

CONTROLE INTERVALAR DE SISTEMAS LINEARES COM INCERTEZA PARAMÉTRICA NÃO-ESTRUTURADA

CÉLIO A. T. DE SOUZA*, SÍLVIA C. FERREIRA*, DANIEL F. LEITE*

**Departamento de Engenharia, Universidade Federal de Lavras, Lavras - MG, Brasil*

Emails: caugusto.terra@gmail.com, silvia.ferreira@deg.ufla.br,
daniel.leite@deg.ufla.br

Abstract— Control and analysis of multivariable linear dynamic systems with unstructured parametric uncertainty are dealt with from the interval mathematics perspective. Guaranteed stability is achieved from the Kharitonov theorem. Observability and complete state controllability are also generalized for systems with uncertain parameters. Two controller design methods are proposed viz. Interval Coefficient Coupling and Interval Ackermann method. Results show the effectiveness of the design methods and provide bounds on the possible values of the states during the transient period due to the uncertainty on the exact parameters. Extensions of the controllability and observability analyses and of the design methods to the interval case are contributions of this study.

Keywords— Robust Control. Interval Mathematics. Parametric Uncertainty.

Resumo— Análise e controle de sistemas dinâmicos lineares multivariáveis com incerteza paramétrica não-estruturada são tratados neste trabalho sob a perspectiva da matemática intervalar. Estabilidade garantida é obtida a partir do Teorema de Kharitonov. As características de observabilidade e controlabilidade completa de estados também são generalizadas para sistemas com parâmetros incertos. São propostos dois métodos de projeto de controladores robustos, método de Pareamento de Coeficientes Intervalares e método de Ackermann Intervalar. Os resultados mostram a efetividade dos métodos de projeto e provêm limites para os valores possíveis dos estados durante o regime transitório em vista da incerteza a respeito dos valores exatos dos parâmetros. As extensões das análises de controlabilidade e observabilidade e dos métodos de projeto por Pareamento de Coeficientes e Ackermann para o caso intervalar são contribuições deste trabalho.

Palavras-chave— Controle Robusto. Matemática Intervalar. Incerteza Paramétrica.

1 Introdução

1.1 Contextualização

Existem incertezas a respeito dos valores exatos dos parâmetros de um sistema por diferentes razões: (i) a identificação de parâmetros baseada em dados provenientes de ambiente estocástico requer aproximação e escolhas; (ii) devido a existência de não-linearidades intrínsecas aos instrumentos de medição e atuação, e.g. zona morta, histerese, saturação, atraso; (iii) leis fenomenológicas que assumimos como verdadeiras são aproximações válidas entre limites; e (iv) sistemas físicos são sujeitos à variação temporal.

Sistemas dinâmicos contínuos, lineares e invariantes no tempo podem ser representados por meio de uma equação diferencial ordinária de ordem n ,

$$y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + \dots + a_{n-1} \dot{y}(t) + a_n y(t) = b_0 u^{(n)}(t) + b_1 u^{(n-1)}(t) + \dots + b_{n-1} \dot{u}(t) + b_n u(t) \quad (1)$$

onde u e y são variáveis de entrada e saída; $a_i \in \mathbb{R}$ é parâmetro; o tempo t é contínuo.

Há diversas maneiras de considerar incerteza na modelagem de sistemas dinâmicos lineares. Uma das maneiras mais utilizadas é a incerteza politópica (Caun et al., 2018) (Rodrigues et al., 2018). Nessa representação, os possíveis valores dos parâmetros do sistema incerto formam

um politopo no espaço dos parâmetros, isto é, o sistema pertence a um invólucro convexo no espaço dos parâmetros (Karimi et al., 2007) (Leite et al., 2015). Um caso especial da incerteza politópica é a incerteza intervalar. Os parâmetros do sistema são representados por intervalos de números reais ou complexos.

Neste trabalho assumimos incerteza intervalar sobre os parâmetros $a_i, b_i \forall i$ para análise qualitativa garantida das propriedades de sistemas dinâmicos lineares contínuos e para projeto robusto. Formalmente, a equação (1) é reescrita como

$$y^{(n)}(t) + [\underline{a}_1, \bar{a}_1] y^{(n-1)}(t) + \dots + [\underline{a}_{n-1}, \bar{a}_{n-1}] \dot{y}(t) + [\underline{a}_n, \bar{a}_n] y(t) = [\underline{b}_0, \bar{b}_0] u^{(n)}(t) + \dots + [\underline{b}_{n-1}, \bar{b}_{n-1}] \dot{u}(t) + [\underline{b}_n, \bar{b}_n] u(t). \quad (2)$$

onde $\underline{a}_i, \bar{a}_i, \underline{b}_i$ e $\bar{b}_i \forall i$ são limiares inferiores e superiores para os valores possíveis dos parâmetros a_i e b_i . O modelo (2) leva em consideração incerteza paramétrica, estabelecendo um intervalo de valores que os parâmetros podem efetivamente assumir. Análise e projeto baseados em parâmetros limiares podem sugerir limites de desempenho para um sistema.

A representação convencional de (2) em espaço de estados (Kalman, 1962) é

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du,\end{aligned}\quad (3)$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$ é vetor de estados; $u \in \mathbb{R}$ é entrada. Além disso, $A \in \mathbb{IR}^{n \times n}$ é matriz de parâmetros do sistema; $B \in \mathbb{IR}^{n \times 1}$ é matriz de entrada; $C \in \mathbb{IR}^{1 \times n}$ é matriz de saída; e $D \in \mathbb{IR}^{1 \times 1}$ refere-se à matriz de transmissão direta. $\mathbb{IR}$ refere-se a matrizes com elementos intervalares reais. Por exemplo, se o modelo (3) está na forma canônica controlável (Kalman, 1962), suas matrizes de parâmetros assumem o formato

$$\begin{aligned}A &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -[a_n, \bar{a}_n] & -[a_{n-1}, \bar{a}_{n-1}] & \dots & \dots & -[a_1, \bar{a}_1] \end{bmatrix} \\ B &= [0 \quad 0 \quad \dots \quad 1]' \\ C &= \begin{bmatrix} [b_n, \bar{b}_n] - [a_n, \bar{a}_n] \cdot [b_0, \bar{b}_0] \\ [b_{n-1}, \bar{b}_{n-1}] - [a_{n-1}, \bar{a}_{n-1}] \cdot [b_0, \bar{b}_0] \\ \vdots \\ [b_1, \bar{b}_1] - [a_1, \bar{a}_1] \cdot [b_0, \bar{b}_0] \end{bmatrix}' \\ D &= [[b_0, \bar{b}_0]]\end{aligned}$$

A partir da representação intervalar em espaço de estados, (3), as seções seguintes tratam sobre sua estabilidade, contralabilidade de estados e de saída, e observabilidade. Além disso, ganhos de controladores por realimentação linear de estados são obtidos a partir dos métodos de projeto Pareamento de Coeficientes Intervalares e Ackermann Inverter. Estes são extensões intervalares de seus análogos para parâmetros reais. As análises apresentadas e os dois métodos de projeto são contribuições do presente trabalho.

1.2 Trabalhos Relacionados

A literatura sobre sistemas multivariáveis com parâmetros ou variáveis incertas é extensa. Vários trabalhos utilizam métodos da matemática intervalar para avaliar e controlar sistemas dinâmicos específicos ou classes de sistemas. A ideia do presente trabalho é, no entanto, diferente. A essência da teoria moderna de controle, conforme Kalman (1962), é abordada partindo-se da conjectura que o sistema físico é originalmente representado por uma equação diferencial ordinária com parâmetros intervalares.

Existem diversos trabalhos que consideram incertezas paramétricas a partir do uso de politopos definidos no espaço dos parâmetros do modelo. Trabalhos como os de Leite et al. (2004) e Oliveira

and Peres (2008) apresentam técnicas para análise de estabilidade robusta de sistemas com parâmetros incertos limitados por um politopo. Leite et al. (2002) discutem a existência de um controle por realimentação de estados para tais sistemas, assumindo que o polo está localizado dentro de um círculo no plano complexo.

A análise intervalar moderna de Moore et al. (2009) tem sido aplicada em uma variedade de áreas. Trabalhos como Chen et al. (1997), Jaulin and Walter (2002) e Jaulin et al. (2002) utilizam análise intervalar no tratamento de dados e estimação de parâmetros. Técnicas intervalares são utilizadas também no projeto de controladores PID (Banerjee et al., 2015), controle ótimo (Chang and Peng, 1972), controle preditivo (Zhang and Kovacevic, 1997), controle de sistemas não-lineares em tempo discreto (Jaulin and Walter, 1997) e controle granular (Leite et al., 2012) (Leite et al., 2015).

Em relação à pesquisa em controle robusto por meio de desigualdades matriciais lineares (LMIs), e.g. (Guerra and Vermeiren, 2004) (Leite et al., 2015), controle intervalar é uma abordagem concorrente, pouco discutida. Em outras palavras, existem poucos teoremas e provas na literatura – apesar de existirem resultados importantes, como aquele da estabilidade de Kharitonov. O problema de relaxação de LMIs surge analogamente em modelagem e controle intervalar a partir do conservadorismo introduzido pelas operações envolvendo intervalos. Implicitamente, na abordagem intervalar, também são considerados politopos no espaço dos parâmetros.

1.3 Objetivos

Os objetivos deste trabalho são: (i) analisar qualitativamente sistemas dinâmicos lineares contínuos representados em espaço de estados a partir de matrizes de parâmetros em $\mathbb{IR}$ e $\mathbb{IC}$. Parâmetros não-estruturados, em princípio, não permitem estimações ou modelagem de variações; e (ii) obter métodos sistemáticos de projeto robusto levando em conta os valores possíveis dos parâmetros. Controle robusto deve garantir requisitos de desempenho independente da variação e/ou da incerteza sob o valor exato dos parâmetros.

2 Aritmética Intervalar

O *intervalo fechado* $[a, b]$ é o conjunto

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x \leq b\}. \quad (4)$$

Intervalos serão representados por letras maiúsculas, e seus extremos por letras minúsculas. Por exemplo,

$$X = [\underline{x}, \bar{x}]. \quad (5)$$

O conjunto de todos os intervalos fechados reais é denotado por $\mathbb{IR}$ (Jaulin et al., 2001).

As operações da aritmética usual podem ser estendidas para o caso intervalar (Moore et al., 2009; Moore, 1966). Sendo $X = [\underline{x}, \bar{x}]$ e $Y = [\underline{y}, \bar{y}]$ dois intervalos, são definidas as operações

$$X + Y = [\underline{x} + \underline{y}, \bar{x} + \bar{y}], \quad (6)$$

$$X - Y = [\underline{x} - \bar{y}, \bar{x} - \underline{y}], \quad (7)$$

$$XY = [\min S, \max S], \quad (8)$$

sendo $S = \{\underline{x}\underline{y}, \underline{x}\bar{y}, \bar{x}\underline{y}, \bar{x}\bar{y}\}$. Além disso, caso $0 \notin Y$, também são definidos

$$1/Y = [1/\bar{y}, 1/\underline{y}] \quad (9)$$

e

$$X/Y = X \cdot 1/Y. \quad (10)$$

A largura do intervalo $X = [\underline{x}, \bar{x}]$ é

$$w(X) = \bar{x} - \underline{x}, \quad (11)$$

e seu ponto médio é

$$m(x) = \frac{\underline{x} + \bar{x}}{2}. \quad (12)$$

Da mesma maneira, o ponto médio do vetor intervalar $V = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ é o vetor

$$m(V) = (m(X_1), m(X_2), \dots, m(X_n)). \quad (13)$$

Um conjunto de vetores intervalares é *linearmente dependente* se existem constantes reais $c_1, \dots, c_n$, não todas nulas, tais que $c_1 V_1 + \dots + c_n V_n$ é um vetor intervalar contendo o vetor nulo. Caso contrário, os vetores V_i são ditos *linearmente independentes*.

O *determinante* de uma matriz intervalar M é calculado de forma similar ao cálculo para matrizes reais. Entretanto, utiliza-se as operações aritméticas intervalares ao invés das operações com números reais. Seja a matriz intervalar

$$M = \begin{bmatrix} X & Y \\ Z & W \end{bmatrix}, \quad (14)$$

com $X, Y, Z, W \in \mathbb{IR}$, então

$$|M| = X \cdot W - Z \cdot Y. \quad (15)$$

Se M tem elementos intervalares, então $|M|$ é um intervalo, podendo ser um intervalo degenerado.

Uma matriz intervalar M tem *posto completo* se seus vetores linha são linearmente independentes. De outra forma, $|M|$ não deve conter 0.

3 Análise de Sistemas com Parâmetros Intervalares

Considere sistemas cujos erros paramétricos de modelagem são representados por meio de intervalos de números reais. Tais intervalos contêm o valor correto e limitam as possíveis variações. Admita sistemas representados na forma (3).

3.1 Estabilidade

A estabilidade de um sistema pode ser inferida pela posição de seus polos em relação ao eixo imaginário. A equação característica de um sistema linear com parâmetros intervalares é

$$|sI - A| = 0. \quad (16)$$

Sendo A intervalar, os coeficientes do polinômio característico também são intervalos. A equação característica assume

$$A_n s^n + A_{n-1} s^{n-1} + \dots + A_0 = 0, \quad (17)$$

sendo $A_i = [\underline{a}_i, \bar{a}_i]$.

Um polinômio intervalar é *robustamente estável* se é estável para todos os valores que seus coeficientes podem assumir dentro de seus respectivos intervalos (Jaulin et al., 2001). Em outras palavras, um polinômio intervalar é robustamente estável se suas raízes têm parte real negativa para todas as combinações de coeficientes possíveis dentro de seus intervalos.

Da mesma maneira, um polinômio intervalar é *robustamente instável* se é instável para algum valor dos coeficientes dentro dos intervalos de possibilidade.

O Teorema a seguir permite reduzir o número de polinômios que precisam ser avaliados a apenas quatro, Jaulin et al. (2001).

Teorema 1 (Kharitonov) *Seja $\mathbb{A} = [\underline{a}_n, \bar{a}_n] s^n + \dots + [\underline{a}_0, \bar{a}_0]$ um polinômio intervalar. Então, $\mathbb{A}$ é robustamente estável se, e somente se,*

$$\begin{aligned} & \underline{a}_n s^n + \underline{a}_{n-1} s^{n-1} + \bar{a}_{n-2} s^{n-2} + \bar{a}_{n-3} s^{n-3} + \\ & \quad + \underline{a}_{n-4} s^{n-4} + \underline{a}_{n-5} s^{n-5} \dots, \\ & \bar{a}_n s^n + \underline{a}_{n-1} s^{n-1} + \underline{a}_{n-2} s^{n-2} + \bar{a}_{n-3} s^{n-3} + \\ & \quad + \bar{a}_{n-4} s^{n-4} + \underline{a}_{n-5} s^{n-5} \dots, \\ & \bar{a}_n s^n + \bar{a}_{n-1} s^{n-1} + \underline{a}_{n-2} s^{n-2} + \underline{a}_{n-3} s^{n-3} + \\ & \quad + \bar{a}_{n-4} s^{n-4} + \bar{a}_{n-5} s^{n-5} \dots \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} & \underline{a}_n s^n + \bar{a}_{n-1} s^{n-1} + \bar{a}_{n-2} s^{n-2} + \underline{a}_{n-3} s^{n-3} + \\ & \quad + \underline{a}_{n-4} s^{n-4} + \bar{a}_{n-5} s^{n-5} \dots \end{aligned}$$

são estáveis.

Prova: Vide (Yeung and Wang, 1987). $\square$

A estabilidade de sistemas lineares com parâmetros intervalares pode ser inferida aplicando o Teorema de Kharitonov à equação característica intervalar do sistema em questão.

3.2 Controlabilidade

O conceito de controlabilidade de estados está relacionado à possibilidade de influenciar os estados a partir da entrada. Esse conceito é estendido para sistemas com parâmetros intervalares.

Um sistema com incerteza paramétrica intervalar é *de estado robustamente controlável* se tem estados controláveis para todos os valores dos parâmetros dentro dos respectivos intervalos de possibilidade. Isto é, o sistema é robustamente controlável se permanece controlável apesar de variações paramétricas ou erros de modelagem.

Teorema 2 *Um sistema com incerteza paramétrica intervalar é de estado robustamente controlável se, e somente se, sua matriz de controlabilidade*

$$M = [B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{n-1}B]$$

tem posto completo para quaisquer combinações de valores de parâmetros de A e B dentro de seus respectivos intervalos de possibilidade.

Prova: Se M tem posto completo para todos os valores possíveis dos parâmetros de A e B dentro dos intervalos de possibilidade, então o sistema tem estados controláveis para qualquer configuração exata (não-incerta) particular. Nesse caso M terá vetores linha linearmente independentes e $|M| \neq 0$ para quaisquer A e B específicas. $\square$

Caso o sistema tenha entrada e saída únicas, M é matriz quadrada de ordem n . O Teorema 2 diz que $|M|$ é um intervalo que não contém 0, pois se $0 \in |M|$, alguma configuração paramétrica causará dependência linear de vetores linha.

Um sistema com incerteza paramétrica intervalar é dito *de saída robustamente controlável* se sua saída é controlável para quaisquer valores assumidos pelos parâmetros.

Teorema 3 *Um sistema com incerteza paramétrica intervalar é de saída completamente controlável se, e somente se,*

$$N = [CB \quad CAB \quad CA^2B \quad \dots \quad CA^{n-1}B \quad D]$$

tem posto completo para quaisquer combinações dos elementos de A , B , C e D dentro de seus respectivos intervalos de possibilidade.

Prova: Análoga àquela do Teorema 2. $\square$

Ao contrário do que acontece no caso da controlabilidade de estados de sistemas com uma entrada e uma saída, a matriz N não é quadrada. Faz-se necessário verificar se os vetores linha de N são linearmente independentes.

A controlabilidade completa de estados não é condição necessária nem suficiente para a controlabilidade da saída. Por exemplo, se D é nula e C não tem posto completo, é impossível alcançar uma determinada saída, não importa quais sejam os estados e que estes sejam controláveis. Por outro lado, se um sistema tem saída controlável e há mais estados do que saídas, então há mais de uma combinação de estados que resultam na mesma saída. Logo, o sistema pode não ter todos os estados controláveis, mas ter saída controlável. A matriz D sempre ajuda a estabelecer a controlabilidade da saída, porém D é não-nula apenas para sistemas com o mesmo número de polos e zeros.

3.3 Observabilidade

A observabilidade de um sistema linear está relacionada à possibilidade de se estimar os estados a partir de valores da saída do sistema. Muitas vezes, não é possível mensurar todos os estados fisicamente. Faz-se necessário estimá-los a partir do projeto de observadores. A alocação dos polos de um observador é arbitrária se o sistema em questão é observável.

Teorema 4 *Um sistema com incerteza paramétrica intervalar é robustamente observável se, e somente se, a matriz de observabilidade*

$$Q = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

tem posto completo para quaisquer combinações de valores dos parâmetros de A e C dentro de seus intervalos de possibilidade.

Prova: Se Q tem posto completo, não existe combinação possível dos elementos de A e C dentro dos intervalos de possibilidade que a façam ser singular. Portanto, não existe configuração exata particular do modelo que torne a estimação dos estados impossível; os vetores linha de Q são linearmente independentes. $\square$

Similar a análise de controlabilidade robusta de estados, caso o sistema tenha entrada e saída únicas, a matriz Q é quadrada. A condição do Teorema 4 equivale a dizer que $0 \notin |Q|$.

Os Teoremas 1, 2, 3 e 4 permitem análises garantidas das características de um sistema linear incerto. Eles dispensam a verificação de todas as possibilidades para os parâmetros incertos, o que seria absurdo, já que são infinitas.

4 Projeto de Controle Robusto

Controle de sistemas com incerteza paramétrica deve garantir desempenho aceitável para todos os valores possíveis dos parâmetros.

Seja um sistema de ordem n com m entradas. Assuma a lei de controle

$$u = h(x) = -Kx; \quad (18)$$

$K \in \mathbb{R}^{m \times n}$, u é vetor de controle.

A incerteza intervalar dos parâmetros do modelo que dá suporte ao projeto do controlador K pode ser traduzida em incerteza na posição de seus polos. Os polos são representados por intervalos complexos. Suas posições em relação aos eixos real e imaginário determinam o comportamento transitório do sistema.

Caso a região do plano complexo delineada pelos polos intervalares complexos não intercepte o eixo real e esteja totalmente à esquerda do eixo imaginário, o sistema será sempre subamortecido. Caso a região intercepte o eixo real, o sistema pode apresentar comportamento sobreamortecido, criticamente amortecido ou subamortecido, dependendo dos parâmetros atuais. Estabilidade garantida é obtida caso toda a região de incerteza esteja à esquerda do eixo imaginário. De outra forma, o sistema pode oscilar ou ser instável.

Os métodos de projeto propostos se baseiam em alocação de polos. A posição desejada dos polos em malha fechada deve ser escolhida de modo a garantir que os requerimentos de desempenho sejam atendidos mesmo no pior caso (robustez). São critérios de desempenho: o sobressinal máximo; tempo de subida, pico e acomodação; frequência de ressonância; entre outros (Nise, 2012).

Um sistema incerto de ordem qualquer pode ser aproximado pela soma das dinâmicas de sistemas de primeira e segunda ordens. Relações de desempenho para sistemas de segunda ordem são conhecidas. Elas representam com relativa acurácia o comportamento de sistemas de ordem qualquer desde que existam polos dominantes. A equação característica de um sistema incerto de segunda ordem é

$$s^2 + 2 \cdot [\zeta, \bar{\zeta}] \cdot [\omega_n, \bar{\omega}_n] + [\omega_n, \bar{\omega}_n]^2 = 0 \quad (19)$$

onde ζ e ω_n são o grau de amortecimento e a frequência natural; s é frequência complexa.

A Fig. 1 mostra a disposição de polos incertos no plano complexo devido aos parâmetros intervalares em (19). Além disso, mostra limites, inferior e superior, para os parâmetros associados. Note que $\omega_n, \omega_{na}, \omega_{nb} \in [\omega_n, \bar{\omega}_n]$. Eventualmente, a região de incerteza dos polos envolve o eixo real induzindo sobreamortecimento. Não obstante, para robustez da malha fechada, a região de incerteza não pode envolver o eixo imaginário.

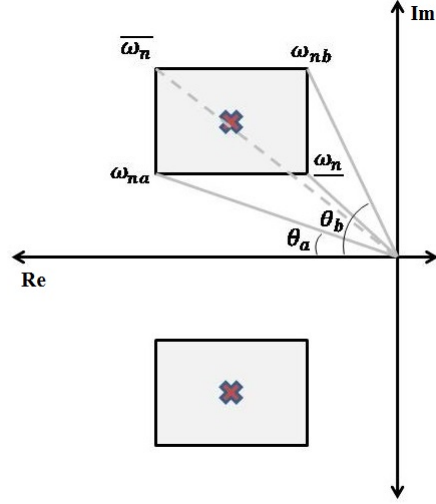


Figura 1: Região de incerteza no plano complexo induzida por parâmetros intervalares

Seja t_{sd} , t_{pd} , $\%UP_d$ e ω_{pd} , respectivamente, o tempo de acomodação, o tempo de pico, o sobressinal desejados; e a frequência de ressonância (Nise, 2012). Dados estes requerimentos, tem-se que os polos desejados para a malha fechada devem ser tais que $[\zeta, \bar{\zeta}]$ e $[\omega_n, \bar{\omega}_n]$ satisfaçam

$$\frac{4}{\zeta \omega_n} < t_{sd}, \quad (20)$$

$$100 \times \exp\left(-\frac{\zeta \pi}{\sqrt{1 - \zeta^2}}\right) < \%UP_d, \quad (21)$$

$$\frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}} < t_{pd} \quad (22)$$

e

$$\omega_{pd} > \bar{\omega}_n \sqrt{1 - 2\zeta^2}. \quad (23)$$

Essas condições garantem estabilidade e que o desempenho seja superior ao requerido.

4.1 Pareamento de Coeficientes Intervalares

Generaliza-se o método de Pareamento de Coeficientes reais de Kalman para o caso intervalar. Esta é uma contribuição deste trabalho. Essencialmente, o método consiste em equiparar os coeficientes da equação característica do sistema em malha fechada,

$$|sI - A + BK| = 0, \quad (24)$$

i.e., o polinômio intervalar

$$s^n + A_1 s^{n-1} + \dots + A_{n-1} s + A_n = 0, \quad (25)$$

em que $A_i \in \mathbb{IR}$, $i = 1, \dots, n$, com os coeficientes da equação característica desejada, ou seja, com

os coeficientes b_i obtidos a partir da posição escolhida para os polos $p_1, p_2, \dots, p_n$ conforme

$$(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n) = 0$$

$$s^n + b_1 s^{n-1} + b_{n-1} s + b_n = 0. \quad (26)$$

Comparando o ponto médio dos parâmetros em (25) com os parâmetros em (26), determina-se K . A abordagem do ponto médio fornece o menor desvio máximo do polo do sistema real (incerto) em relação ao polo da malha fechada. O sistema linear

$$\begin{cases} m(A_n) = b_n \\ m(A_{n-1}) = b_{n-1} \\ \dots \\ m(A_1) = b_1. \end{cases} \quad (27)$$

tem solução para quaisquer p_i caso o Teorema 2 seja satisfeito. Se o sistema estiver na forma canônica controlável, as relações (27) são desacopladas, facilitando o cálculo de K .

Se o sistema possui múltiplas atuações, (27) tem mais incógnitas do que equações e, portanto, múltiplas soluções. Assim, além de alocar polos arbitrariamente, o método permite que outros requisitos possam ser levados em conta, como largura de banda e robustez relativa.

4.2 Método Ackermann Intervalar

O método Ackermann Intervalar estende seu homólogo para sistemas com parâmetros reais para o caso incerto. Esta é uma proposta do presente trabalho. O método tem suporte do Teorema de Cayley e Hamilton (Nise, 2012), que essencialmente prova que toda matriz anula seu próprio polinômio característico.

O controlador K é obtido de

$$K = [0 \ 0 \ \dots \ 1] M^{-1} p_c(A), \quad (28)$$

onde

$$M = [B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B] \quad (29)$$

é matriz de controlabilidade e

$$p_c(A) = A^n + b_1 A^{n-1} + \dots + b_{n-1} A + b_n I \quad (30)$$

é o polinômio característico desejado avaliado em A ; I é a identidade (prova em (Nise, 2012)).

A abordagem do ponto médio, $m(A^n), \dots, m(A)$, fornece o menor desvio máximo do polo do sistema real (incerto) em relação ao polo da malha fechada. O método é aplicável diretamente a sistemas em que M é invertível, ou seja, o Teorema 2 deve ser atendido.

5 Resultados e Discussões

Um sistema hipotético, contínuo, linear e invariante no tempo, em espaço de estados, é considerado nessa seção para ilustrar a efetividade das análises e métodos de projeto.

Seja

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx, \end{aligned} \quad (31)$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ [-3, -2] & [-1, 0] \end{bmatrix}, \quad B = [0 \ 1]'$$

e

$$C = [1 \ 0].$$

A equação característica em malha aberta é

$$|sI - A| = s^2 + [0, 1] \cdot s + [2, 3]. \quad (32)$$

Logo, os polinômios de Kharitonov são

$$\begin{aligned} s^2 + 3 &= 0 \\ s^2 + 2 &= 0 \\ s^2 + s + 2 &= 0 \\ s^2 + s + 3 &= 0 \end{aligned} \quad (33)$$

Suas raízes têm parte real negativa, logo o sistema original é robustamente estável.

É simples calcular as matrizes de controlabilidade de estados, controlabilidade da saída e de observabilidade a partir de (31),

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & [-1, 0] \end{bmatrix} \quad (34)$$

$$N = [0 \ 1 \ 0] \quad (35)$$

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (36)$$

Os determinantes de M e Q são intervalos (degenerados) que não contêm 0. Além disso, é imediato que N tem posto 1. Logo, o sistema tem estados e saída controláveis e é observável.

Sejam requisitos de desempenho que o sistema tenha sobressinal máximo de 30% e tempo de acomodação de 3 segundos. Métodos usuais para alocação de polos no plano complexo de forma a atender estes requisitos podem ser empregados. No entanto, devido à incerteza paramétrica, uma “folga” é considerada de modo a garantir que os requisitos sejam satisfeitos no pior caso.

O tamanho da folga, ou margem de segurança, pode ser definido de diferentes maneiras. Uma abordagem é assumir que o polo intervalar terá

uma largura, tanto na parte real quanto imaginária, igual à maior largura dos parâmetros incertos do sistema. Essa hipótese nem sempre é verdadeira, mas pode ser interessante para um primeiro projeto. Caso o sistema controlado não atenda os requisitos, novos polos devem ser escolhidos e o controlador reprojetoado.

No exemplo em questão, polos em $-1 \pm j$ proporcionam tempo de acomodação de 4 segundos e sobressinal de menos de 5%. Como a maior largura do parâmetro incerto é 1, os polos do sistema controlado serão posicionados em $-2 \pm j4$. Utilizando o método de Pareamento de Coeficientes Intervalares ou o método de Ackermann Intervalar, o vetor de controle projetado é

$$K = [17, 5 \quad 3, 5]. \quad (37)$$

A equação característica do sistema em malha fechada é

$$\begin{aligned} |sI - A + BK| &= s^2 + [3.5, 4.5] \cdot s + [19.5, 20.5] \\ &= s^2 \cdot [0.40, 0.50] \cdot [4.42, 4.53] \cdot s \\ &\quad + [4.42, 4.53]^2. \end{aligned} \quad (38)$$

Verifica-se a estabilidade robusta do sistema em malha fechada a partir dos polinômios de Kharitonov

$$\begin{aligned} s^2 + 3.5s + 20.5 &= 0 \\ s^2 + 3.5s + 19.5 &= 0 \\ s^2 + 4.5s + 19.5 &= 0 \\ s^2 + 4.5s + 20.5 &= 0 \end{aligned} \quad (39)$$

Suas raízes têm parte real negativa.

Utilizando os valores limiares dos parâmetros da malha fechada nas equações de desempenho, (20) e (21), obtém-se:

$$\frac{4}{0.40 \times 4.42} = 2.26 < 3 \quad (40)$$

$$\begin{aligned} 100 \times \exp\left(-\frac{0.40 \times \pi}{\sqrt{1 - (0.40)^2}}\right) &= \\ &= 25.38\% < 30\%, \end{aligned} \quad (41)$$

i.e., os critérios de desempenho foram atendidos.

Outros critérios também poderiam ser garantidos, como tempo de pico e frequência de ressonância, conforme (22) e (23),

$$\frac{\pi}{4.42 \sqrt{1 - (0.40)^2}} = 0.78 \quad (42)$$

$$4.53 \times \sqrt{1 - 2 \times (0.5)^2} = 3.2, \quad (43)$$

O tempo de pico será de no máximo 0.78 segundos e a frequência de ressonância será maior que 3.2 rad/segundo.

Suponha condição inicial nula, $x = [0 \ 0]'$, e uma entrada de referência, r , em degrau unitário. Nesse caso, para que a saída $y = x_1$ siga a referência enquanto o estado x_2 é regulado, i.e. $x_2 \rightarrow 0$, o ganho k_1 relativo a x_1 é considerado no ramo direto. A lei de controle é modificada para $u = -Kx + k_1 r$.

A Fig. 2 mostra a evolução dos estados devido ao degrau unitário para o sistema projetado. A incerteza paramétrica fornece um invólucro de respostas possíveis. Nota-se que o sistema é sub-amortecido para todos os valores dos parâmetros; os polos incertos não envolvem os eixos real e complexo. Nota-se erro em regime permanente devido ao sistema ser do tipo 0.

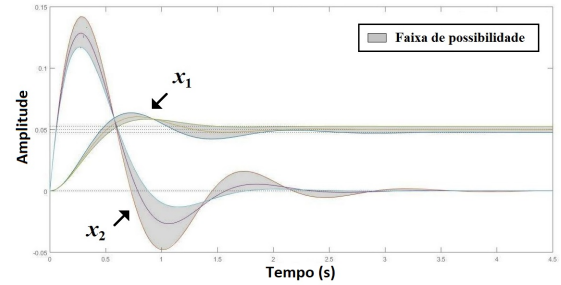


Figura 2: Resposta ao degrau do sistema em malha fechada

É importante enfatizar que o sistema em malha fechada não garante que os polos estejam efetivamente em $s = -2 \pm j4$, conforme desejado. Os parâmetros intervalares do sistema representam a impossibilidade da percepção exata de seus valores por meio das variáveis mensuráveis. Logo, a resposta do sistema pode ser qualquer dentro do invólucro apresentado na Fig. 2. O invólucro dos estados refere-se às situações extremas.

6 Conclusão

A matemática intervalar foi empregada na análise qualitativa de sistemas dinâmicos contínuos com parâmetros incertos. O comportamento dos sistemas foi analisado sem a necessidade de considerar todos os valores possíveis para os parâmetros.

Resultados, como o teorema de Kharitonov, e as extensões intervalares dos teoremas de controlabilidade de estados e saídas e de observabilidade, devidos a Kalman, foram apresentados. Estabilidade robusta, controlabilidade e observabilidade de sistemas com parâmetros incertos foram determinados de maneira simples; a quantidade de cálculos foi minimizada a partir de transformações lineares e do uso dos valores limites.

Modificou-se a dinâmica dos estados de sistemas incertos por meio do projeto de compensador. O controlador consistiu de uma matriz de ganhos e realimentação linear de estados. Ele garante que transitórios se mantenham entre certos limites, in-

ferior e superior, e ao mesmo tempo que o desempenho desejado seja satisfeito para todas as possibilidades paramétricas. Os métodos de Pareamento de Coeficientes Intervalares e Ackermann Intervalar foram propostos neste trabalho.

Em trabalhos futuros, é necessário buscar relaxação das condições que garantem estabilidade e desempenho do sistema em malha fechada já que operações sobre intervalos produzem resultados conservadores, especialmente para sistemas de ordem elevada. A busca por relaxação surge de forma similar àquela da pesquisa em desigualdades matriciais lineares considerando politopos.

Referências

- Banerjee, S., Halder, K., Dasgupta, S., Mukhopadhyay, S., Ghosh, K. and A., G. (2015). An Interval Approach for Robust Control of a Large PHWR with PID Controllers, *IEEE Trans on Nuclear Science* **62**(1): 281–292.
- Caun, R., Assuncao, E., Teixeira, M. and Caun, A. (2018). Lqr-lmi control applied to convex-bounded domains, *Cogent Engineering* **5**(1457206): 2–27.
- Chang, S. and Peng, T. (1972). Adaptive Guaranteed Cost control of Systems with Uncertain Parameters, *IEEE Transactions on Automatic Control* **17**(4): 474–483.
- Chen, G., Wang, J. and Shieh, L. (1997). Interval Kalman Filtering, *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems* **33**(1): 250–259.
- Guerra, T. M. and Vermeiren, L. (2004). Lmi-based relaxed nonquadratic stabilization conditions for nonlinear systems in the takagi-sugeno’s form, *Automatica* **40**(5): 823–829.
- Jaulin, L., Kieffer, M., Ditré, O. and Walter, E. (2001). *Applied Interval Analysis with Examples in Parameter and State Estimation, Robust Control and Robotics*, 1 edn, Springer-Verlag, London.
- Jaulin, L., Kieffer, M., E., W. and Meizel, D. (2002). Guaranteed Robust Nonlinear Estimation with Application to Robot Localization, *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part C (Applications and Reviews)* **32**(4): 374–381.
- Jaulin, L. and Walter, E. (1997). Global Numerical Approach to Nonlinear Discrete-Time Control, *IEEE Transactions on Automatic Control* **42**(6): 872–875.
- Jaulin, L. and Walter, E. (2002). Guaranteed Robust Nonlinear Minimax Estimation, *IEEE Transactions on Automatic Control* **47**(11): 1857–1864.
- Kalman, R. E. (1962). Mathematical Description of Linear Dynamical Systems, *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics Series A Control* **1**(2): 152–192.
- Karimi, A., Khatibi, H. and Longchamp, R. (2007). Robust Control of Polytopic Systems by Convex Optimization, *Automatica* **43**(8): 1395–1402.
- Leite, D., Costa, P. and Gomide, F. (2012). Interval approach for evolving granular system modeling, *In: Learning in Non-stationary Environments* **1**: 271–300.
- Leite, D., Palhares, R., Campos, V. and Gomide, F. (2015). Evolving granular fuzzy model-based control of nonlinear dynamic systems, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* **23**(4): 923–938.
- Leite, V. J., Montagner, V. F. and Peres, P. L. (2002). Robust Pole Location by Parameter Dependent State Feedback Control, *Decision and Control, 2002, Proceedings of the 41st IEEE Conference on* **1**(1): 1–6.
- Leite, V., Oliveira, R., Oliveira, R. d. and Peres, P. (2004). D-stability of Polytopes of Polynomial Matrices: Characterization through LMIs, *Decision and Control, 2004. CDC. 43rd IEEE Conference on* **1**(1): 1–6.
- Moore, R. E. (1966). *Interval Analysis*, 1 edn, Prentice-Hall, Englewood Cliffs.
- Moore, R. E., Kearfott, R. B. and Cloud, M. J. (2009). *Introduction to Interval Analysis*, 1 edn, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia.
- Nise, N. S. (2012). *Engenharia de Sistemas de Controle*, 2 edn, LTC, Rio de Janeiro.
- Oliveira, R. C. and Peres, P. L. (2008). Robust Stability Analysis and Control Design for Time-varying Discrete-time Polytopic Systems with Bounded Parameter Variation, *American Control Conference, 2008* **1**(1): 1–6.
- Rodrigues, L. A., Oliveira, R. C. and Camino, J. F. (2018). Parameterized lmis for robust state feedback control of continuous-time polytopic systems, *Int Journal of Robust and Nonlinear Control* **28**(3): 94–952.
- Yeung, K. and Wang, S. (1987). A Simple Proof of Kharitonov’s Theorem, *IEEE Transactions on Automatic Control* **32**(9): 822–823.
- Zhang, Y. and Kovacevic, R. (1997). Robust Control of Interval Plants: a Time Domain Method, *IEE Proceedings - Control Theory and Applications* **144**(4): 347–353.