

ESTABILIZAÇÃO DE MODELOS FUZZY TAKAGI-SUGENO A TEMPO DISCRETO: REDUZINDO O CONSERVADORISMO NO CONTROLE NÃO-PDC

PEDRO HENRIQUE SILVA COUTINHO*, REINALDO MARTINEZ PALHARES†

*Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica - Universidade Federal de Minas Gerais
Av. Antônio Carlos 6627, 31270-901, Belo Horizonte, MG, Brasil

†Departamento de Engenharia Eletrônica
Universidade Federal de Minas Gerais
Av. Antônio Carlos 6627, 31270-901, Belo Horizonte, MG, Brasil

Emails: phcoutinho@ufmg.br, rpalhares@ufmg.br

Abstract— This work is concerned with the reduction of conservatism in nonquadratic stabilization conditions of discrete-time nonlinear systems described by Takagi-Sugeno fuzzy models based on the non-PDC control law. In general, in the literature, less conservative conditions are obtained increasing the number of linear matrix inequalities (LMIs) to be solved. The proposed conditions in this paper aim to reduce the conservatism without increasing the number of LMIs. Numerical examples illustrate the effectiveness of the new non-PDC controller design condition.

Keywords— Nonquadratic stabilization, Discrete-time nonlinear systems, Takagi-Sugeno fuzzy models, non-PDC control law, Linear matrix inequalities.

Resumo— Neste trabalho aborda-se a redução do conservadorismo na estabilização não quadrática de sistemas não lineares a tempo discreto descritos por modelos *fuzzy* Takagi-Sugeno (T-S) utilizando uma lei de controle não-PDC. Em geral, condições menos conservadoras de estabilização não quadrática são obtidas com o aumento do número de desigualdades matriciais lineares (LMIs) a serem resolvidas. A condição proposta neste trabalho tem como objetivo reduzir o conservadorismo sem aumentar o número de LMIs. Exemplos numéricos ilustram a efetividade da nova condição de projeto do controlador não-PDC.

Palavras-chave— Estabilização não quadrática, Sistemas não lineares a tempo discreto, Modelos *fuzzy* Takagi-Sugeno, Lei de controle não-PDC, Desigualdades matriciais lineares.

1 Introdução

É notório que diversos sistemas físicos podem ser descritos por modelos não lineares mas, a depender da complexidade do modelo obtido, analisar a estabilidade ou projetar controladores/observadores para esses modelos pode não ser uma tarefa trivial (Xie et al., 2017). Neste contexto, modelos *fuzzy* Takagi-Sugeno (T-S) (Takagi and Sugeno, 1985) têm se mostrado uma metodologia efetiva para representar dinâmicas não lineares de forma exata ou aproximada por meio de combinações convexas de modelos lineares locais dentro de um domínio de validade. A linearidade dos modelos locais possibilita, com o uso do método direto de Lyapunov, obter condições de estabilidade e síntese de controladores/observadores na forma de desigualdades matriciais lineares (LMIs, do inglês *Linear Matrix Inequalities*), que podem ser resolvidas de forma eficiente por *softwares* de otimização convexa (Lofberg, 2004).

As primeiras abordagens propostas na literatura foram baseadas em funções de Lyapunov quadráticas fixas e a lei de controle do tipo Compensação Paralela Distribuída (PDC, do inglês *Parallel Distributed Compensation*) (Wang et al., 1996). Neste caso, uma mesma matriz definida positiva é utilizada para verificar a estabilidade de todos os modelos locais, podendo ser uma solução conser-

vadora em aplicações que envolvem sistemas não lineares complexos.

Alternativas para reduzir o conservadorismo da abordagem quadrática incluem a adição de variáveis de decisão para introduzir novos graus de liberdade às condições LMI (Tanaka et al., 1998) e o aumento da dimensão de somatórios *fuzzy* via Teorema de Pólya, que resultam em condições assintoticamente necessárias e suficientes (ANS) (Sala and Ariño, 2007). Além disso, novas funções de Lyapunov candidatas foram propostas, como funções de Lyapunov contínuas por partes (Johansson et al., 1999) e não quadráticas em conjunto com a lei de controle não-PDC (Guerra and Vermeiren, 2004).

Mesmo com o sucesso em aplicações a tempo contínuo (Campos et al., 2013; Mozelli, Palhares, Souza and Mendes, 2009; Mozelli, Palhares and Avellar, 2009; Mozelli et al., 2010; Montagner et al., 2009; González et al., 2017), as funções de Lyapunov não quadráticas resultaram em melhorias consideráveis para modelos a tempo discreto (Guerra and Vermeiren, 2004; Ding et al., 2006; Lee et al., 2011), principalmente as condições envolvendo múltiplos somatórios *fuzzy* (Ding, 2010; Zou and Yu, 2014) que, no entanto, podem demandar um número excessivo de LMIs a serem resolvidas, consequentemente elevando a carga computacional requerida para solucioná-las. Recentemente, as abordagens propostas buscam satisfazer

a relação de compromisso entre redução do conservadorismo e aumento excessivo do número de LMIs como, por exemplo, os trabalhos de Lendek et al. (2015), com o uso de controladores com retardo, e de Xie et al. (2017), com uma nova abordagem para projetar variáveis de folga.

Este trabalho trata do problema de estabilização de modelos T-S a tempo discreto utilizando uma função de Lyapunov não quadrática e o controle não-PDC. A principal contribuição é a proposta de uma nova condição capaz de reduzir o conservadorismo de condições existentes na literatura sem aumentar o número de LMIs.

O restante do trabalho está estruturado da seguinte forma. A Seção 2 descreve o modelo *fuzzy* T-S a tempo discreto e apresenta um resultado útil que será utilizado ao longo do trabalho. Uma condição de síntese de controlador não-PDC existente na literatura é apresentada na Seção 3 e a nova condição é proposta na Seção 4. Exemplos numéricos que ilustram a efetividade da condição proposta são apresentados na Seção 5 e a Seção 6 conclui o trabalho.

Notação. As seguintes notações serão adotadas ao longo deste trabalho. O símbolo ‘ $\star$ ’ denota um bloco simétrico em uma matriz, I e 0 denotam, respectivamente, as matrizes identidade e nula de dimensões apropriadas, X^T denota a transposta de X e $X > 0$ ($X < 0$) denota que X é uma matriz definida positiva (negativa). Além disso, por simplicidade, denota-se:

$$X_h = \sum_{i=1}^r h_i(z(k))X_i, \quad X_{h+} = \sum_{i=1}^r h_i(z(k+1))X_i, \\ \text{e } X_h^{-1} = \left(\sum_{i=1}^r h_i(z(k))X_i \right)^{-1},$$

com X sendo uma matriz genérica de dimensão apropriada.

2 Preliminares

Nesta seção são apresentados os modelos *fuzzy* Takagi-Sugeno a tempo discreto e resultados úteis para a construção das condições de síntese do controlador não-PDC.

2.1 Modelos Fuzzy T-S a Tempo Discreto

Considere modelos *fuzzy* Takagi-Sugeno (T-S) a tempo discreto, que são definidos pelas regras *fuzzy* Se-Então em (1).

$$\mathcal{R}_i : \text{Se } z_1(k) \text{ é } \mathcal{M}_1^i \text{ e } \dots \text{ e } z_{n_z}(k) \text{ é } \mathcal{M}_{n_z}^i \\ \text{Então } x(k+1) = A_i x(k) + B_i u(k), \quad (1)$$

sendo $\mathcal{R}_i$ a i -ésima regra *fuzzy* com o antecedente definido pelo vetor de variáveis premissas $z(k) = [z_1(k), \dots, z_{n_z}(k)]^T \in \mathbb{R}^{n_z}$ e pelos conjuntos *fuzzy* $\mathcal{M}_j^i$, $j = 1, \dots, n_z$, $i = 1, \dots, r$, onde r

é o número de regras, submodelos ou modelos locais. O consequente da regra é um modelo linear a tempo discreto em espaço de estados com vetores de estados $x(k) \in \mathbb{R}^{n_x}$ e de entradas $u(k) \in \mathbb{R}^{n_u}$ e matrizes constantes $A_i \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ e $B_i \in \mathbb{R}^{n_x \times n_u}$, $i = 1, \dots, r$.

O grau de pertinência normalizado de $z(k)$ em relação à i -ésima regra *fuzzy* é dado por

$$h_i(z(k)) = \frac{\prod_{j=1}^{n_z} M_j^i(z_j(k))}{\sum_{i=1}^r \prod_{j=1}^{n_z} M_j^i(z_j(k))}, \quad i = 1, \dots, r, \quad (2)$$

no qual $M_j^i(z(k))$ é uma função que mede o grau de pertinência de $z_j(k)$ em $\mathcal{M}_j^i$ e os graus de pertinência normalizados $h_i(z(k))$ satisfazem à propriedade de convexidade:

$$\sum_{i=1}^r h_i(z(k)) = 1 \text{ e } h_i(z(k)) \geq 0, \quad i = 1, \dots, r. \quad (3)$$

Com isso, o modelo T-S global é obtido com a *defuzzificação*:

$$x(k+1) = A_h x(k) + B_h u(k), \quad (4)$$

que, pelas propriedades em (3), representam uma soma convexa dos r modelos lineares locais ponderada pelos $h_i(z(k))$. Neste trabalho, considera-se que as variáveis premissas que compõem $z(k)$ estão disponíveis em todo instante de tempo k .

2.2 Resultado Útil

A seguinte proposição apresenta uma propriedade que será utilizada para provar a condição de síntese proposta neste trabalho.

Proposição 1 (de Oliveira et al. (2002)) *Se $H + H^T > P > 0$, então H é não-singular e*

$$H^T P^{-1} H \geq H + H^T - P.$$

3 Condição Existente para Síntese de Controlador não-PDC

Nesta seção serão apresentadas as condições de síntese de controle não-PDC inicialmente propostas por Guerra and Vermeiren (2004). A lei de controle não-PDC é definida por:

$$u(k) = -F_h H_h^{-1} x(k), \quad (5)$$

no qual F_h e H_h são, respectivamente, as somas convexas das matrizes $F_i \in \mathbb{R}^{n_u \times n_x}$ e $H_i \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, $i = 1, \dots, r$. A diferença dessa lei de controle em relação ao PDC é a inclusão do termo H_h^{-1} , que adiciona novos graus de liberdade ao projeto do controlador. Assim, obtém-se a seguinte dinâmica do modelo T-S (4) em malha fechada com a lei de controle (5):

$$x(k+1) = (A_h - B_h F_h H_h^{-1}) x(k). \quad (6)$$

Para obtenção das condições de síntese será considerada a função de Lyapunov candidata não quadrática:

$$V(x(k)) = x^T(k)H_h^{-T}P_hH_h^{-1}x(k), \quad (7)$$

com P_h denotando a soma convexa das matrizes $P_i = P_i^T > 0 \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, $i = 1, \dots, r$, e H_h sendo a mesma soma convexa das matrizes H_i da lei de controle (5). A condição de síntese para o controlador não-PDC proposta por Guerra and Vermeiren (2004) é apresentada a seguir.

Teorema 1 (Guerra and Vermeiren (2004))

A origem do sistema em malha fechada (6) é assintoticamente estável se existirem matrizes $P_i = P_i^T > 0$, H_i e F_i , $i = 1, \dots, r$, satisfazendo

$$\begin{bmatrix} -P_h & & \star \\ A_hH_h - B_hF_h & -H_{h+} - H_{h+}^T + P_{h+} & \end{bmatrix} < 0. \quad (8)$$

4 Nova Condição de Síntese não-PDC

A nova condição de síntese do controlador não-PDC proposta neste trabalho está apresentada a seguir.

Teorema 2 Se existirem matrizes $P_i = P_i^T > 0$, H_i , F_i , Y_i e Z_i , tais que (9) é satisfeita, então a origem do sistema em malha fechada (6) é assintoticamente estável.

$$\begin{bmatrix} -P_h & \star & \star \\ A_hH_h & \Psi_h & \star \\ F_h & -Y_h + Z_h^T B_h^T & Z_h + Z_h^T \end{bmatrix} < 0, \quad (9)$$

sendo $\Psi_h := -H_{h+} - H_{h+}^T + P_{h+} - B_hY_h - Y_h^T B_h^T$.

Prova: A ideia é demonstrar que se (9) é satisfeita então a origem do sistema em malha fechada (6) será assintoticamente estável. Se (9) é satisfeita, então $\Psi_h < 0$, ou, de forma equivalente, $(H_{h+} + B_hY_h) + (H_{h+} + B_hY_h)^T > P_{h+} > 0$. Pela Proposição 1 segue que $H_{h+} + B_hY_h$ é invertível. Então aplicando o Lema da inversa em $(H_{h+} + B_hY_h)^{-1}$, pode-se concluir que H_{h+} é invertível.

Assim, multiplicando a desigualdade (9) por

$$\begin{bmatrix} H_h^{-T} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}$$

à esquerda e por sua transposta à direita, resulta em

$$\begin{bmatrix} -H_h^{-T}P_hH_h^{-1} & \star & \star \\ A_h & \Psi_h & \star \\ F_hH_h^{-1} & -Y_h + Z_h^T B_h^T & Z_h + Z_h^T \end{bmatrix} < 0,$$

que novamente multiplicada por

$$\begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & -B_h \end{bmatrix}$$

pela esquerda e por sua transposta pela direita, resulta em

$$\begin{bmatrix} -H_h^{-T}P_hH_h^{-1} & \hat{A}_h^T \\ \hat{A}_h & -H_{h+} - H_{h+}^T + P_{h+} \end{bmatrix} < 0, \quad (10)$$

no qual $\hat{A}_h := A_h - B_hF_hH_h^{-1}$. Multiplicando a condição em (10) por

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & H_{h+}^{-T} \end{bmatrix}$$

pela esquerda e por sua transposta pela direita, tem-se

$$\begin{bmatrix} -H_h^{-T}P_hH_h^{-1} & \hat{A}_h^T H_{h+}^{-1} \\ H_{h+}^{-T} \hat{A}_h & \hat{\Psi}_h \end{bmatrix} < 0, \quad (11)$$

onde $\hat{\Psi}_h = -H_{h+}^{-T} - H_{h+}^{-1} + H_{h+}^{-T}P_{h+}H_{h+}^{-1}$. Finalmente, multiplicando a desigualdade em (11) por $[I \quad \hat{A}_h^T]$ pela esquerda e por sua transposta à direita, obtém-se

$$\begin{aligned} & \hat{A}_h^T H_{h+}^{-T} P_{h+} H_{h+}^{-1} \hat{A}_h - H_h^{-T} P_h H_h^{-1} < 0 \\ & \Leftrightarrow x^T(k) \left(\hat{A}_h^T H_{h+}^{-T} P_{h+} H_{h+}^{-1} \hat{A}_h \right. \\ & \quad \left. - H_h^{-T} P_h H_h^{-1} \right) x(k) < 0 \\ & \Leftrightarrow \Delta V = V(x(k+1)) - V(x(k)) < 0, \end{aligned}$$

com $V(x(k))$ dada por (7). Com isso, mostra-se que se a condição (9) for satisfeita, a origem do modelo T-S (4) em malha fechada será assintoticamente estável sendo que a lei de controle é dada em (5) com ganhos F_i e H_i , $i = 1, \dots, r$. $\square$

Observação 1 Devido à dependência com os graus de pertinência, ambas condições de síntese para o controle não-PDC dadas pelas desigualdades em (8) e (9) estão escritas em um formato não linear, logo, a factibilidade depende da condição considerada para reescrevê-las no formato de LMIs. Aqui, por simplicidade, será considerada a relaxação de Wang, que está apresentada no Lema abaixo para o caso de somatórios fuzzy duplos.

Lema 3 (Relaxação de Wang et al. (1996)) O somatório fuzzy duplo

$$\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(k))h_j(z(k))\Gamma_{ij} < 0 \quad (12)$$

é definido negativo se as LMIs abaixo forem satisfeitas:

$$\begin{aligned} & \Gamma_{ii} < 0, \\ & \Gamma_{ij} + \Gamma_{ji} < 0, \quad i < j, \quad i, j = 1, \dots, r. \end{aligned}$$

Para exemplificar a aplicação da relaxação de Wang, considere a desigualdade em (8) reescrita

como o seguinte somatório *fuzzy* triplo:

$$\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \sum_{l=1}^r h_i(z(k))h_j(z(k))h_l(z(k+1)) \left[\begin{array}{cc} -P_i & \\ A_i H_j - B_i F_j & -H_l - H_l^T + P_l \end{array} \right] < 0.$$

Estendendo o Lema 3 para 3 somatórios *fuzzy*, a negatividade da condição anterior é verificada se as LMIs abaixo forem satisfeitas.

$$\begin{aligned} \Gamma_{iil} &< 0, \\ \Gamma_{ijl} + \Gamma_{jil} &< 0, \quad i < j, \quad i, j, l = 1, \dots, r. \end{aligned} \quad (13)$$

Note que o mesmo procedimento pode ser utilizado para a condição (9) e, portanto, ambas envolvem a solução do mesmo número de LMIs. Por exemplo, para um modelo T-S de duas regras, $r = 2$, ambos os projetos são realizados resolvendo 6 LMIs.

Condições menos conservadoras poderiam ser obtidas adicionando variáveis de decisão às LMIs e/ou aumentando a dimensão do somatório *fuzzy* aplicando o Teorema de Pólya, no entanto, em ambos os casos, o número de LMIs e o custo computacional envolvido aumentam. Como o objetivo deste trabalho é estudar a redução do conservadorismo nas condições do projeto de controle não-PDC proporcionada com a aplicação do Teorema 2, os exemplos apresentados na Seção 5 serão restritos ao uso da relaxação de Wang.

5 Resultados Numéricos

Nesta seção são apresentados resultados numéricos da aplicação das condições de síntese de controle não-PDC propostas no Teorema 2, os quais são comparados com os obtidos com o Teorema 1.

5.1 Exemplo 1

Considere o seguinte sistema não linear a tempo discreto:

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= x_1(k) - x_1(k)x_2(k) + (5 + x_1(k))u(k) \\ x_2(k+1) &= -x_1(k) - 0.5x_2(k) + 2x_1(k)u(k). \end{aligned} \quad (14)$$

Seguindo o procedimento de construção de modelos T-S apresentado em Tanaka and Wang (2004, Capítulo 2) a partir de não linearidades de setor, é possível obter uma representação exata do sistema (14) dentro de um conjunto compacto $\Phi = [-b, b]$, $b > 0$. Como os termos não lineares do sistema envolvem a variável de estado $x_1(k)$, define-se como variável premissa $z(k) = x_1(k) \in \Phi$. Dentro do conjunto Φ , os valores de máximo e mínimo de $z(k)$ são, respectivamente, b e $-b$. Desta forma, $z(k)$ pode ser descrita por

$$z(k) = bM_1^1(z(k)) - bM_1^2(z(k)),$$

onde $M_1^1(z(k)) + M_1^2(z(k)) = 1$. Assim, as funções de pertinência das regras *fuzzy* são

$$M_1^1(z(k)) = \frac{z(k) + b}{2b} \text{ e } M_1^2(z(k)) = 1 - M_1^1(z(k)).$$

A partir do procedimento realizado, definem-se as seguintes regras *fuzzy*

$\mathcal{R}_i$: Se $z(k)$ é $\mathcal{M}_1^i$

Então $x(k+1) = A_i x(k) + B_i u(k)$, $i = 1, 2$,

sendo

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} 1 & -b \\ -1 & -0.5 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 5+b \\ 2b \end{bmatrix} \\ A_2 &= \begin{bmatrix} 1 & b \\ -1 & -0.5 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 5-b \\ -2b \end{bmatrix} \end{aligned}$$

e $\mathcal{M}_1^i$, $i = 1, 2$ são os conjuntos *fuzzy* associados às funções de pertinência $M_1^i(z(k))$.

Como a representação do sistema (14) na forma de modelo *fuzzy* T-S depende da definição do conjunto Φ , é de interesse que se possa realizar síntese de controladores para estabilização desse sistema para o maior valor possível de b , de modo que o sistema possa ser representado em um maior intervalo da variável $z(k) = x_1(k)$. Por isso, o máximo valor de b para o qual uma dada condição possui solução factível vem sendo utilizado como critério de validação e comparação em diversos trabalhos na literatura, como em Guerra and Vermeiren (2004), Ding et al. (2006), Ding (2010) e referências.

A Tabela 1 apresenta os máximos valores de b para factibilidade¹ obtidos com os Teoremas 1 e 2 e outras referências. Utilizando o Teorema 1 (Guerra and Vermeiren, 2004), obtém-se $b = 1.539$, com a condição do Teorema 3 de Ding et al. (2006), envolvendo 4 somatórios *fuzzy* e sem variáveis de folga, $b = 1.547$. Aplicando o Teorema 2 de Lee et al. (2011) sem variáveis de folga e 5 somatórios *fuzzy*, obtém-se $b = 1.565$. Finalmente, com a condição do Teorema 2, o máximo valor obtido para b é 1.758. Note que este valor de b é obtido com a condição proposta neste trabalho sem o acréscimo de complexidade numérica via aumento do número de LMIs o que indica a redução do conservadorismo quando comparado com as condições de projeto de controle não-PDC existentes na literatura.

Para ilustrar o desempenho dos diferentes projetos de controle, considere a condição inicial e o valor de b tal que as condições dos Teoremas 1 e 2 são factíveis, neste caso, $x(0) = [1.539, -2.0]^T$ e $b = 1.539$. A Figura 1 apresenta a resposta temporal dos estados do sistema (14) em malha fechada com o controle não-PDC projetado para os Teoremas 1 e 2 e cujos ganhos são listados a seguir.

¹As LMIs foram solucionadas no Matlab utilizando o Yalmip (Lofberg, 2004) e o SeDuMi.

Tabela 1: Comparação do maior valor de b para factibilidade entre diferentes condições.

	Máximo b
Teorema 1	1.539
Ding et al. (2006)	1.547
Lee et al. (2011)	1.565
Teorema 2	1.758

Teorema 1 com $b = 1.539$:

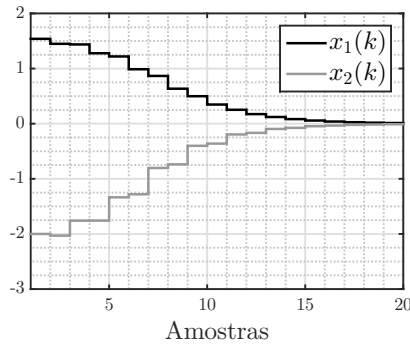
$$F_1 = \begin{bmatrix} 0.1198 \\ -0.2568 \end{bmatrix}^T, H_1 = \begin{bmatrix} 0.5537 & -0.2558 \\ -0.3337 & 1.5797 \end{bmatrix},$$

$$F_2 = \begin{bmatrix} -0.0556 \\ 0.2192 \end{bmatrix}^T, H_2 = \begin{bmatrix} 0.4449 & -0.2946 \\ -0.2728 & 0.8256 \end{bmatrix}.$$

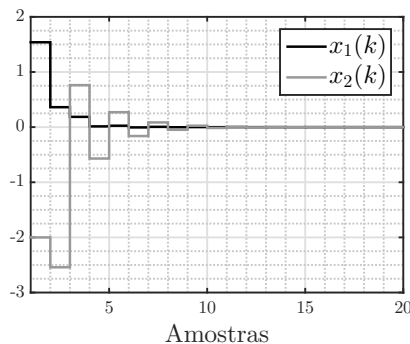
Teorema 2 com $b = 1.539$:

$$F_1 = \begin{bmatrix} 0.0373 \\ -0.1745 \end{bmatrix}^T, H_1 = \begin{bmatrix} 0.2661 & 0.0012 \\ -0.0572 & 0.6702 \end{bmatrix},$$

$$F_2 = \begin{bmatrix} 0.068 \\ 0.1598 \end{bmatrix}^T, H_2 = \begin{bmatrix} 0.4316 & -0.1613 \\ -0.0491 & 0.5652 \end{bmatrix}.$$



(a) Teorema 1 com $b = 1.539$ - Exemplo 1



(b) Teorema 2 com $b = 1.539$ - Exemplo 1

Figura 1: Resposta dos estados do sistema (14) em malha fechada com o controlador não-PDC projetado para $b = 1.539$ - Exemplo 1.

Pela Figura 1, pode-se notar que a estabilização utilizando o controlador obtido com a condição proposta no Teorema 2 é mais rápida.

5.2 Exemplo 2

Considere o modelo *fuzzy* T-S de duas regras com modelos locais definidos pelas matrizes:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2.024 & -2.359 \\ -0.509 & -1.321 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0.777 + b \\ 0.622 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} -0.636 + a & 0.317 \\ 0.138 & -0.71 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0.647 \\ -0.425 \end{bmatrix},$$

no qual $a \in [-0.5, 0.5]$ e $b \in [5, 7]$ são parâmetros do modelo. Utilizando as condições dos Teoremas 1 e 2 com a relaxação de Wang, os valores de a e b são variados tal que verifica-se para quais valores as condições dadas pelos dois Teoremas são factíveis. O conjunto dos valores factíveis de a e b estão apresentados na Figura 2. Nota-se que a região de factibilidade obtida com a condição proposta no Teorema 2 contém a região de factibilidade dada pelo Teorema 1.

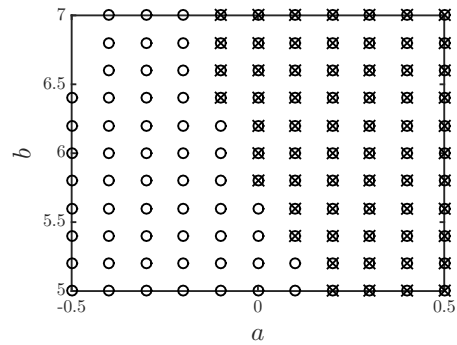


Figura 2: Comparação das regiões de factibilidade obtidas com os Teoremas 1 ('o') e 2 ('x'), respectivamente - Exemplo 2.

5.3 Estabilização de um pêndulo invertido

Considere o modelo² discretizado de um pêndulo invertido controlado por um motor de corrente contínua (CC) via trem de engrenagens:

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= x_1(k) + T x_2(k) \\ x_2(k+1) &= x_2(k) + T(9.8 \sin x_1(k) + x_3(k)) \\ x_3(k+1) &= x_3(k) + 2T(-x_2(k) - x_3(k) + u(k)), \end{aligned} \quad (15)$$

onde $x_1(k)$ é a posição angular do pêndulo, $x_2(k)$ a velocidade angular, $x_3(k)$ é a corrente de armadura do motor CC e T é o período de amostragem. Considerando $T = 0.1s$ é possível obter um modelo T-S que represente o sistema (15) no intervalo $x_1(k) \in [-\pi, \pi]$ utilizando as funções de

²Detalhes sobre a discretização e escolha dos parâmetros do modelo podem ser encontrados em Xie et al. (2013).

pertinência (Tanaka and Wang, 2004):

$$M_1^1(z(k)) = \begin{cases} \frac{\sin x_1(k)}{x_1(k)}, & x_1(k) \neq 0, \\ 1, & x_1(k) = 0, \end{cases}$$

$$M_1^2(z(k)) = 1 - M_1^1(z(k)),$$

e os modelos locais (Xie et al., 2013):

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0.1 & 0 \\ 0.98 & 1 & 0.1 \\ 0 & -0.2 & 0.8 \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0.1 & 0 \\ 0 & 1 & 0.1 \\ 0 & -0.2 & 0.8 \end{bmatrix}, B_1 = B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.2 \end{bmatrix}.$$

A fim de ilustrar os benefícios da condição proposta, novamente, o controlador não-PDC é projetado utilizando os Teoremas 1 e 2 e a relaxação de Wang (LMIs em (13)). Os ganhos obtidos estão apresentados a seguir.

Ganhos obtidos com o Teorema 1:

$$F_1 = \begin{bmatrix} 0.0282 \\ 0.1319 \\ 8.1496 \end{bmatrix}^T, F_2 = \begin{bmatrix} 0.0626 \\ 0.1624 \\ 8.0471 \end{bmatrix}^T,$$

$$H_1 = \begin{bmatrix} 0.0639 & -0.1479 & 0.044 \\ -0.1559 & 0.4819 & -0.1638 \\ -0.1330 & -0.1594 & 1.9663 \end{bmatrix},$$

$$H_2 = \begin{bmatrix} 0.0639 & -0.1479 & 0.044 \\ -0.1559 & 0.4819 & -0.1638 \\ -0.1330 & -0.1594 & 1.9663 \end{bmatrix}.$$

Ganhos obtidos com o Teorema 2:

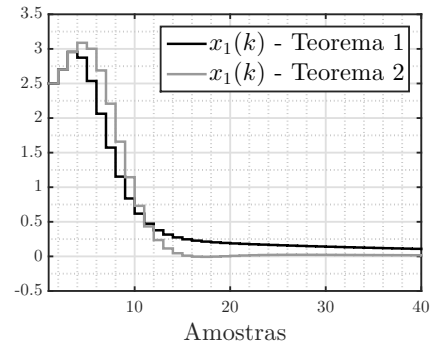
$$F_1 = \begin{bmatrix} 0.1230 \\ -0.0294 \\ -0.2640 \end{bmatrix}^T, F_2 = \begin{bmatrix} -0.1679 \\ 0.6099 \\ 0.3120 \end{bmatrix}^T,$$

$$H_1 = \begin{bmatrix} 0.0381 & -0.0945 & -0.0222 \\ -0.0939 & 0.3422 & -0.3279 \\ -0.0661 & -0.2391 & 1.7638 \end{bmatrix},$$

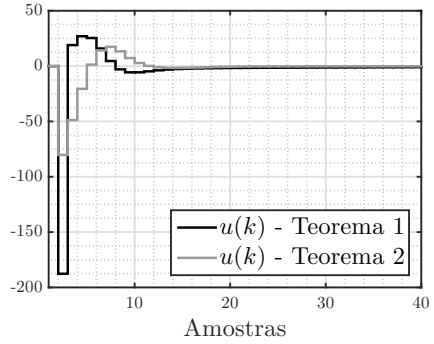
$$H_2 = \begin{bmatrix} 0.0362 & -0.0835 & -0.038 \\ -0.0726 & 0.2778 & -0.2981 \\ -0.0517 & -0.2815 & 1.7816 \end{bmatrix}.$$

Escolhendo $x(0) = [2.5, 2, -0.24]^T$ e utilizando os controladores projetados, as respostas do estado $x_1(k)$ e do sinal de controle $u(k)$ estão apresentadas na Figura 3.

Pela Figura 3, verifica-se que o controlador não-PDC projetado com a condição proposta no Teorema 2 estabiliza o sistema mais rápido e exige menos esforço de controle do que o controlador projetado com a condição de Guerra and Vermeiren (2004) (Teorema 1).



(a) Estado $x_1(k)$



(b) Sinal de controle $u(k)$

Figura 3: Estabilização do sistema (15) utilizando o não-PDC projetado com as diferentes condições - Exemplo 3.

6 Conclusões

Neste trabalho considerou-se o problema de estabilização não quadrática de modelos *fuzzy* T-S a tempo discreto, sendo proposta uma nova condição de projeto de controle não-PDC. Exemplos numéricos ilustraram o caráter menos conservador da condição proposta quando comparado a condições existentes na literatura. Uma vantagem adicional da proposta apresentada é não introduzir complexidade computacional adicional ao não aumentar o número de LMIs a serem resolvidas ao longo do projeto.

Agradecimentos

Os autores agradecem o apoio financeiro das agências de fomento CAPES, CNPq e FAPEMIG.

Referências

- Campos, V. C. S., Souza, F. O., Torres, A. B. and Palhares, R. M. (2013). New stability conditions based on piecewise fuzzy Lyapunov functions and tensor product transformations, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* **21**(4): 748–760.

- de Oliveira, M., Geromel, J. and Bernussou, J. (2002). Extended $\mathcal{H}_2$ and $\mathcal{H}_\infty$ characterizations and controller parametrizations for discrete-time systems, *International Journal of Control* **75**(9): 666–679.
- Ding, B. (2010). Homogeneous polynomially nonquadratic stabilization of discrete-time Takagi–Sugeno systems via nonparallel distributed compensation law, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* **18**(5): 994–1000.
- Ding, B., Sun, H. and Yang, P. (2006). Further studies on LMI-based relaxed stabilization conditions for nonlinear systems in Takagi–Sugeno’s form, *Automatica* **42**(3): 503–508.
- González, T., Bernal, M., Sala, A. and Aguiar, B. (2017). Cancellation-based nonquadratic controller design for nonlinear systems via Takagi–Sugeno models, *IEEE Transactions on Cybernetics* **47**(9): 2628–2638.
- Guerra, T. M. and Vermeiren, L. (2004). LMI-based relaxed nonquadratic stabilization conditions for nonlinear systems in the Takagi–Sugeno’s form, *Automatica* **40**(5): 823–829.
- Johansson, M., Rantzer, A. and Arzen, K.-E. (1999). Piecewise quadratic stability of fuzzy systems, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* **7**(6): 713–722.
- Lee, D. H., Park, J. B. and Joo, Y. H. (2011). Approaches to extended non-quadratic stability and stabilization conditions for discrete-time Takagi–Sugeno fuzzy systems, *Automatica* **47**(3): 534–538.
- Lendek, Z., Guerra, T.-M. and Lauber, J. (2015). Controller design for TS models using delayed nonquadratic Lyapunov functions, *IEEE Transactions on Cybernetics* **45**(3): 439–450.
- Lofberg, J. (2004). Yalmip: A toolbox for modeling and optimization in MATLAB, *Computer Aided Control Systems Design, 2004 IEEE International Symposium on*, IEEE, pp. 284–289.
- Montagner, V. F., Oliveira, R. C. L. F. and Peres, P. L. D. (2009). Convergent LMI relaxations for quadratic stabilizability and control of Takagi–Sugeno fuzzy systems, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* **17**(4): 863–873.
- Mozelli, L. A., Palhares, R. M. and Avellar, G. S. (2009). A systematic approach to improve multiple Lyapunov function stability and stabilization conditions for fuzzy systems, *Information Sciences* **179**(8): 1149–1162.
- Mozelli, L. A., Palhares, R. M. and Mendes, E. M. A. M. (2010). Equivalent techniques, extra comparisons and less conservative control design for Takagi–Sugeno fuzzy systems, *IET Control Theory and Applications* **4**(12): 2813–2822.
- Mozelli, L. A., Palhares, R. M., Souza, F. and Mendes, E. M. (2009). Reducing conservativeness in recent stability conditions of TS fuzzy systems, *Automatica* **45**(6): 1580–1583.
- Sala, A. and Ariño, C. (2007). Asymptotically necessary and sufficient conditions for stability and performance in fuzzy control: Applications of Polya’s theorem, *Fuzzy Sets and Systems* **158**(24): 2671–2686.
- Tagaki, T. and Sugeno, M. (1985). Fuzzy identification of systems and its application to modelling and control, *IEEE Trans. Syst. Man and Cybernetics* **15**(1): 116–132.
- Tanaka, K., Ikeda, T. and Wang, H. O. (1998). Fuzzy regulators and fuzzy observers: relaxed stability conditions and LMI-based designs, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* **6**(2): 250–265.
- Tanaka, K. and Wang, H. O. (2004). *Fuzzy control systems design and analysis: a linear matrix inequality approach*, John Wiley & Sons.
- Wang, H. O., Tanaka, K. and Griffin, M. F. (1996). An approach to fuzzy control of nonlinear systems: Stability and design issues, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* **4**(1): 14–23.
- Xie, X., Ma, H., Zhao, Y., Ding, D.-W. and Wang, Y. (2013). Control synthesis of discrete-time T–S fuzzy systems based on a novel non-PDC control scheme, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* **21**(1): 147–157.
- Xie, X., Yue, D., Zhang, H. and Peng, C. (2017). Control synthesis of discrete-time T–S fuzzy systems: reducing the conservatism whilst alleviating the computational burden, *IEEE Transactions on Cybernetics* **47**(9): 2480–2491.
- Zou, T. and Yu, H. (2014). Asymptotically necessary and sufficient stability conditions for discrete-time Takagi–Sugeno model: Extended applications of Polya’s theorem and homogeneous polynomials, *Journal of the Franklin Institute* **351**(2): 922–940.