

CONTROLE $\mathcal{H}_\infty$ POR REALIMENTAÇÃO ESTÁTICA DE SAÍDA PARA SISTEMAS LINEARES COM SALTOS MARKOVIANOS COM OBSERVAÇÃO PARCIAL

A. M. DE OLIVEIRA*, O. L. V. COSTA*, J. DAAFOUZ†

**Departamento de Engenharia de Telecomunicações e Controle
Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
CEP: 05508-010 - São Paulo, Brasil*

†*Université de Lorraine, CNRS, CRAN, F-54000
2 avenue de la forêt de Haye
Vandœuvre-les-Nancy, Cedex 54516, France*

Emails: amarcorin@gmail.com, marcorin@usp.br, oswaldo@lac.usp.br,
Jamal.Daafouz@univ-lorraine.fr

Abstract— In this work, we study the design of $\mathcal{H}_\infty$ static output feedback controllers for Markov jump linear systems in a context of hidden Markov models. We present a general formulation in which the system depends both on a Markov chain and an observed process, and we discuss some cases of interest that arise in Networked Control Systems. In this context, we derive sup-optimal linear matrix inequalities conditions for the design of $\mathcal{H}_\infty$ static controllers that depend only on the observed process. In order to illustrate our results, we present a numerical example in the context of Networked Control Systems.

Keywords— Markov jump linear systems, hidden Markov models, $\mathcal{H}_\infty$ static control, linear matrix inequalities

Resumo— Nesse trabalho, estudamos a síntese de controladores $\mathcal{H}_\infty$ estáticos por realimentação de saída para sistemas lineares com saltos markovianos no contexto dos modelos ocultos de Markov. Apresentamos uma formulação geral na qual o sistema depende do modo da cadeia e do processo de observação, e discutimos alguns casos de interesse que surgem em Controle Através da Rede. Nesse contexto, derivamos condições sub-ótimas em termos de desigualdades matriciais lineares para a síntese de controladores $\mathcal{H}_\infty$ estáticos que dependem somente do processo de observação. Para ilustrar nossos resultados, apresentamos um exemplo numérico no contexto de Controle Através da Rede.

Palavras-chave— Sistemas lineares com saltos markovianos, modelos ocultos de Markov, controle estático $\mathcal{H}_\infty$, desigualdades matriciais lineares

1 Introdução

O estudo de sistemas sujeitos a variações abruptas em sua dinâmica vem recebendo bastante atenção na literatura. Particularmente, o uso de sistemas lineares com saltos markovianos (do inglês, *Markov jump linear systems*, MJLS), se tornou uma importante ferramenta com aplicações em Controle Através da Rede (do inglês, *Networked Control Systems*, NCS), robótica, entre outros. Atualmente, existe um número considerável de trabalhos em MJLS, como por exemplo, Costa et al. (2005), Dragan et al. (2013) e suas referências.

Em MJLS, a disponibilidade do modo de operação do sistema para o controle é um aspecto fundamental. Além dos casos clássicos, como por exemplo, o dependente do modo em Costa et al. (2005) e o caso de observação em *clusters* e independente do modo, veja por exemplo, do Val et al. (2002), foram introduzidos modelos alternativos de disponibilidade do modo que englobam aplicações de interesse. Em Costa et al. (2015) foi considerada a chamada *abordagem do detector*, onde encontra-se disponível para o controle somente uma estimativa $\hat{\theta}(k)$ da cadeia de Markov $\theta(k)$, no espírito dos chamados modelos ocultos de Markov (do inglês, *hidden Markov models*, HMM). A abordagem do detector pode ser também chamada

de *observação assíncrona*, por exemplo, como em Song et al. (2017), ou de *sistemas markovianos de cadeia oculta*, por exemplo, veja de Oliveira and Costa (2018). Em Aberkane et al. (2008) foi estudado o controle estático misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ a tempo contínuo considerando que o processo de detecção é modelado por outra cadeia de Markov condicionada à cadeia original. Ambos os trabalhos Costa et al. (2015) e Aberkane et al. (2008) focam nos sistemas tolerantes a falhas. Alternativamente, o trabalho Ogura et al. (2018) considerou um processo de observação onde somente alguns modos da cadeia original podem ser eventualmente observados.

As contribuições deste trabalho são condições de síntese na forma de desigualdades matriciais lineares (do inglês, *linear matrix inequalities*, LMIs) para controladores $\mathcal{H}_\infty$ estáticos e sub-ótimos que dependem somente do processo de observação $\hat{\theta}(k)$ de Costa et al. (2015). Nesse contexto, apresentamos uma formulação mais geral a de Costa et al. (2015), onde o processo de comutação da planta depende de ambos $\theta(k)$ e $\hat{\theta}(k)$, e assim alguns casos de interesse podem ser estudados. O foco deste trabalho é em NCS, onde as perdas de pacote são comumente caracterizadas como modelos ocultos de Markov como, por exemplo, o modelo

de Gilbert-Elliott em (Marcondes, 2005; Gonçalves et al., 2010). Nossas condições são baseadas no procedimento clássico de Peaucelle and Arzelier (2001), Mehdi et al. (2004) e Morais et al. (2014) para obter uma formulação convexa para a síntese de controladores estáticos que estabilizem estocasticamente o sistema em malha fechada e garantam um limitante superior para sua norma $\mathcal{H}_\infty$. Um exemplo ilustrativo em NCS é apresentado, onde a perda do sinal medido é representada pelo modelo de Gilbert-Elliott.

Este trabalho é organizado conforme segue. A notação é introduzida na Seção 2, as análises preliminares como a definição do sistema, a classe de controladores admissíveis, as definições de estabilidade estocástica e norma $\mathcal{H}_\infty$, e a formulação do problema são apresentados na Seção 3. Na Seção 4 são apresentadas as condições de síntese de controladores estáticos $\mathcal{H}_\infty$ por meio do procedimento de dois estágios ilustrado por um algoritmo. O exemplo numérico no contexto de NCS e HMM é apresentado na Seção 5 e nossas observações finais são dadas na Seção 6.

2 Notação

A notação adotada é padrão. O espaço euclidiano de dimensão n é representado por $\mathbb{R}^n$. O espaço das matrizes de dimensão $n \times m$ e dos operadores lineares é representado por $\mathbb{B}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$, e por simplicidade, adotamos $\mathbb{B}(\mathbb{R}^n) := \mathbb{B}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. O sinal $'$ representa a operação de transposição. O operador identidade de dimensão n é representado por I_n , o operador nulo, por 0 , e a matriz composta por blocos diagonais, por $\text{diag}(\cdot)$. Define-se $\text{Her}(G) := G + G'$ para $G \in \mathbb{B}(\mathbb{R}^n)$. Para N e M inteiros positivos, os conjuntos $\mathbb{N}$ e $\mathbb{M}$ são definidos por $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots, N\}$ e $\mathbb{M} := \{1, 2, 3, \dots, M\}$, respectivamente. O conjunto $\mathbb{H}^{n,m}$ representa o espaço linear de uma sequência de N matrizes reais $V = \{V_1, V_2, \dots, V_N\}$, $V_i \in \mathbb{B}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, $i \in \mathbb{N}$, e adota-se $\mathbb{H}^n := \mathbb{H}^{n,n}$ e $\mathbb{H}^{n+} := \{V \in \mathbb{H}^n; V_i \geq 0, i = 1, \dots, N\}$. Para $P, V \in \mathbb{H}^{n+}$, escreve-se $P > V$ se $P_i > V_i$, $i \in \mathbb{N}$. Em um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \text{Prob})$, o operador $\mathbf{E}(\cdot)$ representa o valor esperado. O espaço de sinais cuja norma $\|w\|_2^2 := \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{E}(\|w(k)\|^2)$ é finita é representado por $l_2^r(\mathcal{F})$.

3 Análises preliminares

Neste trabalho é considerado o seguinte MJLS $\mathcal{G}$ com cadeia oculta em um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \text{Prob})$,

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A_{\hat{\theta}(k)}x(k) + B_{\hat{\theta}(k)}u(k) + J_{\hat{\theta}(k)}w(k) \\ y(k) &= L_{\hat{\theta}(k)}x(k) + H_{\hat{\theta}(k)}w(k) \\ z(k) &= C_{\hat{\theta}(k)}x(k) + D_{\hat{\theta}(k)}u(k) + E_{\hat{\theta}(k)}w(k) \end{aligned} \quad (1)$$

onde $x(k) \in \mathbb{R}^n$ é o estado, $u(k) \in \mathbb{R}^m$ é a entrada de controle, $w(k) \in \mathbb{R}^r$ é a entrada exógena, $y(k) \in \mathbb{R}^q$ é a saída medida, e $z(k) \in \mathbb{R}^p$ é a saída controlada.

A variável estocástica $\tilde{\theta}(k) = (\theta(k), \hat{\theta}(k))$ é composta por uma cadeia de Markov oculta $\theta(k)$ com espaço de estados $\mathbb{N}$ e probabilidade de transição $p_{ij} = \text{Prob}(\theta(k+1) = j \mid \theta(k) = i)$, bem como por uma saída observada $\hat{\theta}(k)$ e condicionada em $\theta(k)$ de forma que $\alpha_{il} = \text{Prob}(\hat{\theta}(k) = l \mid \theta(k) = i)$, onde $\mathbb{M}$ é o conjunto de saídas de $\hat{\theta}(k)$. Define-se também $\mathbb{M}_{\theta(k)} = \{l \in \mathbb{M} : \alpha_{\theta(k)l} > 0\}$ que representa os possíveis valores de $\hat{\theta}(k)$ para um dado modo da cadeia de Markov.

O objetivo desse trabalho é sintetizar controladores estáticos por realimentação de saída que dependam somente do processo de observação $\hat{\theta}(k)$. Neste caso, o controlador assume a seguinte forma

$$u(k) = K_{\hat{\theta}(k)}y(k), \quad (2)$$

e define-se $K := (K_1, \dots, K_M)$. Conectando-se (1) e (2), obtém-se o seguinte sistema em malha fechada representado por $\mathcal{G}_K$

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \tilde{A}_{\hat{\theta}(k)}x(k) + \tilde{J}_{\hat{\theta}(k)}w(k) \\ z(k) &= \tilde{C}_{\hat{\theta}(k)}x(k) + \tilde{E}_{\hat{\theta}(k)}w(k) \end{aligned} \quad (3)$$

onde as matrizes do sistema (3) são dadas por

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{il} &:= A_{il} + B_{il}K_lL_{il}, & \tilde{J}_{il} &:= J_{il} + B_{il}K_lH_{il}, \\ \tilde{C}_{il} &:= C_{il} + D_{il}K_lL_{il}, & \tilde{E}_{il} &:= E_{il} + D_{il}K_lH_{il}, \end{aligned} \quad (4)$$

para todo $i \in \mathbb{N}$, $l \in \mathbb{M}_i$.

Nota 1 O modelo de $\tilde{\theta}(k)$ recai na chamada abordagem do detector apresentada em Costa et al. (2015) se restringirmos $\hat{\theta}(k) = \theta(k)$ e, portanto, generaliza o caso de observação dependente do modo, em clusters, e independente do modo. Por outro lado, no presente trabalho apresentamos outra interpretação de interesse para o campo de NCS onde perdas de pacotes em rajada podem ser representadas por modelos ocultos de Markov, como o de Gilbert-Elliott, veja, por exemplo, Marcondes (2005) e Gonçalves et al. (2010). A adequação do MJLS em (3), bem como a aplicação utilizando o canal de Gilbert-Elliott será detalhada no exemplo numérico apresentado na Seção 5.

Na sequência apresentamos alguns conceitos básicos para MJLS, como o da estabilidade estocástica (do inglês, *stochastically stability*, SS), adaptado de Costa et al. (2015).

Definição 1 (Estabilidade estocástica) O sistema (3) é dito estocaticamente estável (SS) para uma dada lei de controle (2) e $w \equiv 0$ se $\|x\|_2^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{E}(\|x(k)\|^2) < \infty$, para toda condição inicial x_0 com segundo momento finito e todo modo inicial θ_0 . $\square$

Considerando a Definição 1, caracterizamos o conjunto de controladores admissíveis $\mathbb{K}$ por

$$\mathbb{K} := \{K \text{ como em (2) tal que (3) seja SS}\}. \quad (5)$$

Em Costa et al. (2015) foi apresentado um conjunto de desigualdades de Lyapunov acopladas que são usadas neste trabalho para verificar a SS de (3). Para isso, considere os seguintes operadores para $V \in \mathbb{H}^n$ e $\mathcal{A}_{il} \in \mathbb{B}(\mathbb{R}^n)$,

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_i(V) &:= \sum_{j \in \mathbb{N}} p_{ij} V_j, \\ \mathcal{L}_i(V) &:= \sum_{l \in \mathbb{M}_i} \alpha_{il} \mathcal{A}'_{il} \mathcal{E}_i(V) \mathcal{A}_{il}, \end{aligned} \quad (6)$$

para todo $i, j \in \mathbb{N}$, e $\mathcal{E}, \mathcal{L} \in \mathbb{B}(\mathbb{H}^n)$. Escolhendo $\mathcal{A}_{il} = \tilde{A}_{il}$ em (6) para $\tilde{A}_{il}$ dado em (4), reproduzimos o seguinte teorema de (Costa et al., 2015).

Teorema 1 *As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) $K \in \mathbb{K}$.

(ii) Existe $P \in \mathbb{H}^{n+}$, $P > 0$, tal que

$$P - \mathcal{L}(P) > 0, \quad (7)$$

para um dado K . $\square$

Dada a definição de estabilidade estocástica, discutiremos a definição de norma $\mathcal{H}_\infty$ para MJLS, retirada de de Oliveira and Costa (2018).

Definição 2 (Norma $\mathcal{H}_\infty$) Para $K \in \mathbb{K}$, assumindo-se a condição inicial $x_0 = 0$, a norma $\mathcal{H}_\infty$ de (3) é definida como

$$\|\mathcal{G}_K\|_\infty := \sup_{0 \neq w \in l_2^+(\mathcal{F}), \theta_0 \in \mathbb{N}} \frac{\|z\|_2}{\|w\|_2}.$$

$\square$

A Definição 2 se torna equivalente a definição usual da norma $\mathcal{H}_\infty$ para o caso sem saltos.

Em Todorov et al. (2018), foi apresentado o *bounded-real lemma* para sistemas markovianos de cadeia oculta, reproduzido a seguir.

Teorema 2 (Bounded-real lemma) Temos que $K \in \mathbb{K}$ e $\|\mathcal{G}_K\|_\infty < \gamma$ se existirem $P \in \mathbb{H}^{n+}$, tais que

$$\begin{bmatrix} P_i & 0 \\ 0 & \gamma^2 I \end{bmatrix} > \sum_{l \in \mathbb{M}_i} \alpha_{il} \Upsilon(P), \quad (8)$$

$$\Upsilon(P) := \begin{bmatrix} \tilde{A}_{il} & \tilde{J}_{il} \\ \tilde{C}_{il} & \tilde{E}_{il} \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} \mathcal{E}_i(P) & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{A}_{il} & \tilde{J}_{il} \\ \tilde{C}_{il} & \tilde{E}_{il} \end{bmatrix},$$

para todo $i \in \mathbb{N}$. $\square$

A partir dessas definições, apresentamos formalmente o objetivo deste trabalho: encontrar controladores estáticos em (2) tais que $K \in \mathbb{K}$ e $\|\mathcal{G}_K\|_\infty < \gamma$ para um dado $\gamma > 0$. Outra formulação de interesse é obter o controlador que fornece o menor valor de custo garantido γ ,

$$\inf_{K \in \mathbb{K}} \{\gamma^2 : \text{sujeito a (8)}\}. \quad (9)$$

O problema de otimização em (9) é não convexo e de difícil solução. Sabe-se que, mesmo para sistemas lineares e invariantes no tempo, o problema de síntese de controladores estáticos possui dificuldade considerável, por exemplo, veja as discussões em Sadabadi and Peaucelle (2016) e referências. Dessa forma, derivamos uma solução subótima para (9) por meio do chamado algoritmo de dois estágios proposto em Peaucelle and Arzelier (2001) and Mehdi et al. (2004) e estendido para MJLS, por exemplo, em Moraes et al. (2014).

Para as discussões da Seção 4, dado $F := (F_1, \dots, F_M)$, definimos o seguinte conjunto

$$\mathbb{F} := \{F : (6) \text{ para } \mathcal{A}_{il} = A_{il} + B_{il}F_l\},$$

que representa o conjunto de ganhos por realimentação de estados que estabiliza (1) caso $x(k)$ estivesse disponível para o controle.

4 Resultados

Nesta seção, apresentamos o resultado deste trabalho, isto é, uma aproximação para o problema em (9). Considere as seguintes desigualdades para todo $i \in \mathbb{N}$, $l \in \mathbb{M}_i$ e um dado $F \in \mathbb{F}$,

$$\begin{bmatrix} P_i & \bullet \\ 0 & \gamma^2 I \end{bmatrix} > \sum_{l \in \mathbb{M}_i} \alpha_{il} \begin{bmatrix} M_{il}^{(1)} & \bullet \\ M_{il}^{(2)} & M_{il}^{(3)} \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$\begin{bmatrix} M_{il}^{(1)} & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ M_{il}^{(2)} & M_{il}^{(3)} & \bullet & \bullet & \bullet \\ G_{il}A_{il}^{(F)} & G_{il}J_{il} & \Phi_{il} & \bullet & \bullet \\ C_{il}^{(F)} & E_{il} & 0 & I & \bullet \\ \Gamma_{il} & Y_l H_{il} & B_{il}' G_{il}' & D_{il}' & \Psi_{il} \end{bmatrix} > 0, \quad (11)$$

onde $A_{il}^{(F)} = A_{il} + B_{il}F_l$, $C_{il}^{(F)} = C_{il} + D_{il}F_l$, $\Gamma_{il} = -X_l F_l + Y_l L_{il}$, $\Phi_{il} = \text{Her}(G_{il}) - \mathcal{E}_i(P)$, e $\Psi_{il} = -\text{Her}(X_l)$. O conjunto de variáveis de (10)-(11) é denotado por

$$\xi = \{M_{il}^{(1)}, M_{il}^{(2)}, M_{il}^{(3)}, G_{il}, P_i, X_l, Y_l\} \cup \sigma$$

onde $\sigma = \{\gamma_a\}$, $\gamma_a := \gamma^2$, se consideramos γ como uma variável, e $\sigma = \emptyset$, caso contrário. O conjunto de todas as possíveis soluções de (10)-(11) é representado por

$$\Xi(F) = \{\xi : (10) - (11)\}.$$

Nesse contexto, o próximo teorema, inspirado em Moraes et al. (2014) introduz o resultado deste artigo.

Teorema 3 Para um dado $F \in \mathbb{F}$, se $\xi \in \Xi(F)$, então escolhendo-se $K_l = X_l^{-1}Y_l$ para todo $l \in \mathbb{M}$, temos que $K \in \mathbb{K}$ e $\|\mathcal{G}_K\|_\infty < \gamma$. $\square$

Prova: Considere que (10)-(11) sejam satisfeitas. Nota-se que $-\text{Her}(X_l) > 0$, o que implica que X_l é invertível. Dessa forma (11) pode ser reescrito como $R_{il} + \text{Her}(U'X_lV_{il}) > 0$, onde

$$R_{il} := \begin{bmatrix} M_{il}^{(1)} & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ M_{il}^{(2)} & M_{il}^{(3)} & \bullet & \bullet & \bullet \\ G_{il}A_{il}^{(F)} & G_{il}J_{il} & \Phi_{il} & \bullet & \bullet \\ C_{il}^{(F)} & E_{il} & 0 & I & \bullet \\ 0 & 0 & B_i'G_{il}' & D_{il}' & 0 \end{bmatrix}, \quad (12)$$

bem como $U := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix}$ e $V_{il} = \begin{bmatrix} S_{il} & T_{il} & 0 & 0 & -I \end{bmatrix}$. Define-se a matriz

$$\mathcal{N}(S, T)' := \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 & S_{il}' \\ 0 & I & 0 & 0 & T_{il}' \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 \end{bmatrix},$$

para $S_{il} := K_l L_{il} - F_l$ e $T_{il} := K_l H_{il}$, $K_l = X_l^{-1}Y_l$. Note que $V_{il}\mathcal{N}(S, T) = 0$ e $U\mathcal{N}(0, 0)$. Multiplicando-se (12) pela esquerda por $\mathcal{N}(S, T)'$ e pela direita por $\mathcal{N}(S, T)$, considerando-se que $G_{il}\mathcal{E}_i(P)^{-1}G_{il} \geq \Phi_{il}$ (ver de Oliveira et al. (1999)), bem como aplicando-se na desigualdade resultante a transformação de congruência $\text{diag}(I_n, I_r, G_{il}^{-1}, I_n, I_m)$, obtém-se

$$\begin{bmatrix} M_{il}^{(1)} & \bullet & \bullet & \bullet \\ M_{il}^{(2)} & M_{il}^{(3)} & \bullet & \bullet \\ A_{il}^{(F)} + B_{il}S_{il} & J_{il} + B_{il}T_{il} & \mathcal{E}_i(P)^{-1} & \bullet \\ C_{il}^{(F)} + D_{il}S_{il} & E_{il} + D_{il}T_{il} & 0 & I \end{bmatrix} > 0. \quad (13)$$

Portanto, pelo Lema da Projeção, veja por exemplo, Boyd and Vandenberghe (2004), temos que (11) é satisfeita somente se $\mathcal{N}(S, T)'R_{il}\mathcal{N}(S, T) > 0$ e $\mathcal{N}(0, 0)'R_{il}\mathcal{N}(0, 0) > 0$ forem conjuntamente satisfeitas (note que ambas as desigualdades podem ser obtidas de (13)). Considerando (13) com $S_{il} = 0$ e $T_{il} = 0$, temos que uma condição necessária para a factibilidade de (11) é que $F \in \mathbb{F}$. Por outro lado, note que $A_{il}^{(F)} + B_{il}S_{il} = \tilde{A}_{il}$, $J_{il} + B_{il}T_{il} = \tilde{J}_{il}$, $C_{il}^{(F)} + D_{il}S_{il} = \tilde{C}_{il}$, e $E_{il} + D_{il}T_{il} = \tilde{E}_{il}$ em (4). Portanto, aplicando-se o complemento de Schur em (13) e considerando (10), obtém-se (8), e assim $K \in \mathbb{K}$ e $\|\mathcal{G}_K\|_\infty < \gamma$. $\square$

Nota-se que a factibilidade de (10)-(11) depende da escolha de F , portanto caso $\Xi(F) = \emptyset$, faz-se necessário obter-se um novo ganho F para uma nova tentativa. Esses podem ser calculados (após pequenas modificações para incorporar a influência de $\hat{\theta}(k)$ no sistema (1)), por exemplo, através das condições apresentadas em Costa et al.

(2015), Todorov et al. (2018) e de Oliveira and Costa (2018). Dessa forma, o problema de otimização (9) pode ser aproximado por

$$\inf_{\xi \in \Xi(F)} \{\gamma_a : (10) - (11)\}. \quad (14)$$

para $\gamma^2 = \gamma_a$ em (10). Ilustramos no seguinte algoritmo o procedimento de dois estágios inspirado em Morais et al. (2014) para encontrar o ganho estático de realimentação de saída $K \in \mathbb{K}$.

Algoritmo de dois estágios

- (1) Calcule um conjunto de ganhos F por meio dos resultados em Costa et al. (2015), de Oliveira and Costa (2018) e Todorov et al. (2018);
- (2) Use F como entrada em (14) e calcule K_l para todo $l \in \mathbb{M}$.

Nota 2 O caso do detector de (Costa et al., 2015) é recuperado se $\tilde{\theta}(k) = \theta(k)$, e assim $A_{il} = A_i$, $B_{il} = B_i$, $J_{il} = J_i$, $L_{il} = L_i$, $H_{il} = H_i$, $C_{il} = C_i$, $D_{il} = D_i$, e $E_{il} = E_i$ em (10)-(11). Outras situações de interesse podem ser representadas, por exemplo, considerando $L_{il} = L_l$ e $H_{il} = H_l$ em (10)-(11). A motivação deste modelo será ilustrada na sequência, na Seção 5.

5 Exemplo numérico

No exemplo numérico desta seção, considera-se o controle de um *batch reactor* através de uma rede de comunicação discreta modelada pelo canal de Gilbert-Elliott. Este é ilustrado pela Figura 1, veja, por exemplo Gonçalves et al. (2010). Nesse

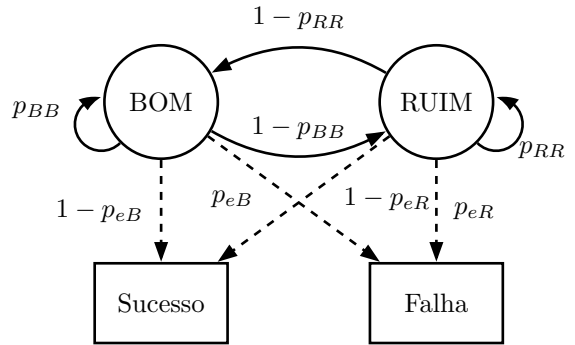


Figura 1: O canal de Gilbert-Elliott.

caso, define-se uma cadeia de Markov $\theta(k)$ com espaço de estados $\mathbb{N} = \{1, 2\}$, onde $\theta(k) = 1$ representa o estado BOM e $\theta(k) = 2$ representa o estado RUIM da Figura 1. Alternativamente, o processo de falha $\hat{\theta}(k)$ possui espaço de estados $\mathbb{M} = \{1, 2\}$, onde $\hat{\theta}(k) = 1$ representa Sucesso de envio do sinal e $\hat{\theta}(k) = 2$, Falha de envio. Neste caso, considerando os dados fornecidos em Marcondes (2005) para um canal de relação sinal/ruído de 5 dB, podemos construir as seguintes

matrizes de probabilidades de transição e probabilidades condicionais

$$[p_{ij}] = \begin{bmatrix} 0.925 & 0.075 \\ 0.380 & 0.620 \end{bmatrix}, [\alpha_{il}] = \begin{bmatrix} 1 - p_{eB} & p_{eB} \\ 1 - p_{eR} & p_{eR} \end{bmatrix},$$

isto é, $p_{BB} = 0.925$, $p_{RR} = 0.620$, e $p_{eB} = 0.020$ e $p_{eR} = 0.2750$. Nesse contexto, considera-se uma adaptação do modelo de *batch reactor* de Walsh et al. (2002) discretizado por um segurador de ordem zero de período de amostragem $T_s = 100$ ms. Assume-se que os sinais dos sensores desse sistema são enviados pelo canal de Gilbert-Elliott descrito pela Figura 1. Neste caso, as matrizes de (1) são dadas por

$$A_{il} = \begin{bmatrix} 1.1782 & 0.0015 & 0.5116 & -0.4033 \\ -0.0515 & 0.6619 & -0.0110 & 0.0613 \\ 0.0762 & 0.3351 & 0.5606 & 0.3824 \\ -0.0006 & 0.3353 & 0.0893 & 0.8494 \end{bmatrix},$$

$$B'_{il} = \begin{bmatrix} 0.0045 & 0.4672 & 0.2132 & 0.2131 \\ -0.0876 & 0.0012 & -0.2353 & -0.0161 \end{bmatrix},$$

$$J'_{il} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, C_{il} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

bem como $D'_{il} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $E_{il} = 0_{2 \times 2}$, para todo $i \in \mathbb{N}$, $l \in \mathbb{M}_i$. Note que esse tipo de modelagem é comumente utilizado em NCS, por exemplo, em Gonçalves et al. (2010), pois nesse caso considera-se que a única influência do canal ocorre nos sensores. Portanto modela-se a saída medida $y(k)$ por

$$L_{\hat{\theta}(k)} = L_{\hat{\theta}(k)}, H_{\hat{\theta}(k)} = H_{\hat{\theta}(k)},$$

isto é, as matrizes do sensor dependem somente do processo de falha $\hat{\theta}(k)$. Nesse caso, temos que $L_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $H_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0.1 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix}$, para $\hat{\theta}(k) = 1$ (sem falha), bem como $L_2 = 0_{2 \times 4}$ e $H_2 = 0_{2 \times 2}$ para $\hat{\theta}(k) = 2$ (com falha). Assume-se que o controlador consegue medir o valor de $\hat{\theta}(k)$ por meio de um protocolo que permite a detecção da falha, um pressuposto utilizado em Gonçalves et al. (2010) e Gonçalves et al. (2012).

Considerando as condições de síntese dadas em Costa et al. (2015) (Corolário 1), calcula-se, através do LMI Control Toolbox em (Gahinet et al., 1995), os seguintes ganhos de realimentação de estados no primeiro passo do Algoritmo de Dois Estágios,

$$F_1 = \begin{bmatrix} 0.9462 & -1.4785 & 0.1604 & -1.7785 \\ 4.6510 & 0.0228 & 3.4294 & -1.8617 \end{bmatrix},$$

$$F_2 = \begin{bmatrix} 0.5572 & -1.4534 & 0.0887 & -1.0891 \\ 2.8656 & 0.0781 & 3.0050 & -0.2395 \end{bmatrix}.$$

Para o segundo passo do Algoritmo, a solução de (14) é $\gamma^* = 1.5922$ e os controladores estáticos são

dados por

$$K_1 = \begin{bmatrix} -0.2672 & -1.7463 \\ 2.3812 & -0.1011 \end{bmatrix}$$

e $K_2 = 0_{2 \times 2}$. Nota-se que o procedimento de manipulação da cadeia oculta da Figura 1 em Gonçalves et al. (2010) e Gonçalves et al. (2012) não é mais necessário ao se aplicar diretamente o modelo de observação parcial adotado neste trabalho.

Por outro lado, consideramos agora o resultado de (Moraes et al., 2014) para o caso de agrupamento em *clusters*. Nesta situação faz-se necessário definir uma nova cadeia de Markov $\bar{\theta}(k)$ de quatro estados que representam as situações de (1) BOM-Falha, (2) BOM-Sucesso, (3) RUIM-Falha e (4) RUIM-Sucesso. A matriz de probabilidades de transição é calculada através da combinação das probabilidades p_{BB} , p_{RR} , p_{eB} e p_{eR} . A clusterização é realizada de acordo com o sucesso (1) ou a falha de transmissão (2), dada portanto por $\bar{\mathbb{N}}^{(1)} = \{2, 4\}$ e $\bar{\mathbb{N}}^{(2)} = \{1, 3\}$. Considerando o mesmo controlador por realimentação de estados utilizado anteriormente no primeiro estágio como entrada para as condições em (Moraes et al., 2014) (para o caso onde a matriz de probabilidades de transição é precisamente conhecida) e minimizando o custo garantido $\bar{\gamma}$, obtém-se o seguinte controlador

$$\bar{K}_1 = \begin{bmatrix} -0.1480 & -1.6978 \\ 2.4638 & -0.0958 \end{bmatrix}$$

e $\bar{K}_2 = 0_{2 \times 2}$, para um custo garantido mínimo de $\bar{\gamma}^* = 1.7621$. Portanto, para este exemplo, as condições do Teorema 3 forneceram um custo garantido 9.6% inferior, aproximadamente, comparado com o resultado de (Moraes et al., 2014).

6 Conclusão

Apresentamos nesse trabalho uma modificação da abordagem do detector de (Costa et al., 2015), onde a planta pode depender tanto da cadeia de Markov $\theta(k)$, bem como da variável observada $\hat{\theta}(k)$. Essa formulação engloba tanto a chamada *abordagem do detector*, onde $\hat{\theta}(k)$ representaria um detector de falhas, quanto os modelos ocultos de Markov para NCS, onde $\hat{\theta}(k)$ representaria um processo de perda de pacotes. Nesse contexto, foram apresentadas condições na formulação LMI para a síntese de controladores $\mathcal{H}_\infty$ estáticos que dependem somente de $\hat{\theta}(k)$. Um exemplo numérico que ilustra o uso dessa abordagem em NCS foi apresentado, onde utiliza-se o modelo de Gilbert-Elliott para modelar as falhas de transmissão sem a necessidade de processos de *clusterização* utilizados na literatura.

Agradecimentos

Este trabalho foi financiado em partes pela Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP), processo No. 2015/09912-8 e 2017/06358-5 para o primeiro autor; e Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), processo No. 304091/2014-6, pela FAPESP/BG *Research Centre for Gas Innovation* processo FAPESP No. 2014/50279-4, e pelo Instituto Nacional de Ciência e Tecnologia para Sistemas Autônomos Cooperativos (INSAC), processos CNPq/INCT-465755/2014-3 e FAPESP/INCT-2014/50851-0 para o segundo autor.

Referências

- Aberkane, S., Ponsart, J. C., Rodrigues, M. and Sauter, D. (2008). Output feedback control of a class of stochastic hybrid systems, *Automatica* **44**(5): 1325–1332.
- Boyd, S. and Vandenberghe, L. (2004). *Convex Optimization*, Cambridge University Press, New York, NY, USA.
- Costa, O. L. V., Fragoso, M. D. and Marques, R. P. (2005). *Discrete-Time Markov Jump Linear Systems*, Springer-Verlag London.
- Costa, O. L. V., Fragoso, M. D. and Todorov, M. G. (2015). A detector-based approach for the H_2 control of Markov jump linear systems with partial information, *IEEE Transactions on Automatic Control* **60**(5): 1219–1234.
- de Oliveira, A. M. and Costa, O. L. V. (2018). Mixed $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ of hidden Markov jump systems, *International Journal of Robust and Nonlinear Control* **28**(4): 1261–1280.
- de Oliveira, M. C., Bernussou, J. and Geromel, J. C. (1999). A new discrete-time robust stability condition, *Systems & Control Letters* **37**(4): 261–265.
- do Val, J. B., Geromel, J. C. and Gonçalves, A. P. C. (2002). The H_2 -control for jump linear systems: cluster observations of the Markov state, *Automatica* **38**(2): 343–349.
- Dragan, V., Morozan, T. and Stoica, A.-M. (2013). *Mathematical Methods in Robust Control of Linear Stochastic Systems*, Springer-Verlag New York, New York, NY, USA.
- Gahinet, P., Nemirovski, A., Laub, A. J. and Chilali, M. (1995). *LMI Control Toolbox: For Use with MATLAB. User's Guide. Version 1*, Computation, visualization, programming, MathWorks.
- Gonçalves, A. P. C., Fioravanti, A. R. and Geromel, J. C. (2010). Markov jump linear systems and filtering through network transmitted measurements, *Signal Processing* **90**(10): 2842–2850.
- Gonçalves, A. P. C., Fioravanti, A. R. and Geromel, J. C. (2012). H_∞ robust and networked control of discrete-time MJLS through LMIs, *Journal of the Franklin Institute* **349**(6): 2171–2181.
- Marcondes, G. (2005). *Modelos discretos para análise de ocorrências de erros em redes sem fio*, Master's thesis, Inatel, Brazil.
- Mehdi, D., Boukas, E. K. and Bachelier, O. (2004). Static output feedback design for uncertain linear discrete time systems, *IMA Journal of Mathematical Control and Information* **21**(1): 1–13.
- Morais, C. F., Braga, M. F., Oliveira, R. C. L. F. and Peres, P. L. D. (2014). $\mathcal{H}_\infty$ static output feedback control of discrete-time Markov jump linear systems with uncertain transition probability matrix, *2014 American Control Conference*, pp. 489–494.
- Ogura, M., Cetinkaya, A., Hayakawa, T. and Preciado, V. M. (2018). State-feedback control of Markov jump linear systems with hidden-Markov mode observation, *Automatica* **89**: 65 – 72.
- Peaucelle, D. and Arzelier, D. (2001). An efficient numerical solution for H_2 static output feedback synthesis, *2001 European Control Conference (ECC)*, pp. 3800–3805.
- Sadabadi, M. S. and Peaucelle, D. (2016). From static output feedback to structured robust static output feedback: A survey, *Annual Reviews in Control* **42**: 11 – 26.
- Song, J., Niu, Y. and Zou, Y. (2017). Asynchronous output feedback control of time-varying Markovian jump systems within a finite-time interval, *Journal of the Franklin Institute* **354**(15): 6747 – 6765.
- Todorov, M. G., Fragoso, M. D. and do Valle Costa, O. L. (2018). Detector-based H_∞ results for discrete-time Markov jump linear systems with partial observations, *Automatica* **91**: 159 – 172.
- Walsh, G. C., Ye, H. and Bushnell, G. (2002). Stability analysis of networked control systems, *IEEE Transactions Control Systems Technology* **10**(3): 438–446.