

OBSERVADOR DE ENTRADA DESCONHECIDA ROBUSTO APLICADO À ESTIMAÇÃO DE FALHAS EM ATUADORES EM SISTEMAS *FUZZY* TAKAGI-SUGENO NO TEMPO DISCRETO

Email:

Abstract— In this paper, a robust fault estimation technique is proposed to estimate the states and actuator faults simultaneously in a discrete-time Takagi-Sugeno (TS) fuzzy system represented in the state space form. Initially, an augmented system is obtained from fault dynamics model and from the original system. Then an robust TS fuzzy unknown input observer (UIO) is designed for the augmented system with the aim of performing decoupling of the process disturbances. The UIO design is achieved by an H_∞ technique, which is developed to maintain the UIO stable and to reduce the disturbances that cannot be decoupled. The proposed method is validated through a simulation example.

Keywords— Fault estimation, Takagi-Sugeno (TS) Fuzzy Systems, Unknown Input Observer (UIO), Linear Matrix Inequalities (LMI).

Resumo— Neste artigo, uma técnica robusta de estimação de falhas é proposta para estimar estados e falhas em atuadores simultaneamente em um sistema Takagi-Sugeno *fuzzy* representado na forma de espaços de estados. Inicialmente, um sistema aumentado é obtido a partir de um modelo dinâmico de falha e do próprio sistema. Então um Observador de Entrada Desconhecida Takagi-Sugeno *Fuzzy* é projetado para o sistema aumentado visando realizar o desacoplamento dos distúrbios de processo. O observador é obtido por meio de uma técnica H_∞ que é desenvolvida para manter o observador estável e reduzir os distúrbios que não puderam ser desacoplados. O método proposto é validado por meio de um exemplo de simulação.

Palavras-chave— Estimação de falhas, Sistemas Takagi-Sugeno (TS) Fuzzy, Observador de Entrada Desconhecida (ODE), Inequações Matriciais Lineares (LMI).

1 Introdução

Os processos industriais modernos possuem uma grande quantidade de máquinas, robôs, sistemas de transporte e artefatos eletrônicos que devem satisfazer o seu propósito de modo a garantir a eficiência da produção industrial. Esses equipamentos funcionam de maneira interligada, isto é, a variável correspondente a um determinado equipamento pode influenciar a variável referente a outro equipamento em um dado processo, portanto a presença de um mal funcionamento ou defeito em um único componente pode afetar drasticamente o desempenho do sistema como um todo.

De modo a evitar deterioração ou danos a máquinas e a seres humanos, um *controle tolerante a falhas* (CTF) é incorporado ao processo. Esse tipo de controle é capaz de detectar e a compensar falhas rapidamente de modo que os efeitos das mesmas não sejam propagados para os demais componentes no processo. O controle tolerante a falhas proporciona o aumento da segurança e confiabilidade do processo, por esta razão este tipo de controle tornou-se uma importante linha de pesquisa e que vem crescendo de forma significativa nas últimas duas décadas.

A estimação da falhas é uma importante ferramenta do CTF porque esta é capaz de prover informações sobre a magnitude e formato das falhas. Os métodos de estimação buscam reconstruir a falha, que é importante e várias aplicações em reconfiguração de controle. De modo a estimar a magnitude das falhas e atenuar as influências de distúrbios externos, uma solução é utilizar

um *observador de entrada desconhecida* (OED). Este tipo de observador foi empregado para estimar estados e falhas de forma robusta em (Marx et al., 2007) e (Gao et al., 2016).

Os sistemas Takagi-Sugeno (TS) *Fuzzy* foram propostos por (Takagi and Sugeno, 1985) e são um modo interessante um sistema não-linear utilizando conjuntos *fuzzy*, regras e um conjunto de modelos lineares conectados por funções de pertinência. Os modelos TS *fuzzy* são adequados para aproximar qualquer função não-linear com um nível de exatidão de modo que eles podem solucionar problemas de controle complexos envolvendo sistemas não-lineares. Diferentes técnicas de projeto de observadores foram desenvolvidas na literatura para sistemas TS *fuzzy* tais como (Vu et al., 2017) e (Rotondo et al., 2016).

O presente artigo propõe um estimador de falhas em atuadores baseado em OED TS *Fuzzy* no tempo discreto representado na forma de espaços de estados. Na sessão 2, o método proposto é apresentado. Primeiramente, um sistema TS *fuzzy* aumentado é obtido a partir de um vetor de estados aumentados composto pelos estados do sistema e pela falha na atuador. Em seguida, um OED TS *Fuzzy* robusto é utilizado para o sistema aumentado para desacoplar os distúrbios do processo. As matrizes de ganho do OED TS *Fuzzy* robusto são obtidas por meio de uma técnica de otimização com *inequações matriciais lineares* (LMI), e esta é utilizada para garantir que as dinâmicas dos erros de estimação sejam estáveis, e que o desvio de falha e ruído de medição sejam atenuados. O resultado é uma estimação simultânea de estados e

falha de atuador eficiente. Na sequência, na sessão 3, a eficiência do método proposto é validada por meio de um exemplo computacional. Na sessão 4, as conclusões são apresentadas.

Notação: Ao longo deste artigo, a notação $\mathcal{R}^n$ e $\mathcal{R}^{n \times m}$ representam o espaço euclidiano n -dimensional e o conjunto de matrizes com dimensão $n \times m$, respectivamente. I_n denota a matriz identidade com dimensões $n \times n$. $0_{n \times m}$ é uma matriz com todos os termos iguais a zero e sua dimensão é $n \times m$. O sobre escrito T denota a transposição de matrizes ou vetores. As notações $X > 0$ e $X < 0$ indicam que a matriz simétrica X é definida positiva e definida negativa, respectivamente. $\|x_k\|$ representa a norma padrão de x_k e $\|x_k\|_{l_2} = \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} x_k^T x_k}$ corresponde à norma euclidiana de vetores ou matrizes. Além disso, temos

$$\begin{bmatrix} M_1 & * \\ M_2 & M_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_1 & M_2^T \\ M_2 & M_3 \end{bmatrix}$$

em uma expressão matricial.

2 Resultados Principais

2.1 Modelo do Sistema TS Fuzzy

O modelo TS *fuzzy* no tempo discreto é composto de r regras e modelos lineares que podem ser representados como segue:

$$\begin{cases} x_{k+1} = \sum_{i=1}^r h_i(s_k) (A^i x_k + B^i u_k + B_a^i f_{ak}), \\ y_k = C x_k + D_m m_k, \end{cases} \quad (1)$$

com

$$h_i(\mu_k) \geq 0, \sum_{i=1}^r h_i(\mu_k) = 1 \quad \forall i = 1, \dots, r \quad (2)$$

onde $x_k \in \mathcal{R}^n$ é o vetor de estados do sistema, $u_k \in \mathcal{R}^m$ é o vetor de entrada de controle, $y_k \in \mathcal{R}^p$ é o vetor da saída do sistema, $d_k \in \mathcal{R}^{l_d}$ é um vetor de entrada limitada causado por distúrbios ou erros de modelagem, $m_k \in \mathcal{R}^{l_m}$ é o vetor de ruído do sensor, $f_{ak}^T \in \mathcal{R}^{l_{fa}}$ representa a falha no atuador, $A^i = A_0^i + \Delta A^i$, $B^i = B_0^i + \Delta B^i$, $B_a^i = B_{a0}^i + \Delta B_a^i$, C , D_m são matrizes constantes de coeficientes com dimensões apropriadas. As funções de pertinência $h_i(\cdot)$ dependem de $\mu_k = [\mu_k^1 \ \mu_k^2 \ \dots \ \mu_k^r]$ que são variáveis de premissa que podem ser funções de estados mensuráveis, saídas ou entradas conhecidas do sistema ((Li et al., 2008)). Neste artigo, os valores de μ_k são considerados desconhecidos.

Suposição 1 Existe uma matriz com posto cheio $B_1 \in \mathcal{R}^{n \times l_d}$ que satisfaz a condição $\Delta A^i x_k + \Delta B^i u_k + \Delta B_a^i f_{ak} = B_1(\Delta \tilde{A}^i x_k + \Delta \tilde{B}^i u_k + \Delta \tilde{B}_a^i f_{ak})$ e uma matriz qualquer $D_1 \in \mathcal{R}^{p \times l_n}$ que satisfaz a condição

$\Delta D_m m_k = D_1 \tilde{D}_m m_k$, onde $\Delta \tilde{A}^i \in \mathcal{R}^{l_d \times n}$, $\Delta \tilde{B}^i \in \mathcal{R}^{l_d \times m}$, $\Delta \tilde{B}_a^i \in \mathcal{R}^{l_d \times l_{fa}}$ e $\tilde{D}_m \in \mathcal{R}^{l_n \times l_m}$ são matrizes incertas.

Suposição 2 $\text{Posto}(CB_1) = \text{Posto}(B_1)$.

Pela Suposição 1, vamos definir $d_k^i \in \mathcal{R}^{l_d} = \Delta \tilde{A}^i x_k + \Delta \tilde{B}^i u_k + \Delta \tilde{B}_a^i f_{ak}$ e $n_k \in \mathcal{R}^{l_n} = \tilde{D}_m m_k$. Podemos representar (1) como

$$x_{k+1} = \sum_{i=1}^r h_i(s_k) (A_0^i x_k + B_0^i u_k + B_{a0}^i f_{ak} + B_1 d_k^i), \quad (3a)$$

$$y_k = C x_k + D_1 n_k, \quad (3b)$$

Para fins de simplicidade, reescrevemos (3) como sendo

$$x_{k+1} = A(\mu_k) x_k + B(\mu_k) u_k + B_a(\mu_k) f_{ak} + B_1 d_k^i, \quad (4a)$$

$$y_k = C x_k + D_1 n_k, \quad (4b)$$

onde

$$A(\mu_k) = \sum_{i=1}^r h_i(\mu_k) A_0^i,$$

$$B(\mu_k) = \sum_{i=1}^r h_i(\mu_k) B_0^i,$$

$$B_a(\mu_k) = \sum_{i=1}^r h_i(\mu_k) B_{a0}^i.$$

Substituindo (4a) em (4b) temos

$$\begin{aligned} y_{k+1} &= C x_{k+1} + D_1 n_{k+1} \\ &= C A(\mu_k) x_k + C B u_k + C B_1 d_k^i + C B_a f_{a,k} \\ &\quad + D_1 n_{k+1} \end{aligned} \quad (5)$$

Por (5), é possível obter:

$$\begin{aligned} d_k^i &= H y_{k+1} - H C A(\mu_k) x_k - H C B u_k \\ &\quad - H C B_a f_{a,k} - H D_1 n_{k+1}, \end{aligned} \quad (6)$$

onde H é a matriz pseudo-inversa de Moore-Penrose de CB_1 . Através da Suposição 2, a matriz H pode ser obtida por:

$$H = B_1 ((CB_1)^T (CB_1))^{-1} (CB_1)^T \quad (7)$$

Substituindo (6) em (4a) temos

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= L y_{k+1} + R A(\mu_k) x_k + R B u_k + R B_a f_{a,k} \\ &\quad - L D_1 n_{k+1}, \end{aligned} \quad (8)$$

onde

$$L = B_1 H \quad (9)$$

e $R = I_{\bar{n}} - LC$.

O estimador é desenvolvido para estimar simultaneamente os estados do sistema e falhas no atuador. Para este propósito, define-se a dinâmica da falha como:

$$f_{a,k+1} = f_{a,k} + \Delta f_{a,k} \quad (10)$$

Definindo $\bar{x} = [x_k^T \ f_{a,k}^T]^T$ e utilizando (8) e (10), nós chegamos no seguinte sistema aumentado:

$$\begin{aligned} \bar{x}_{k+1} = & \bar{A}(\mu_k)\bar{x}_k + \bar{B}u_k - \bar{L}D_1n_{k+1} + \bar{L}y_{k+1} \\ & + \bar{I}\Delta f_{a,k}, \end{aligned} \quad (11a)$$

$$y_k = \bar{C}\bar{x}_k + D_1n_k, \quad (11b)$$

$$\begin{aligned} \text{onde } \bar{A}(\mu_k) = & \begin{bmatrix} RA(\mu_k) & RB_a(\mu_k) \\ 0_{l_{fa} \times n} & I_{l_{fa}} \end{bmatrix}, \\ \bar{B}(\mu_k) = & \begin{bmatrix} RB(\mu_k) \\ 0_{l_{fa} \times m} \end{bmatrix}, \quad \bar{L} = \begin{bmatrix} L \\ 0_{l_{fa} \times p} \end{bmatrix} \text{ e } \bar{I} = \\ & \begin{bmatrix} 0_{n \times l_{fa}} \\ I_{l_{fa}} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

2.2 ODE TS Fuzzy Proposto

O ODE TS fuzzy proposto é definido por

$$\begin{aligned} \hat{\bar{x}}_{k+1} = & \bar{A}(\hat{\mu}_k)\hat{\bar{x}}_k + \bar{B}(\hat{\mu}_k)u_k + K(\hat{\mu}_k)(y_k - \bar{C}\hat{\bar{x}}_k) \\ & + Ly_k, \end{aligned} \quad (12)$$

onde $\hat{\bar{x}}_k \in \mathcal{R}^{\bar{n}}$ representa a estimação de $\bar{x}_k$, $\hat{\mu}_k$ é a estimação de μ_k , $K^i \in \mathcal{R}^{\bar{n} \times p}$ são as matrizes de ganhos a serem determinadas.

Assumindo que o erro de estimação é dado por $e_k = \bar{x}_k - \hat{\bar{x}}_k$. Utilizando (11a) e (12), a dinâmica do erro pode ser calculada como

$$\begin{aligned} e_{k+1} = & \bar{x}_{k+1} - \hat{\bar{x}}_{k+1} \\ = & \bar{A}(\mu_k)\bar{x}_k + \bar{B}(\mu_k)u_k - \bar{L}D_1n_{k+1} + \bar{L}y_{k+1} \\ & + \bar{I}\Delta f_{a,k} - \bar{L}y_k - \bar{A}(\hat{\mu}_k)\hat{\bar{x}}_k - \bar{B}(\hat{\mu}_k)u_k \\ & - K(\hat{\mu}_k)(y_k - \bar{C}\hat{\bar{x}}_k) \\ = & \bar{A}(\hat{\mu}_k)(\bar{x}_k - \hat{\bar{x}}_k) - \bar{L}D_1n_{k+1} + \bar{I}\Delta f_{a,k} \\ & + \bar{L}(y_{k+1} - y_k) - K(\hat{\mu}_k)\bar{C}(\bar{x}_k - \hat{\bar{x}}_k) \\ & - K(\hat{\mu}_k)D_1n_k + \Phi_k \\ = & (\bar{A}(\hat{\mu}_k) - K(\hat{\mu}_k)\bar{C})e_k + \bar{L}\Delta y_k + \bar{I}\Delta f_{a,k} \\ & - K(\hat{\mu}_k)D_1n_k - \bar{L}D_1n_{k+1} + \Phi_k, \end{aligned} \quad (13)$$

onde

$$\Phi_k = (\bar{A}(\mu_k) - \bar{A}(\hat{\mu}_k))\bar{x}_k + (\bar{B}(\mu_k) - \bar{B}(\hat{\mu}_k))u_k \quad (14)$$

é uma função não-linear com constante de Lipschitz β , i.e.,

$$\|\Phi_k\| \leq \beta\|e_k\|, \quad \forall k \in \mathcal{R} \quad (15)$$

Podemos escrever (13) na seguinte forma matricial:

$$e_{k+1} = \begin{bmatrix} M(\hat{\mu}_k) & \bar{W}_1(\hat{\mu}_k) & \bar{W}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_k \\ \omega_k \\ \omega_{k+1} \end{bmatrix} + \Phi_k, \quad (16)$$

onde $\omega_k = [\Delta y_k^T \ \Delta f_{a,k}^T \ n_k^T]^T \in \mathcal{R}^{l_\omega}$, $M(\hat{\mu}_k) = \bar{A}(\hat{\mu}_k) - K(\hat{\mu}_k)\bar{C}$, $\bar{W}_1(\hat{\mu}_k) = W_1 - K(\hat{\mu}_k)W_2$, sendo $W_1 = [\bar{L} \ \bar{I} \ 0_{\bar{n} \times l_n}]$ e $W_2 = [0_{p \times p} \ 0_{p \times l_{fa}} \ D_1]$.

O próximo passo no projeto do observador robusto (12) é garantir que o erro de estimação e_k seja assintoticamente convergente, fazendo com que as matrizes M^i sejam estáveis para todo i , e reduzir a influência do vetor ω_k , que contém os desvios de saída e da falha, e o ruído no sensor.

Lema 1 (Boyd et al., 1994). As afirmações abaixo são equivalentes:

$$i) \ X = X^T, \ X > 0 \text{ and } Y^T X^{-1} Y + W < 0.$$

$$ii) \ \begin{bmatrix} W & Y^T \\ Y & -X \end{bmatrix} < 0$$

Lema 2 Para qualquer matriz $X \in \mathcal{R}^{s \times t}$ e $Y \in \mathcal{R}^{t \times s}$, e um escalar $\epsilon > 0$, nós temos:

$$X^T Y + Y^T X \leq \epsilon^{-1} X^T X + \epsilon Y^T Y \quad (17)$$

Prova: A prova pode ser encontrada em (Li et al., 2008) e foi omitida aqui por brevidade. $\square$

Teorema 3 Se existir uma matriz simétrica definida positiva P e um conjunto de matrizes Q^i e uma constante $\lambda > 0$ tal que a LMI

$$\begin{bmatrix} (1 + \mu\beta^2)I - P & * & * & * \\ 0 & -\lambda^2 I & * & * \\ 0 & 0 & -\lambda^2 I & * \\ P\bar{R}\bar{A}^i - Q^i\bar{C} & P\bar{W}_1 - Q^i\bar{W}_2 & -P\bar{L}\bar{W}_2 & -2P \end{bmatrix} < 0, \forall i = 1, \dots, r \quad (18a)$$

$$\begin{bmatrix} -\mu I & * \\ P\bar{R}\bar{E} & -2P \end{bmatrix} < 0 \quad (18b)$$

seja válida, então o UIO robusto TS Fuzzy, definido em (12), para o sistema (11) é solúvel e é capaz de garantir o seguinte limitante superior

$$\|e_k\|_{l_2} \leq \alpha \|\omega_k\|_{l_2} \quad (19)$$

onde $\alpha = \sqrt{2}\lambda > 0$ é um índice de desempenho H_∞ predeterminado e $Q^i = PK^i$.

Prova: Usando a seguinte candidata a função de Lyapunov

$$V_k = e_k^T P e_k, \quad (20)$$

onde P é uma matriz simétrica definida positiva, temos:

$$\begin{aligned}
\Delta V_k &= V_{k+1} - V_k \\
&= e_{k+1}^T P e_{k+1} - e_k^T P e_k \\
&= \begin{bmatrix} e_k \\ \omega_k \\ \omega_{k+1} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} M(\hat{\mu}_k)^T \\ \bar{W}_1(\hat{\mu}_k)^T \\ \bar{W}_2^T \end{bmatrix} P \begin{bmatrix} M(\hat{\mu}_k)^T \\ \bar{W}_1(\hat{\mu}_k)^T \\ \bar{W}_2^T \end{bmatrix}^T \\
&\quad \times \begin{bmatrix} e_k \\ \omega_k \\ \omega_{k+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_k \\ \omega_k \\ \omega_{k+1} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} M(\hat{\mu}_k)^T \\ \bar{W}_1(\hat{\mu}_k)^T \\ \bar{W}_2^T \end{bmatrix} P \Phi_k \\
&\quad + \Phi_k^T P \begin{bmatrix} M(\hat{\mu}_k)^T \\ \bar{W}_1(\hat{\mu}_k)^T \\ \bar{W}_2^T \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} e_k \\ \omega_k \\ \omega_{k+1} \end{bmatrix} + \Phi_k^T P \Phi_k \\
&\quad - e_k^T P e_k. \tag{21}
\end{aligned}$$

Aplicando o Lemma 1 em (21) obtemos

$$\begin{aligned}
\Delta V_k &\leq \begin{bmatrix} e_k \\ \omega_k \\ \omega_{k+1} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} M(\hat{\mu}_k)^T \\ \bar{W}_1(\hat{\mu}_k)^T \\ \bar{W}_2^T \end{bmatrix} (2P) \begin{bmatrix} M(\hat{\mu}_k)^T \\ \bar{W}_1(\hat{\mu}_k)^T \\ \bar{W}_2^T \end{bmatrix}^T \\
&\quad \times \begin{bmatrix} e_k \\ \omega_k \\ \omega_{k+1} \end{bmatrix} + \Phi_k^T (2P) \Phi_k - e_k^T P e_k \\
&\quad + \mu \Phi_k^T \Phi_k - \mu \Phi_k^T \Phi_k \tag{22}
\end{aligned}$$

Utilizando (15) em (22), chega-se a

$$\begin{aligned}
\Delta V_k &\leq \begin{bmatrix} e_k \\ \omega_k \\ \omega_{k+1} \end{bmatrix}^T \left(\begin{bmatrix} M(\hat{\mu}_k)^T \\ \bar{W}_1(\hat{\mu}_k)^T \\ \bar{W}_2^T \end{bmatrix} (2P) \begin{bmatrix} M(\hat{\mu}_k)^T \\ \bar{W}_1(\hat{\mu}_k)^T \\ \bar{W}_2^T \end{bmatrix}^T \right. \\
&\quad \left. + \begin{bmatrix} -P - \mu\beta^2 I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} e_k \\ \omega_k \\ \omega_{k+1} \end{bmatrix} \\
&\quad + \Phi_k^T (2P + \mu I) \Phi_k \tag{23}
\end{aligned}$$

Seja a seguinte função custo

$$J = e_k^T e_k - \lambda^2 \omega_k^T \omega_k - \lambda^2 \omega_{k+1}^T \omega_{k+1} + \Delta V_k. \tag{24}$$

Utilizando (23) em (24) temos

$$\begin{aligned}
J &\leq \sum_{i=1}^r h_i(\hat{s}_k) \begin{bmatrix} e_k \\ \omega_k \\ \omega_{k+1} \\ \Phi_k \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \Psi_1(\hat{\mu}_k) & 0 \\ 0 & \Psi_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_k \\ \omega_k \\ \omega_{k+1} \\ \Phi_k \end{bmatrix} \tag{25}
\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
\Psi_1(\hat{\mu}_k) &= \left(\begin{bmatrix} M(\hat{\mu}_k)^T \\ \bar{W}_1(\hat{\mu}_k)^T \\ \bar{W}_2^T \end{bmatrix} P \right) (2P^{-1}) \left(P \begin{bmatrix} M(\hat{\mu}_k)^T \\ \bar{W}_1(\hat{\mu}_k)^T \\ \bar{W}_2^T \end{bmatrix}^T \right) \\
&\quad + \begin{bmatrix} (1 - \mu\beta^2)I - P & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda^2 I & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda^2 I \end{bmatrix}, \tag{26}
\end{aligned}$$

e

$$\Psi_2 = P(2P^{-1})P + \mu I. \tag{27}$$

Substituindo $PK^i = Q^i$ em $\Psi_1(\hat{\mu}_k)$ implica em (18a) de acordo com o Lemma 1, o que leva a

$$e_k^T e_k - \lambda^2 \omega_k^T \omega_k - \lambda^2 \omega_{k+1}^T \omega_{k+1} + \Delta V_k < 0 \tag{28}$$

Integrando ambos os lados de (28) chega-se a:

$$\sum_{k=0}^{\infty} e_k^T e_k - \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^2 \omega_k^T \omega_k - \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^2 \omega_{k+1}^T \omega_{k+1} + V_{\infty} - V_0 < 0. \tag{29}$$

Sabendo que

$$\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^2 \omega_{k+1}^T \omega_{k+1} - \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^2 \omega_k^T \omega_k = -\lambda^2 \omega_0^T \omega_0, \tag{30}$$

e substituindo (30) em (29) temos

$$\sum_{k=0}^{\infty} e_k^T e_k - 2\lambda^2 \sum_{k=0}^{\infty} \omega_k^T \omega_k < -\lambda^2 \omega_0^T \omega_0 - V_{\infty} + V_0. \tag{31}$$

Como $V_{\infty} \geq 0$, a assumindo que $V_0 = 0$ temos

$$\sum_{k=0}^{\infty} e_k^T e_k - 2\lambda^2 \sum_{k=0}^{\infty} \omega_k^T \omega_k < 0, \tag{32}$$

ou

$$\sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} e_k^T e_k} < \sqrt{2}\lambda \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} \omega_k^T \omega_k}, \tag{33}$$

o que é equivalente a (19). A prova está completa. $\square$

Algoritmo 1 O procedimento para o projeto do UIO TS *Fuzzy* tem os seguinte passos:

1. Selecionar a matriz L na forma de (9);
2. Obter o sistema aumentado na forma de (11);
3. Resolver o LMI (18) para obter as matrizes P e Q^i , e calcular o conjunto de matrizes de ganhos $K^i = P^{-1}Q^i$;
4. Calcular as outras matrizes de ganhos;

3 Simulação Computacional

O presente exemplo trata-se de uma aplicação experimental com sistema contendo dois tanques acoplados. A Figura 1 ilustra a estrutura do sistema. A modelagem matemática e os parâmetros do sistema podem ser encontrados em (Lopes et al., 2011) os quais foram omitidos aqui.

Analizando o experimento acima como sendo um sistema T-S *fuzzy* no tempo discreto com um

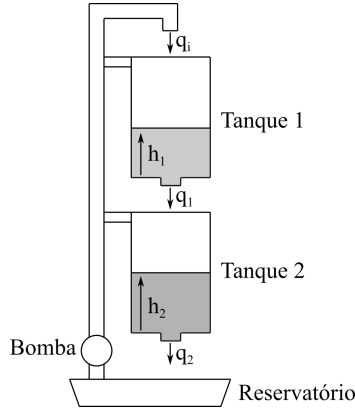


Figura 1: Diagrama do sistema contendo dois tanques acoplados.

tempo de amostragem $T = 0,1$ segundo, nós obtemos o sistema como em (3) com os seguintes parâmetros:

$$A_0^1 = \begin{bmatrix} 0.9991 & 0 \\ 0.0009 & 0.9991 \end{bmatrix}, A_0^2 = \begin{bmatrix} 0.9991 & 0 \\ 0.0009 & 0.9839 \end{bmatrix},$$

$$A_0^3 = \begin{bmatrix} 0.9839 & 0 \\ 0.0161 & 0.9991 \end{bmatrix}, A_0^4 = \begin{bmatrix} 0.9839 & 0 \\ 0.0161 & 0.9839 \end{bmatrix},$$

$$B_0^1 = B_0^2 = B_0^3 = B_0^4 = \begin{bmatrix} 0.003 \\ 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0.1 \\ -0.1 \end{bmatrix}, D_1 = \begin{bmatrix} 0.01 \\ 0.01 \end{bmatrix}, D_{s0} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

O distúrbio $d_k = \sin(0.2\pi k)$, o ruído no sensor é um sinal uniformemente aleatório. A entrada de controle é um sinal do tipo degrau $u_k = 6.645$ e o vetor de estados iniciais é dado por $\bar{x}_0 = [0.1 \ 0.1 \ 0]^T$. A falta no atuador é

$$f_{sk} = \begin{cases} 0, & k < 50 \\ 0.025(k - 50), & 50 \leq k < 70 \\ 0.5, & 70 \leq k < 100.63 \\ 0.5 + 0.5\sin(0.02\pi k), & k > 100.63 \end{cases} \quad (34)$$

Escolhendo $\lambda = 0,9$, $\beta = 3 \times 10^{-3}$ e utilizando o Algoritmo 1, nós obtemos os seguintes ganhos do observador como segue:

$$L = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,5 & 0,5 \end{bmatrix}, R = \begin{bmatrix} 0,5 & -0,5 \\ -0,5 & 0,5 \end{bmatrix},$$

$$K^1 = \begin{bmatrix} 1.1401 & -1.1448 \\ -1.1400 & 1.1447 \\ 48.4307 & -48.4308 \end{bmatrix},$$

$$K^2 = \begin{bmatrix} 1.1401 & -1.0690 \\ -1.1400 & 1.0689 \\ 48.4307 & -48.4308 \end{bmatrix},$$

$$K^3 = \begin{bmatrix} 0.9886 & -1.1447 \\ -0.9885 & 1.1446 \\ 48.4308 & -48.4309 \end{bmatrix},$$

$$K^4 = \begin{bmatrix} 0.9886 & -1.0690 \\ -0.9886 & 1.0689 \\ 48.4307 & -48.4308 \end{bmatrix}.$$

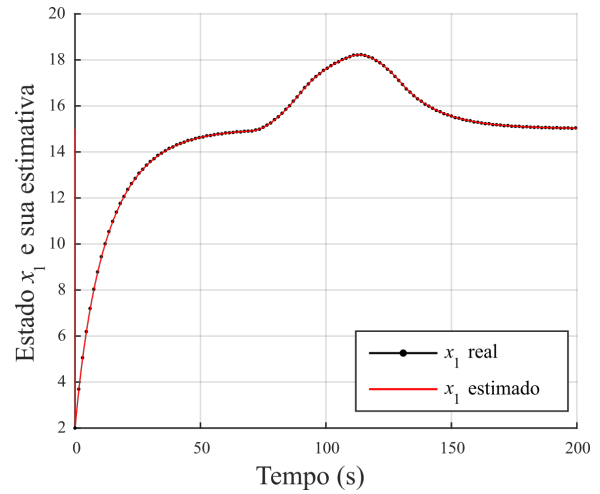


Figura 2: x_{1k} e sua estimativa.

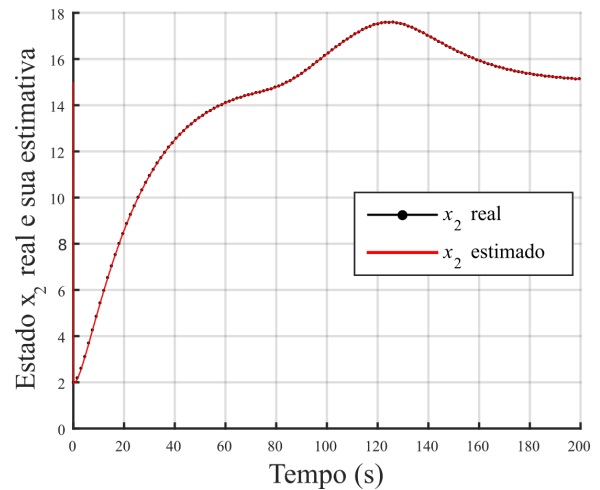


Figura 3: x_{2k} e sua estimativa.

Escolhendo os parâmetros acima, os distúrbios do processo são desacoplados e as influências do desvio da falha, e do ruído do sensor são minimizados. Devido à medida de x_1 ser faltosa, o exemplo pode ser considerado um caso onde as variáveis de premissa fuzzy são desconhecidas. As

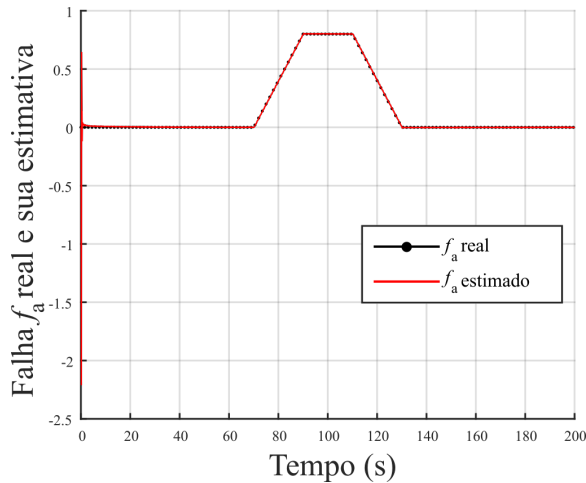


Figura 4: f_{ak} e sua estimativa.

curva presentes em Fig 2-4 mostram o desempenho da estimação dos estados x_1 e x_2 e da falha no atuador, respectivamente. Pode ser visto que o ODE TS *Fuzzy* proposto é capaz de estimar estados e reconstruir falhas com robustez adequada.

4 Conclusões

Neste artigo, uma técnica de estimação de falhas em atuadores baseada em um observador de entrada desconhecida para sistemas TS *fuzzy* no tempo discreto foi apresentada. Com este tipo de observador, é possível estimar simultaneamente os estados do sistema e as falhas no atuador. O ODE tem um papel importante no desacoplamento dos distúrbios e na atenuação dos desvios de falha e do ruído no sensor através de uma técnica baseada em LMI. O algoritmo de projeto do estimador é apresentado e este foi validado por meio de um exemplo de simulação computacional, que mostrou excelentes resultados. Do ponto de vista de aplicações com sistemas digitais, a técnica proposta é bastante adequada para implementação em tempo-real com microprocessadores ou microcontroladores. Este trabalho nos encoraja a ampliar a técnica proposta à estimação de falhas em atuadores e sensores simultaneamente com estimação de estados em sistemas TS *fuzzy*.

Agradecimentos

Este trabalho recebeu ajuda financeira da Coordenação de Aperfeiçoamento Pessoal de Nível Superior - CAPES e do Laboratório de Automação em Petróleo - LAUT / DCA / UFRN.

Referências

- Boyd, S., Ghaoui, L. E., Feron, E. and Balakrishnan, V. (1994). *Linear matrix inequalities in system and control theory*, SIAM.
- Gao, Z., Liu, X. and Chen, M. Z. (2016). Unknown input observer-based robust fault estimation for systems corrupted by partially decoupled disturbances, *IEEE Transactions on Industrial Electronics* **63**: 2537–2547.
- Li, L., Jia, Y., Du, J. and Yan, S. (2008). Robust l_2 - l_∞ control for uncertain singular systems with time-varying delay, *Progress in Natural Science* **18**: 1015–1021.
- Lopes, J. S., Oscar Filho, G., Araujo, F. M., Cavalcanti, A. L. and Maitelli, A. L. (2011). An lmi robust predictive control approach applied in a coupled tanks systems, *IECON 2011-37th Annual Conference on IEEE Industrial Electronics Society*, pp. 480–485.
- Marx, B., Koenig, D. and Ragot, J. (2007). Design of observers for takagi–sugeno descriptor systems with unknown inputs and application to fault diagnosis, *IET Control Theory & Applications* **1**: 1487–1495.
- Rotondo, D., Witczak, M., Puig, V., Nejjar, F. and Pazera, M. (2016). Robust unknown input observer for state and fault estimation in discrete-time takagi–sugeno systems, *International Journal of Systems Science* **47**: 3409–3424.
- Takagi, T. and Sugeno, M. (1985). Fuzzy identification of systems and its application to modeling and control, *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics* **15**: 116–132.
- Vu, V.-P., Wang, W.-J., Zurada, J. M., Chen, H.-C. and Chiu, C.-H. (2017). Unknown input method based observer synthesis for a discrete time uncertain ts fuzzy system, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*.