\varepsilon)] - |s| |k_p| c + s\pi_1.\end{aligned}$$

Novamente, a partir de (28) e (29), temos que a parcela $\bar{A}_1(\|\eta\| - \|\hat{\eta}\|) = \|\bar{A}_1\| (\|\hat{\eta} + \eta\| - \|\hat{\eta}\|) \leq \|\bar{A}_1\| \|\eta\| \rightarrow 0$ exponencialmente. Assim, definindo $\pi_2 := |s| \|\bar{A}_1\| (\|\eta\| - \|\hat{\eta}\|)$ também como um termo de decaimento exponencial, obtém-se

$$\dot{V} \leq |s| [\pi_2 + \pi_0 + \mathcal{O}(\varepsilon) - |k_p| c + \text{sgn}(s)\pi_1].$$

Como π_0 , π_1 e π_2 são termos de decaimento exponencial, podemos afirmar que $\exists t \leq t_1$, onde $t_1 > 0$ é um instante de tempo finito, tal que $\pi_2 + \pi_0 + \mathcal{O}(\varepsilon) + \text{sgn}(s)\pi_1 < |k_p| c$, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno. Como $c > 0$, podemos concluir que

$$\dot{V} < 0. \quad (39)$$

Consequentemente, $s \rightarrow 0$ assintoticamente. De (28), (29) e (33), conclui-se que $y \rightarrow K\eta$. Logo, a partir de (12), pode-se afirmar também que $\eta \rightarrow 0$. Assim, o ponto de equilíbrio $\eta = 0$ e $y = 0$ é globalmente assintoticamente estável. $\square$

4 Resultados de Simulação

A seguir, serão apresentados resultados de simulação do sistema (13)–(14), já na forma normal, quando aplicada a lei de controle definida em (10) em conjunto com a função de modulação definida em (36) e com os observadores descritos nas seções 3.1 e 3.2.

Para a simulação, considerou-se os seguintes parâmetros: $A_0 = 1$, $B_0 = -1$, $\bar{A}_1 = 1$, $\bar{B}_1 = 1$ e $k_p = 1$. Para que $(A_0 + B_0 K)$ e $(A_0 - L \bar{A}_1)$ sejam Hurwitz, considerou-se $K = 3$ e $L = 3$. A fim de representar as incertezas nos parâmetros A_1 e B_1 , Δ_{A_1} e Δ_{B_1} foram definidos como 1 e 0,5 respectivamente. Considerou-se também que a perturbação $d(t)$ em (14) é um sinal senoidal, com amplitude de 0,5 e frequência de 10 Hz. Definiu-se $y_0 = 3$ e $\eta_0 = 3$ como as condições iniciais da planta.

A partir da Figura 2, podemos observar que a saída y é estabilizada após um regime transitório rápido. Ainda nesta Figura, podemos perceber que o observador de alto ganho projetado em (17) estima a saída da planta de maneira satisfatória e que a inicialização de $\hat{y}$ com o mesmo valor inicial de y foi suficiente para se evitar o *peaking*,

como pode ser visto também no gráfico do sinal de controle u , na Figura 3.

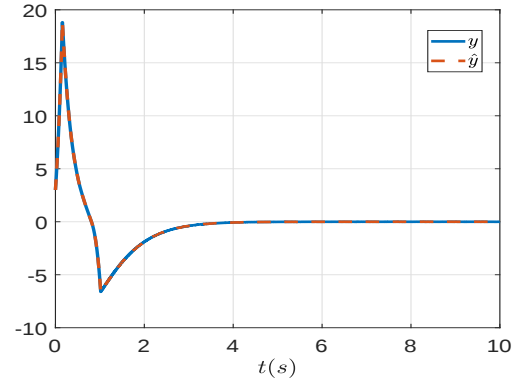


Figura 2: Saída da planta y e seu observador $\hat{y}$.

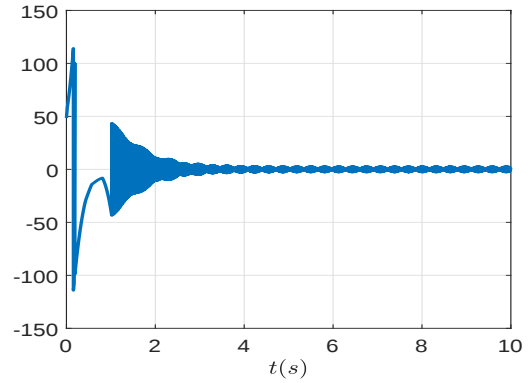


Figura 3: Sinal de Controle u .

A seguir, a Figura 4 apresenta uma comparação entre a variável de estado η e seu respectivo observador de ordem reduzida.

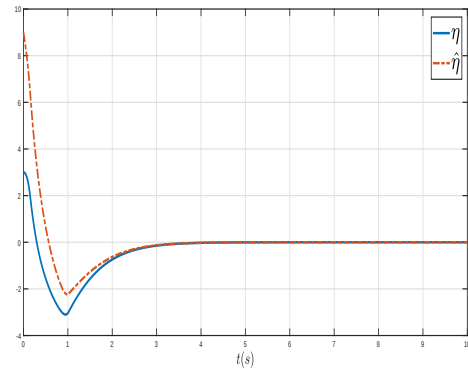


Figura 4: Estados η e Estados Observados $\hat{\eta}$.

A estimação das incertezas da planta δ foi comparada com sinal da perturbação de entrada d na Figura 5. Podemos observar que após o regime transitório inicial, a estimação de delta segue o sinal da perturbação de entrada d . Isto ocorre

pois as incertezas relacionadas aos parâmetros da planta são dadas na forma de $\frac{\Delta_{A_1}\eta + \Delta_{B_1}y}{k_p}$, e a medida que η e $y \rightarrow 0$, $\delta \rightarrow d$, de acordo com (16).

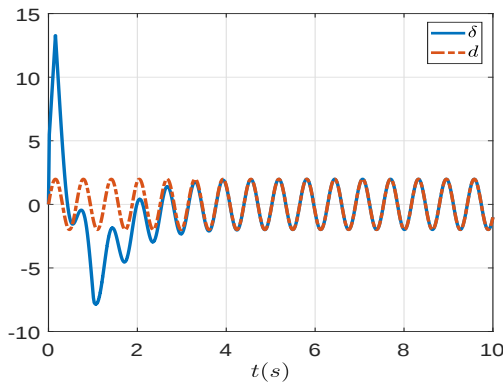


Figura 5: A estimação das incertezas δ e o sinal da perturbação d .

5 Conclusões

Este trabalho apresentou um algoritmo de controle por modos deslizantes via múltiplos observadores para sistemas de fase não-mínima, utilizando apenas realimentação de saída. Um estimador para as incertezas paramétricas e perturbações externas presentes na planta pode ser implementado a partir de um observador de alto ganho. A combinação deste estimador com um observador de ordem reduzida para os estados não-medidos da planta permitiu o desenvolvimento de um algoritmo de controle robusto e eficiente para a solução do problema proposto. Uma prova rigorosa foi apresentada para garantir a estabilidade global e assintótica do sistema em malha fechada. A estratégia proposta foi testada através de simulações numéricas a partir de um exemplo acadêmico. Apesar do cenário adverso contendo incertezas e perturbações, obteve-se resultados satisfatórios.

Agradecimentos

Este trabalho foi financiado pelas agências de fomento brasileiras CNPq, CAPES e FAPERJ.

Referências

- Baev, S., Shtessel, Y., Edwards, C. and Spurgeon, S. (2008). Output feedback tracking in causal nonminimum-phase nonlinear systems using HOSM techniques, *8th Int. Workshop on Variable structure systems* pp. 209–214.
- Chakraborty, A. and Arcak, M. (2009). Time-scale separation redesigns for stabilization and performance recovery of uncertain nonlinear systems, *Automatica* **45**: 34–44.
- Chen, C. T. (1999). *Linear System Theory and Design*, Oxford University Press.
- Chowdhury, D. and Khalil, H. K. (2017). Fast consensus in multi-agent systems with star topology using high gain observers, *IEEE Control Systems Letters* **1**(1): 188–193.
- Gonzalez, T., Moreno, J. A. and Fridman, E. (2012). Variable gain super-twisting sliding mode control, *IEEE Transactions on Automatic Control* **57**(8): 2100–2105.
- Gopalswamy, S. and Hedrick, J. K. (1993). Tracking nonlinear non-minimum phase systems using sliding control, *Int. Journal of Control* **57**(5): 1141–1158.
- Isidori, A. (2013). The zero dynamics of a nonlinear system: From the origin to the latest progresses of a long successful story, *European Journal of Control* **19**: 369–378.
- Kaufman, H., Bar-Kana, I. and Sobel, K. (1994). *Direct Adaptive Control Algorithms: Theory and Applications*, Springer-Verlag.
- Khalil, H. K. (2002). *Nonlinear Systems*, Prentice Hall.
- Marino, R. and Tomei, P. (2005). A class of globally output feedback stabilizable nonlinear nonminimum phase systems, *IEEE Transactions on Automatic Control* **50**(12): 2097–2101.
- Nazrulla, S. and Khalil, H. (2011). Robust stabilization of non-minimum phase nonlinear systems using extended high-gain observers, *IEEE Trans. Aut. Control* **56**(4): 802–813.
- Priscoli, F. D., Isidori, A. and Marconi, L. (2009). A dissipativity-based approach to output regulation of non-minimum-phase systems, *Systems & Control Letters* **58**: 584–591.
- Rinaldi, G., Cucuzzella, M. and Ferrara, A. (2017). Third order sliding mode observer-based approach for distributed optimal load frequency control, *IEEE Control Systems Letters* **1**(2): 215–220.
- Rupp, A., Steinberger, M. and Horn, M. (2017). Sliding mode based platooning with non-zero initial spacing errors, *IEEE Control Systems Letters* **1**(2): 274–279.
- Shkolnikov, I. and Shtessel, Y. (2001). Tracking controller design for a class of nonminimum phase systems via the method of system center, *IEEE Transactions on Automatic Control* **46**(10): 1639–1643.
- Silva, G. R. G., Campestrini, L. and Bazanella, A. S. (2018). Multivariable virtual reference feedback tuning for non-minimum phase plants, *IEEE Control Systems Letters* **2**(1): 121–126.
- Sussmann, H. J. and Kokotović, P. V. (1991). The peaking phenomenon and the global stabilization of nonlinear systems, *IEEE Transactions on Automatic Control* **36**(4): 424–440.
- Utkin, V., Guldner, J. and Shi, J. (1999). *Sliding mode control in electromechanical systems*, Taylor & Francis Ltd.
- Yang, J., Ding, Z., Li, S. and Zhang, C. (2018). Continuous finite-time output regulation of nonlinear systems with unmatched time-varying disturbances, *IEEE Control Systems Letters* **2**(1): 97–102.