

CONTROLE ROBUSTO PARCIALMENTE AMOSTRADO VIA REALIMENTAÇÃO DE ESTADO PARA SISTEMAS LINEARES COM SALTOS MARKOVIANOS

RAFAEL F. CUNHA* GABRIELA W. GABRIEL* JOSÉ C. GEROMEL*

**Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação, UNICAMP
13083-852, Campinas, SP, Brasil*

Email: rafaelcunha2013@gmail.com, {ggabriel@dca; geromel@dsce}.fee.unicamp.br

Abstract— The objective of this paper is to design a robust partial sampled-data state feedback control law for Markov Jump Linear Systems (MJLS) in which both continuous and discrete exogenous inputs are considered. The specificity of this control structure lies in the fact that only the state variable is sampled, while the stochastic parameter that defines the Markov mode of the system used for control purposes is free to change at any time between samples. As main result, a method expressed through Differential Linear Matrix Inequalities (DLMI) is proposed which provides sufficient convex conditions for the existence of a solution in the context of $\mathcal{H}_\infty$ and $\mathcal{H}_2$ performance for the mentioned class of control problems. LMI solver facilities to implement the proposed method capable of providing a guaranteed minimum cost control in only one shot is adopted. An example is used for illustration.

Keywords— Sampled-data systems, Networked control systems, LMI, Markov process

Resumo— O objetivo deste artigo é projetar uma lei de controle robusto parcialmente amostrado via realimentação de estado para sistemas lineares com saltos markovianos (MJLS) em que são consideradas entradas exógenas tanto contínuas quanto discretas. A especificidade dessa estrutura de controle está no fato de que somente a variável de estado é amostrada, enquanto que o parâmetro estocástico que define o modo da cadeia de Markov do sistema usado para fins de controle é livre para mudar a qualquer momento entre os instantes de amostragem. Como resultado principal, é proposto um método expresso através de desigualdades diferenciais lineares (DLMI) que fornece condições convexas suficientes para a existência de uma solução no contexto dos índices de desempenho $\mathcal{H}_\infty$ e $\mathcal{H}_2$ para a classe de problemas de controle mencionada. Rotinas que resolvem LMIs são utilizadas para a implementação do método proposto capaz de fornecer um controle de custo mínimo garantido em uma única iteração. Um exemplo é usado para ilustração.

Palavras-chave— Sistemas de dados amostrados, sistemas de controle em rede, LMI, processo de Markov

1 Introdução

Este artigo aborda a estabilidade e o desempenho de controladores robustos parcialmente amostrados via realimentação de estado para MJLS, onde apenas a variável de estado é amostrada, enquanto o parâmetro estocástico que define o modo da cadeia de Markov do sistema usado para fins de controle não é afetado por esta operação. O problema de projeto de sistemas de controle em rede (NCS) tem sido amplamente considerado nas últimas décadas, especialmente em ambientes industriais, veja (Yang, 2006), tornando-se uma aplicação prática importante que se enquadra no contexto atual de projetos de sistemas de controle.

Modelar um sistema usando técnicas de saltos markovianos é muito útil quando mudanças abruptas precisam ser consideradas, como no caso do NCS. Na literatura, um modelo em tempo discreto puro é adotado em (Costa et al., 2006) e (Todorov and Fragoso, 2016), entre muitos outros. Neste contexto, a referência (Wu et al., 2017) foca em um controle passivo assíncrono, enquanto (Oliveira et al., 2014) trata o caso independente do modo. Já os MJLS de tempo contínuo são amplamente tratados em (Costa et al., 2013). A referência (Rodrigues et al., 2017) utiliza um detector de modo para o caso em que esta informação é desconhecida. Uma abordagem geral para lidar com incertezas que afetam tanto as matrizes do

sistema quanto os parâmetros da matriz de taxa de transição é dada em (Morais et al., 2016).

Uma abordagem híbrida foi utilizada em (Gabriel et al., 2017) e (Gabriel et al., 2018) para a obtenção de condições necessárias e suficientes de estabilidade e desempenhos $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$ ótimos de controle por realimentação de estado em sistemas amostrados, inteiramente expressas em termos de LMIs. Nestes casos adotou-se

$$u(t_k) = L_{\theta(t_k)}x(t_k) + E_{d\theta(t_k)}w_d[k-1], \quad (1)$$

$\forall k \in \mathbb{N}$, onde $u(\cdot)$ é o sinal de controle amostrado, $x(\cdot)$ é a variável de estado de dimensões compatíveis conhecida no instante de tempo $t = t_k$, $\theta(\cdot)$ é o modo da cadeia de Markov e $w_d[\cdot]$ é um sinal de ruído definido em tempo discreto. Recuperando o contexto de NCS, a estrutura (1) pode ser interpretada como o controle de tempo contínuo $L_{\theta(t)}x(t)$ sendo transmitido para o atuador através de uma rede de banda limitada, conforme a Figura 1. Neste trabalho, uma outra possível estrutura de controle é imposta, ou seja,

$$u(t, t_k) = L_{\theta(t)}\left(x(t_k) + E_{d\theta(t_k)}w_d[k-1]\right), \quad (2)$$

$t \in [t_k, t_{k+1})$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Uma interpretação para (2) é a estrutura descrita na Figura 2. Observe que em (2) o parâmetro de salto markoviano no sinal de controle não é afetado pela operação de amostragem. Para modelar essa estrutura, é necessário

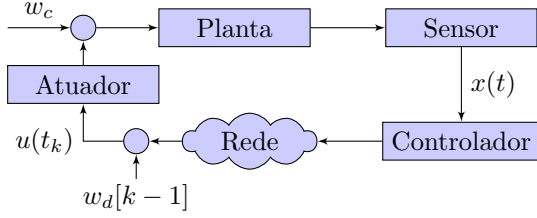


Figura 1: Rede entre controlador e atuador.

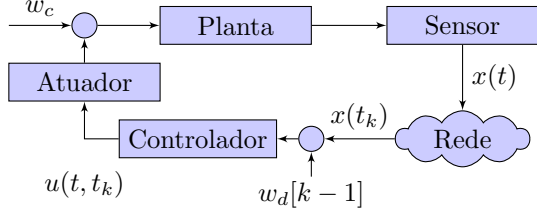


Figura 2: Rede entre sensor e controlador.

introduzir algumas novas descrições matemáticas no sistema híbrido associado, quando comparadas às utilizadas em (Gabriel et al., 2018).

A notação utilizada é padrão. Para matrizes quadradas, $\text{tr}(\cdot)$ denota a função traço. Para vetores ou matrizes reais, $(\cdot)'$ indica o seu transposto. Para matrizes simétricas, $(\bullet)$ indica o seu bloco simétrico e $X > 0$ ($X \geq 0$) denota que X é positiva (semi)definida. Os símbolos $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}_+$ e $\mathbb{N}$ denotam os conjuntos dos números reais, reais não negativos e naturais, respectivamente. $\mathbb{K}$ é o conjunto dos N primeiros números naturais. O operador do valor esperado é $\mathcal{E}\{\cdot\}$. O operador $\mathcal{P}(\cdot)$ indica a probabilidade do evento $(\cdot)$. A norma de qualquer trajetória $w_c(t) \in \mathbb{R}^{r_c}$, $\forall t \in \mathbb{R}_+$ é $\|w_c\|_2^2 = \int_0^\infty \mathcal{E}(w_c(t)'w_c(t))dt$ e $\mathcal{L}_2$ indica o conjunto de todas as trajetórias com norma finita. Similarmente, em tempo discreto, a norma de uma trajetória $w_d(t_k) \in \mathbb{R}^{r_d}$, $\forall k \in \mathbb{N}$, é $\|w_d\|_2^2 = \sum_{k=0}^\infty \mathcal{E}(w_d(t_k)'w_d(t_k))$ e ℓ_2 indica o conjunto de todas as trajetórias com norma finita. A notação $f[k] = f(t_k)$ indica as amostras em t_k , $k \in \mathbb{N}$.

2 Formulação do problema

Considere uma classe de MJLS homogêneo em tempo contínuo com a seguinte realização

$$\dot{x}(t) = A_{\theta(t)}x(t) + B_{\theta(t)}u(t) + E_{c\theta(t)}w_c(t), \quad (3)$$

$$y[k] = x(t_k) + E_{d\theta(t_k)}w_d[k-1], \quad (4)$$

$$z(t) = C_{\theta(t)}x(t) + D_{\theta(t)}u(t), \quad (5)$$

em que $x(\cdot) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n$, $u(\cdot) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^m$, $w_c(\cdot) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^{r_c}$, e $z(\cdot) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^s$ são o estado, o controle, a entrada exógena e a saída controlada em tempo contínuo, respectivamente. A entrada exógena $w_d[\cdot] : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^{r_d}$ e a saída medida $y[\cdot] : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^n$ são definidas em tempo discreto sendo $w_d[-1]$ um valor conhecido.

Assume-se que o sistema (3)-(5) parte de uma condição inicial nula $x(0) = 0$. Ademais, $\theta(t) \in \mathbb{K}$ é uma variável randômica governada por um processo markoviano de tempo contínuo com condição inicial $\theta(0) = \theta_0 \in \mathbb{K}$ tal que $\mathcal{P}(\theta_0 = i) = \pi_{i0} \geq 0$, $\forall i \in \mathbb{K}$, satisfazendo $\sum_{i \in \mathbb{K}} \pi_{i0} = 1$ e uma matriz de taxa de transição $\{\lambda_{ij}\} = \Lambda \in \mathbb{R}^{N \times N}$, que define as probabilidades de transições

$$\mathcal{P}(\theta(t + \varepsilon) = j | \theta(t) = i) = \delta_{i-j} + \lambda_{ij}\varepsilon + o(\varepsilon), \quad (6)$$

onde δ_{i-j} é o delta de Kronecker, que significa, $\delta_{i-j} = 1$ se $i = j \in \mathbb{K}$ e $\delta_{i-j} = 0$, caso contrário, com $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} o(\varepsilon)/\varepsilon = 0$. Os elementos de Λ são tais que $\lambda_{ij} \geq 0$, $\forall i \neq j$, e $\sum_{j \in \mathbb{K}} \lambda_{ij} = 0$, $\forall i \in \mathbb{K}$.

Considere o sinal de controle da forma $u(t) = u(t, t_k)$, $t \in [t_k, t_{k+1})$, $\forall k \in \mathbb{N}$, em que a sequência de instantes de amostragem igualmente espaçada $\{t_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ é tal que $t_0 = 0$, $t_{k+1} - t_k = h > 0$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Nós iremos fornecer condições para a determinação dos ganhos de realimentação de estado $L_i \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\forall i \in \mathbb{K}$, de tal forma que com a lei de controle (2) o sistema em malha fechada seja estável em média quadrática e um índice de desempenho desejado seja minimizado. Observe que até agora, segundo o conhecimento dos autores, uma estrutura de controle via realimentação de estado do tipo (2) ainda não foi tratada. Segue a definição do MJLS híbrido

$$\dot{\psi}(t) = F_{\theta(t)}\psi(t) + J_{c\theta(t)}w_c(t), \quad (7)$$

$$z(t) = G_{\theta(t)}\psi(t), \quad (8)$$

$$\psi(t_k) = H\psi(t_k^-) + J_{d\theta(t_k)}w_d[k-1] \quad (9)$$

para $\theta(t) \in \mathbb{K}$ no intervalo de tempo $t \in [t_k, t_{k+1})$, $\forall k \in \mathbb{N}$, com as matrizes de dimensões compatíveis $\forall i \in \mathbb{K}$,

$$G'_i = \begin{bmatrix} C'_i \\ L'_i D'_i \end{bmatrix}, \quad J_{ci} = \begin{bmatrix} E_{ci} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad J_{di} = \begin{bmatrix} 0 \\ E_{di} \end{bmatrix},$$

$$F_i = \begin{bmatrix} A_i & B_i L_i \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & 0 \end{bmatrix}. \quad (10)$$

Identificando a variável de estado como $\psi(t)' = [x(t)' \ y(t_k)'] \in \mathbb{R}^{2n}$, segue imediatamente das equações (7)-(9) que (3)-(5) é assegurada e $u(t) = u(t, t_k)$, $\forall t \in [t_k, t_{k+1})$, $\forall k \in \mathbb{N}$ conforme (2), é reproduzido. Note que o processo começa em $t_0 = 0$ a partir das condições iniciais $\psi(0) = H\psi_0 + J_{d\theta_0}w_d[-1]$ que depende de $\psi_0 = \psi(0^-)$ e de $w_d[-1]$. Esses valores e as entradas exógenas $w_c \in \mathcal{L}_2$ e $w_d \in \ell_2$ são definidos de acordo com o problema de interesse, que será tratado em seguida. O principal objetivo deste trabalho é determinar a lei de controle (2) para problemas que recaem no âmbito de otimização relacionados aos índices de desempenho $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$ em MJLS. Note que, para um dado escalar $\gamma \in \mathbb{R}_+$ e a lei de controle (2), a expressão

$$\rho_\gamma(\psi(0)) = \sup_{\substack{w_c \in \mathcal{L}_2 \\ w_d \in \ell_2}} \|z\|_2^2 - \gamma^2 (\|w_c\|_2^2 + \|w_d\|_2^2) \quad (11)$$

é uma função de $\rho_\gamma(\cdot) : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}_+$ associada ao MJLS híbrido (7)–(9). Assumindo que ele é estável em média quadrática, de (11) e do fato de que $\psi_0 = 0$ e $w_d[-1] = 0$ implica em $\psi(0) = 0$, o problema $\mathcal{H}_\infty$ de modelagem do controle parcialmente amostrado ótimo se reduz à minimização de γ^2 com respeito a $u(\cdot)$ sujeito a $\rho_\gamma(0) \leq 0$. Por outro lado, $\rho_\infty(\psi(0)) = \|z\|_2^2$ segue do fato de que para $\gamma = +\infty$, o problema (11) fornece $w_c^* = 0$ e $w_d^* = 0$. Adicionando as parcelas devido às condições iniciais correspondentes aos impulsos de tempo contínuo $\delta(0^-)$ (delta de Dirac) e de tempo discreto $\delta[k-1]$ (delta de Kronecker) em cada canal da entrada exógena w_c e w_d respectivamente, então a minimização de $\sum_{\ell=1}^{r_c+r_d} \rho_\infty(\psi_\ell(0))$ fornece o controle parcialmente amostrado baseado na otimização do índice $\mathcal{H}_2$.

3 Controle por realimentação de estado

Para um dado $\gamma > 0$, a função $\rho_\gamma(\psi(0))$ segue da solução estacionária da equação de programação dinâmica associada à perturbação de pior caso $w_c^* \in \mathcal{L}_2$ e $w_d^* \in \ell_2$ nas entradas exógenas de tempo contínuo e discreto, respectivamente.

Teorema 1 (Gabriel et al., 2018)

Sejam os escalares $h > 0$, $\gamma > 0$, a condição inicial $\psi(0)$ e as matrizes $L_i \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\forall i \in \mathbb{K}$, dadas. O MJLS híbrido (7)–(9) é estável em média quadrática e a função (11) satisfaz

$$\rho_\gamma(\psi(0)) \leq \sum_{i \in \mathbb{K}} \pi_{i0} \psi(0)' P_i(0) \psi(0) \quad (12)$$

se e somente se existirem funções de matrizes simétricas $P_i(t) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^{2n \times 2n}$, satisfazendo as desigualdades matriciais acopladas

$$\begin{aligned} \dot{P}_i + F_i' P_i + P_i F_i + \gamma^{-2} P_i J_{ci} J_{ci}' P_i \\ + G_i' G_i \leq - \sum_{j \in \mathbb{K}} \lambda_{ij} P_j \end{aligned} \quad (13)$$

$\forall t \in [0, h)$, sujeitas às condições de contorno

$$\begin{aligned} P_i(h) &\geq H' (P_i(0)^{-1} - \gamma^{-2} J_{di} J_{di}')^{-1} H, \\ P_i(0) &> 0, \end{aligned} \quad (14)$$

em que $\gamma^2 I > J_{di}' P_i(0) J_{di}$ para todo $i \in \mathbb{K}$.

Prova: A prova segue de uma adaptação direta do Teorema 1 de (Gabriel et al., 2018), fazendo $S_i = P_i(0) > 0$ e adotando as matrizes do espaço de estado F_i , G_i , J_{ci} , J_{di} e $H_i = H$ definidas como em (10) para todo $i \in \mathbb{K}$. $\square$

Pode ser visto por integração simples que, sempre que existir, qualquer solução das desigualdades acopladas (13) é tal que $P_i(t) > 0$ para todo $t \in [0, h)$ e $i \in \mathbb{K}$, porque as condições de contorno (14) em conjunto com $\gamma^2 I > J_{di}' P_i(0) J_{di}$ impõem que $P_i(h) > 0$ para todo $i \in \mathbb{K}$.

O Teorema 1 fornece o valor exato da função $\rho_\gamma(\cdot)$ sempre que o lado direito da desigualdade (12) for minimizado. Observe que o conjunto de DLMI (13) pode ser convertido em um conjunto de LMI acopladas. Assim, a avaliação da função reduz-se à solução de um problema de programação convexa. No entanto, o problema de síntese de controle que temos que resolver é muito mais difícil porque as matrizes F_i e G_i para todo $i \in \mathbb{K}$ dependem dos ganhos de realimentação de estado L_i , $i \in \mathbb{K}$ fazendo com que a minimização da função $\rho_\gamma(\cdot)$ resulte em um problema não convexo. A maneira de contornar essa dificuldade é particionar a função matricial positiva definida $P_i(t) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ na forma

$$Q_i(t) = P_i(t)^{-1} = \begin{bmatrix} Y_i(t) & U \\ U' & \hat{Y}_i(t) \end{bmatrix}, \quad i \in \mathbb{K}. \quad (15)$$

Ou seja, o elemento da diagonal secundária $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$ deve ser não singular, independente do modo da cadeia de Markov e constante em todo intervalo de tempo $t \in [0, h)$, deixando de satisfazer a parte da necessidade do Teorema 1.

Teorema 2 Sejam os escalares $h > 0$, $\gamma > 0$ e a condição inicial $\psi(0)$ dados. Se existirem funções matriciais $Y_i(t), X_i(t) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$, $W_{ij}(t) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ para todo $j \neq i \in \mathbb{K}$ e matrizes $K_i \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$ satisfazendo as desigualdades diferenciais lineares

$$\begin{bmatrix} R_i & \begin{bmatrix} Y_i C_i' + K_i' D_i' \\ X_i C_i' + K_i' D_i' \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} E_{ci} \\ 0 \\ 0 \\ -\gamma^2 I \end{bmatrix} \\ \bullet & -I & \\ \bullet & \bullet & \end{bmatrix} < 0, \quad (16)$$

$$\begin{bmatrix} W_{ij} + \begin{bmatrix} Y_i & X_i \\ X_i & X_i \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} Y_i & X_j \\ X_i & X_j \end{bmatrix} \\ \bullet & \begin{bmatrix} Y_j & X_j \\ X_j & X_j \end{bmatrix} \end{bmatrix} > 0, \quad (17)$$

em que $R_i = Z_i + \sum_{j \neq i \in \mathbb{K}} \lambda_{ij} W_{ij}$ e

$$Z_i = \begin{bmatrix} -\dot{Y}_i + \text{He}(A_i Y_i + B_i K_i) & A_i X_i + B_i K_i \\ \bullet & \dot{X}_i \end{bmatrix}$$

para todo $t \in [0, h)$, com $\text{He}(X) = X + X'$, sujeitas a condições de contorno iniciais e finais tais que

$$\begin{bmatrix} Y_{i0} & U & Y_{ih} & X_{ih} & 0 \\ \bullet & U + U' - X_{i0} & Y_{ih} & X_{ih} & E_{di} \\ \bullet & \bullet & Y_{ih} & X_{ih} & 0 \\ \bullet & \bullet & \bullet & X_{ih} & 0 \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \gamma^2 I \end{bmatrix} > 0, \quad (18)$$

então, com os ganhos de realimentação de estado $L_i = K_i(U')^{-1}$, $\forall i \in \mathbb{K}$ e

$$P_i(0) = Q_i(0)^{-1} = \begin{bmatrix} Y_{i0} & U \\ \bullet & U' X_{i0}^{-1} U \end{bmatrix}^{-1} > 0, \quad (19)$$

o limite superior (12) é garantido.

Prova: Defina as funções matriciais quadradas não singulares $\Gamma_i = \text{diag}\{I, \hat{Y}_i^{-1}U'\}$ e $X_i = U\hat{Y}_i^{-1}U' > 0, \forall i \in \mathbb{K}$. De (15) tem-se que $Q_i > 0$ se e somente se $Y_i > X_i > 0, \forall i \in \mathbb{K}$. Logo, a partir de Γ_i , de (15) e de manipulações algébricas, nota-se que (17) pode ser reescrita como

$$\begin{bmatrix} W_{ij} + \Gamma'_i Q_i \Gamma_i & \Gamma'_i Q_i \Gamma_j \\ \bullet & \Gamma'_j Q_j \Gamma_j \end{bmatrix} > 0, \forall j \neq i \in \mathbb{K}. \quad (20)$$

Aplicando-se o complemento de Schur no elemento (2, 2) e sabendo-se que $\lambda_{ij} \geq 0, \forall j \neq i \in \mathbb{K}$, então

$$\begin{aligned} \sum_{j \neq i \in \mathbb{K}} \lambda_{ij} W_{ij} &> \sum_{j \neq i \in \mathbb{K}} \lambda_{ij} \Gamma'_i (Q_i Q_j^{-1} Q_i - Q_i) \Gamma_i \\ &= \sum_{j \in \mathbb{K}} \lambda_{ij} \Gamma'_i Q_i Q_j^{-1} Q_i \Gamma_i. \end{aligned} \quad (21)$$

Como (16) e (17) são verdadeiras por hipótese, da definição de X_i , observando-se que $\dot{U} = 0$ e a desigualdade (21), o complemento de Schur aplicado aos elementos (2,2) e (3,3) em (16) leva a

$$\begin{aligned} -\dot{Q}_i + F_i Q_i + Q_i F'_i + \gamma^{-2} J_{ci} J'_{ci} \\ + Q_i G'_i G_i Q_i \leq - \sum_{j \in \mathbb{K}} \lambda_{ij} Q_i Q_j^{-1} Q_i. \end{aligned} \quad (22)$$

para cada $i \in \mathbb{K}$, válida em todo intervalo de tempo $t \in [0, h)$. Adicionalmente, note que (17) implica que $\Gamma'_i Q_i \Gamma_i > 0, \forall i \in \mathbb{K}$ e $\forall t \in [0, h)$. Multiplicando os dois lados de (22) por Q_i^{-1} , verifica-se que a função matricial $P_i(t) = Q_i(t)^{-1} > 0$ existe e satisfaz (13). Por outro lado, analisando-se as condições de contorno, o fato de que $X_{i0} > 0$, onde adota-se $M_i(0) = M_{i0}$ e $M_i(h) = M_{ih}$ para todo $i \in \mathbb{K}$, implica que $U'X_{i0}^{-1}U \geq U + U' - X_{i0}, \forall i \in \mathbb{K}$. Substituindo-se o segundo bloco diagonal de (18) por $U'X_{i0}^{-1}U$ e das definições de Γ_i, Q_i e da matriz H , obtém-se

$$\begin{bmatrix} \Gamma'_{i0} Q_{i0} \Gamma_{i0} & \Gamma'_{i0} H Q_{ih} \Gamma_{ih} & \Gamma'_{i0} J_{di} \\ \bullet & \Gamma'_{ih} Q_{ih} \Gamma_{ih} & 0 \\ \bullet & \bullet & \gamma^2 I \end{bmatrix} > 0 \quad (23)$$

para todo $i \in \mathbb{K}$. Pré e pós multiplicando-se (23) por $\text{diag}\{\Gamma_{i0}^{-1}, \Gamma_{ih}^{-1}, I\}$, o complemento de Schur aplicado ao resultado fornece as condições de contorno do Teorema 1. Finalmente, as matrizes calculadas em $t = 0$ resultam em (19) com $\hat{Y}_{i0} = U'X_{i0}^{-1}U$. Como consequência, o limite superior de (12) é assegurado. A prova está completa. $\square$

Em contraste com a estrutura de controle da forma (1) para a qual o problema de otimização associado é convexo, a da forma (2) impõe um problema não convexo. Para este último caso, uma linearização através de transformações de variáveis pode não existir uma vez que, neste contexto, as estruturas das matrizes do sistema aplicadas a (13) impõem que uma particularização em $P_i(t)$ seja considerada. Neste caso, verifica-se que fazendo-se os blocos fora da diagonal principal

de (15) constantes no tempo e independentes do modo, as matrizes de ganho L_i são perfeitamente recuperadas. Esta imposição faz com que as variáveis matriciais $L_i, \forall i \in \mathbb{K}$ sejam invariantes no tempo, mas introduz algum conservadorismo no resultado final.

4 Controle parcialmente amostrado

Especializemos o resultado do Teorema 2 para lidar com os problemas de síntese de controle de custo garantido $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$ mínimos. O Teorema 2 permite avaliar o custo garantido mínimo associado a cada um desses índices, preservando a convexidade. O próximo corolário trata o caso $\mathcal{H}_\infty$.

Corolário 3 *Seja $h > 0$ dado. O controle por realimentação de estado parcialmente amostrado da forma (2) com custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ mínimo é fornecido pela solução ótima do problema de otimização convexa*

$$\inf_{W_{ij}, X_i, Y_i, K_i, U, \gamma} \{\gamma^2 : (16) - (18)\}. \quad (24)$$

Os ganhos são dados por $L_i = K_i(U')^{-1}, \forall i \in \mathbb{K}$.

Prova: Observe que $\rho_\gamma(0) \leq 0$ é equivalente a dizer que $\|z\|_2^2 - \gamma^2(\|w_c\|_2^2 + \|w_d\|_2^2) \leq 0$, para todo $w_c \in \mathcal{L}_2$ e $w_d \in \ell_2$. Conclui-se que o problema de síntese de controle $\mathcal{H}_\infty$ pode ser formulado como a minimização de γ^2 sujeito às restrições indicadas, fazendo desse corolário uma consequência imediata do Teorema 2. $\square$

Uma maneira simples de resolver o problema convexo (24) é converter as desigualdades diferenciais lineares em LMIs. Os ganhos de custo mínimo garantido são calculados em apenas uma rodada e não como resultado de um algoritmo iterativo convergente. Uma ideia semelhante foi apresentada em (Gabriel et al., 2018) para o caso da estrutura de controle da forma (1). O próximo corolário considera o caso $\mathcal{H}_2$.

Corolário 4 *Seja $h > 0$ dado e defina $\gamma = +\infty$. O controle de realimentação de estado parcialmente amostrado da forma (2) com custo garantido $\mathcal{H}_2$ mínimo é fornecido pela solução ótima do problema de otimização convexa*

$$\inf_{W_{ij}, X_i, Y_i, K_i, V_i, M_i, U} \left\{ \sum_{i \in \mathbb{K}} \pi_{i0} \Phi_i : (16) - (18) \right\}, \quad (25)$$

com $\Phi_i = \text{tr}(V_i) + \text{tr}(M_i)$ em que as variáveis simétricas $V_i \in \mathbb{R}^{r_c \times r_c}$ e $M_i \in \mathbb{R}^{r_d \times r_d}$ satisfazem

$$\begin{bmatrix} V_i & E'_{ci} \\ \bullet & Y_{ih} - X_{ih} \end{bmatrix} > 0, \forall i \in \mathbb{K}, \quad (26)$$

$$\begin{bmatrix} M_i & 0 & E'_{di} \\ \bullet & Y_{i0} & U \\ \bullet & \bullet & U + U' - X_{i0} \end{bmatrix} > 0, \forall i \in \mathbb{K}. \quad (27)$$

Os ganhos são dados por $L_i = K_i(U')^{-1}, \forall i \in \mathbb{K}$.

Prova: Observe que a condição inicial $\psi_\ell(0)$ equivale a fazer cada uma das r_c colunas da matriz $HJ_{c\theta_0}$ correspondendo a impulsos de tempo contínuo $\delta(0^-)$ aplicados a cada canal da entrada exógena w_c e a cada uma das r_d colunas de $J_{d\theta_0}$ correspondendo ao impulso de tempo discreto $\delta[k-1]$ aplicados a cada canal da entrada exógena w_d . As parcelas da soma $\sum_{\ell=1}^{r_c+r_d} \rho_\infty(\psi_\ell(0))$ sendo calculadas com $\gamma = +\infty$ fornecem a função objetivo desejada. Desta forma, do limitante superior (12) segue que

$$\begin{aligned} & \sum_{\ell=1}^{r_c+r_d} \rho_\infty(\psi_\ell(0)) \\ & < \sum_{i \in \mathbb{K}} \pi_{i0} \left(\text{tr}(J'_{ci} Q_{ih}^{-1} J_{ci}) + \text{tr}(J'_{di} Q_{i0}^{-1} J_{di}) \right) \end{aligned} \quad (28)$$

visto que as condições de contorno iniciais e finais (14) impõem $Q_{ih}^{-1} = P_i(h) > H'P_i(0)H$, para todo $i \in \mathbb{K}$. Observe que o cálculo da inversa desta matriz de blocos fornece

$$V_i > J'_{ci} Q_{ih}^{-1} J_{ci} = E'_{ci} (Y_{ih} - X_{ih})^{-1} E_{ci} \quad (29)$$

para cada $i \in \mathbb{K}$, o que reproduz (26). Além disso, (27) é uma condição suficiente para garantir que $M_i > J'_{di} Q_{i0}^{-1} J_{di}$ para todo $i \in \mathbb{K}$ e por consequência a função objetivo em (25). $\square$

Repare que a nova restrição (26) é sempre factível, pois o bloco quadrado definido pela interseção das linhas e colunas 3 e 4 da condição de contorno (18) impõe $Y_{ih} - X_{ih} > 0$, $\forall i \in \mathbb{K}$. Neste caso, a condição suficiente dada por (27) não impõe um aumento de conservadorismo na aplicação do Teorema 2 visto que a condição $U + U' - X_{i0} \leq U'X_{i0}^{-1}U$ já é imposta em (18). Em linhas gerais, as mesmas observações feitas para o problema de síntese de controle $\mathcal{H}_\infty$ são válidas para o caso $\mathcal{H}_2$.

4.1 Controle independente do modo

Para fins de aplicação prática, é importante investigar a situação em que o controlador não tem acesso aos modos da cadeia de Markov do sistema em malha aberta, mas continua sendo capaz de determinar um controle parcialmente amostrado via realimentação de estado. Para isso, basta sintetizar um que seja independente do modo. Assim, é necessário impor que $L_i = L$, $\forall i \in \mathbb{K}$, de tal modo que $u(t, t_k) = L(x(t_k) + E_{d\theta(t_k)} w_d[k-1])$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Para fazer essa síntese basta impor, adicionalmente, que $K_i = K$, $\forall i \in \mathbb{K}$ nos problemas (24) e (25), respectivamente. Fazendo-se isso, o ganho independente do modo é dado por $L_i = K(U')^{-1} = L$, $\forall i \in \mathbb{K}$, como desejado.

4.2 Controle Robusto

O sistema da forma (3)-(5), para o tratamento de incertezas, pode ser caracterizado como um

sistema linear com saltos markovianos politópico dado como

$$\bar{F}_{i\alpha} = \begin{pmatrix} A_{i\alpha} & B_{i\alpha} & E_{ci\alpha} \\ C_{i\alpha} & D_{i\alpha} & E_{di\alpha} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_i, \quad \Lambda_\alpha \in \Omega, \quad (30)$$

$\forall i \in \mathbb{K}$, onde o parâmetro α pertence a um simplex unitário e os conjuntos $\mathcal{M}_i$, $i \in \mathbb{K}$, e Ω são convexos e poliédricos, sendo dessa forma definidos por um certo número de vértices. Observe que as DLMIs do Teorema 2 são lineares em relação aos parâmetros das matrizes $\bar{F}_{i\alpha}$, $i \in \mathbb{K}$, e Λ_α . Dessa forma, as variáveis matriciais são mantidas invariantes no conjunto de incertezas e o custo mínimo garantido pode ser determinado impondo-se as DLMIs dos Corolários 3 e 4 em cada vértice do politopo. Essa estratégia, já bem conhecida, pode ser utilizada para tratar incertezas paramétricas.

5 Exemplo

Considere uma solução linear por partes da forma

$$X_i(t) = X_{ip} + (X_{i(p+1)} - X_{ip}) \left(\frac{t - t_p}{\eta} \right), \quad (31)$$

$t \in [t_p, t_{p+1}]$, para $p = 0, 1, \dots, n_h - 1$, com $X_{ip} > 0$, $\forall i \in \mathbb{K}$ e todo $p = 0, 1, \dots, n_h$. Para a resolução numérica de DLMIs, utilizou-se (31) com a mesma estratégia de (Gabriel et al., 2018), com $n_h = 16$.

O problema a ser estudado consiste em um sistema massa-mola-amortecedor com a estrutura planta-sensor-controlador-atuador na forma da Figura 2 e composto por dois carros sem atrito conectados por um amortecedor e uma mola. O primeiro carro está anexado à parede através de outra mola. A força $w_c(t)$ é a entrada exógena atuando no primeiro carro. A força $u(t, t_k)$, sobre a qual atua a entrada exógena $w_d[k]$, é a entrada de controle incidente sobre o segundo carro. Um exemplo similar na forma da Figura 1 foi proposto em (Lutz, 2014) e resolvido em (Gabriel et al., 2018) com uma matriz de taxa de transição de estado conhecida. Com exceção de $E'_{di} = [0 \ 0 \ 0 \ 1]$, $\forall i \in \mathbb{K}$, que caracteriza w_d atuando apenas sobre a velocidade do segundo carro, as demais matrizes do espaço de estado do sistema e de taxa de transição com o período de tempo discreto $h_d = 20$ [ms] podem ser obtidas em (Lutz, 2014) e (Gabriel et al., 2017).

Para considerar a possível perda de pacotes na rede, o sistema em malha aberta é modelado por um MJLS com dois modos $\mathbb{K} = \{1, 2\}$ que representam perda de pacote e sucesso na transmissão, respectivamente. A distribuição de probabilidade inicial $\pi_0 = [0.4 \ 0.6]'$ foi adotada. O efeito da limitação de banda afeta somente a comunicação entre o sensor e o controlador implicando em uma lei de controle parcialmente amostrado da forma (2) dentro de cada intervalo de tempo $[t_k, t_{k+1})$ tal que $h = t_{k+1} - t_k = 200$ [ms], $\forall k \in \mathbb{N}$. Do Corolário 3, este controle impõe um custo garantido

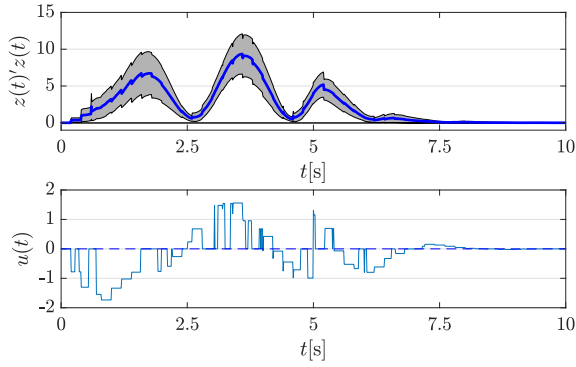


Figura 3: Simulação temporal

de $\gamma = 6.24$ associado às matrizes de ganhos $L_1 = [0 \ 0 \ 0 \ 0]$ e $L_2 = [0.093 \ -1.009 \ -0.508 \ -2.420]$. Observe que L_1 nulo decorre de $B'_1 = [0 \ 0 \ 0 \ 0]$, que modela a perda de pacotes, fazendo com que os ganhos do controlador não tenham nenhuma atuação sobre o sistema quando este opera no modo 1. Considerando $w_c(t) = \sin(\pi t/2)$ e $w_d(t_k) = \sin(\pi t_k/2)$ para todo $t, t_k \in [0, 5]$ e zero nos demais instantes de tempo, o sistema em malha fechada foi simulado com 2000 rodadas de Monte Carlo no intervalo $t \in [0, 10]$. A Figura 3 mostra na parte superior todas as trajetórias, dentro do intervalo de um desvio padrão, da norma Euclidiana quadrada da saída e na parte inferior, o sinal de controle correspondente à última rodada. Como esperado, todas as trajetórias vão para zero após $t = 5$ [s], quando as perturbações terminam.

6 Conclusão

Abordou-se uma estrutura de controle em que apenas a variável de estado é amostrada, enquanto que o parâmetro estocástico associado à matriz de ganho não é afetado por esta operação. Neste caso, obteve-se condições suficientes para estabilidade em média quadrática e avaliação de desempenho no contexto de sistemas de controle parcialmente amostrado via realimentação de estado sujeitos a entradas exógenas em tempo contínuo e discreto. Mostrou-se como adaptar a modelagem para resolver sistemas sujeitos a incertezas paramétricas utilizando uma abordagem politópica. As condições de projeto são convexas e simples quando consideradas as desigualdades diferenciais lineares, dentro de um intervalo de tempo definido por um período de amostragem. Assim, obteve-se limitantes superiores para índices de desempenho baseados em normas $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$. Períodos de amostragem variáveis são deixados para trabalhos futuros.

Agradecimentos

Os autores agradecem ao CNPq (303887/2014-1) e à FAPESP (2016/06343-5) pelo apoio financeiro.

Referências

- Costa, O. L. V., Fragoso, M. D. and Marques, R. P. (2006). *Discrete-time Markov jump linear systems*, Springer Science & Business Media.
- Costa, O. L. V., Fragoso, M. D. and Todorov, M. G. (2013). *Continuous-time Markov jump linear systems*, Springer Science & Business Media.
- Gabriel, G., Geromel, J. and Grigoriadis, K. (2017). Optimal $\mathcal{H}_\infty$ state feedback sampled-data control design for markov jump linear systems, *International Journal of Control* pp. 1–11.
- Gabriel, G. W., Gonçalves, T. R. and Geromel, J. C. (2018). Optimal and robust sampled-data control of markov jump linear systems: a differential LMI approach, *IEEE Transactions on Automatic Control*.
- Lutz, C. C. (2014). *Switched Markov jump linear systems: Analysis and control synthesis*, PhD thesis, Virginia Polytechnic Institute and State University.
- Morais, C. F., Braga, M. F., Oliveira, R. C. and Peres, P. L. (2016). $\mathcal{H}_\infty$ and $\mathcal{H}_2$ control design for polytopic continuous-time markov jump linear systems with uncertain transition rates, *International Journal of Robust and Nonlinear Control* **26**(3): 599–612.
- Oliveira, R. C., Vargas, A. N., do Val, J. B. and Peres, P. L. (2014). Mode-Independent $\mathcal{H}_2$ -control of a DC motor modeled as a markov jump linear system, *IEEE Transactions on Control Systems Technology* **22**(5): 1915–1919.
- Rodrigues, C. G., Todorov, M. G. and Fragoso, M. D. (2017). $\mathcal{H}_\infty$ control of continuous-time markov jump linear systems with detector-based mode information, *International Journal of Control* **90**(10): 2178–2196.
- Todorov, M. G. and Fragoso, M. D. (2016). A new look at the robust control of discrete-time markov jump linear systems, *International Journal of Control* **89**(3): 518–534.
- Wu, Z.-G., Shi, P., Shu, Z., Su, H. and Lu, R. (2017). Passivity-based asynchronous control for markov jump systems, *IEEE Transactions on Automatic Control* **62**(4): 2020–2025.
- Yang, T. C. (2006). Networked control system: a brief survey, *IEE Proceedings-Control Theory and Applications* **153**(4): 403–412.