

CONSIDERAÇÕES SOBRE A INFLUÊNCIA DO CONDICIONAMENTO E DO ARREDONDAMENTO NA OBTENÇÃO DE SÉRIES TEMPORAIS DA EQUAÇÃO LOGÍSTICA

BRUNO DE PAULA O. PAIVA*, PEDRO HENRIQUE O. SILVA*, BRUNO C. DA SILVA*, ERIVELTON G. NEPOMUCENO*, GLEISON FRANSOARES V. AMARAL*

* *Grupo de Controle e Modelagem, Departamento de Engenharia Elétrica, Universidade Federal de São João del-Rei, Praça Frei Orlando, 170, Centro, 36307-352 - São João del-Rei, MG, Brasil*

Emails: brunodepaula3p@yahoo.com.br, pedrolives@hotmail.com.br,
bruno.csilva@gmail.com, nepomuceno@ufesj.edu.br, amaral@ufesj.edu.br

Abstract— The sensitivity to initial conditions is one of the known characteristics of chaotic systems. This property is usually envisioned by means of numerical methods. However, there is an unusual situation when the tool is used to view the chaotic behavior interferes with the results due the numerical limitations and also do not contemplate basic mathematical properties such as the axioms of multiplication and division. Soon a system with chaotic behavior when subjected to these limitations may have totally unexpected or inconsistent results. This article shows the influence of computational calculation of recursive functions and its effect to obtaining the temporal logistics map series. In particular, it is shown that different orbits can be obtained when changing the conditioning of logistic equation or the rounding mode, even for parameter control and initial condition are the same.

Keywords— Discrete Event Systems, Temporal Series, Numerical Simulation, Logistic Map, Conditioning of Equations.

Resumo— A sensibilidade as condições iniciais é uma das características mais conhecidas dos sistemas caóticos. Esta propriedade normalmente é vislumbrada por meio de métodos numéricos. Entretanto, tem-se uma situação inusitada quando a ferramenta que é usada para visualizar o comportamento caótico interfere nos resultados devido as suas limitações numéricas e também por não contemplar propriedades matemáticas básicas como os axiomas da multiplicação e divisão. Logo um sistema com comportamento caótico quando sujeito a estas limitações pode apresentar resultados totalmente inesperados e/ou incoerentes. Neste artigo, apresenta-se a influência do cálculo computacional de funções recursivas e seu efeito na obtenção das séries temporais do mapa logística. Em particular, mostra-se que se pode obter órbitas diferentes quando se altera o condicionamento da equação logística ou o modo de arredondamento, mesmo para parâmetro de controle e a condição inicial iguais.

Palavras-chave— Sistemas a Eventos Discretos, Série Temporal, Simulação Numérica, Mapa Logístico, Condicionamento de Equações.

1 Introdução

Funções recursivas, da forma $x_{n+1} = f(x_n)$ possibilitam descrever uma grande variedade de problemas (Feigenbaum, 1978). Por exemplo, existe um interesse considerável em encontrar circuitos que representem o comportamento das funções recursivas com potenciais aplicações em geração de números aleatórios, amostragem de frequência, variação e propagação de espectro em comunicações (Suneel, 2006; Martinez et al., 2013).

Como exemplo de funções recursivas importantes, têm-se os mapas unidimensionais, em especial o mapa logístico, que apresenta vários fenômenos não lineares. De acordo com (Saha and Strogatz, 1995), o mapa logístico é um dos exemplos mais abrangentes da matemática, pois o mesmo ilustra muitas noções fundamentais de dinâmica não linear: equilíbrio, periodicidade, caos, bifurcação e fractais.

Na literatura é comum encontrar diversos trabalhos em que foram analisados os pontos fixos estáveis do mapa logístico de período 1 e múltiplos. Contudo, pouca ou quase nenhuma atenção é dada aos pontos fixos instáveis. A análise desse

mapa baseia-se no estudo da estabilidade dos seus pontos fixos, que podem ser estáveis ou instáveis.

Entretanto, tem-se uma situação inusitada quando a ferramenta que é usada para visualizar o comportamento caótico e, também, a estabilidade dos pontos fixos interfere nos resultados devido as suas limitações numéricas e, também, por não contemplar propriedades matemáticas básicas como os axiomas da multiplicação e divisão. Logo, um sistema com comportamento caótico, quando sujeito a essas limitações, pode apresentar resultados totalmente inesperados e/ou incoerentes.

Neste artigo, apresenta-se a influência do cálculo computacional de funções recursivas e seu efeito na obtenção das séries temporais do mapa logística. Em particular, mostra-se que se pode obter órbitas diferentes quando se altera o condicionamento da equação logística ou o modo de arredondamento, mesmo para parâmetro de controle e a condição inicial iguais.

2 Conceitos Preliminares

Dado o mapa logístico proposto por (May, 1976)

$$x_{n+1} = f(x_n) = rx_n(1 - x_n) \quad (1)$$

em que $n \in \mathbb{N}$ e $r \in \mathbb{R}$

De acordo com (Monteiro, 2006) quando adota-se $x_0 \in [0,1]$, tem-se que para $0 \leq r \leq 4$ x_n pertence ao intervalo $[0,1]$ e para $r > 4$ é obtido, em alguma das interações um valor negativo, o que indica que $x_n \rightarrow -\infty$.

2.1 Análise do Mapa Logístico

Quando analisa-se o mapa logístico considerando que o parâmetro de controle pertence ao intervalo $0 \leq r \leq 4$, calcula-se os pontos fixos em função de r fazendo $f(x^*) = x^*$. Assim, são obtidos os pontos fixos $x_1^* = 0$ e $x_2^* = 1 - (1/r)$ e os autovalores associados a x_1^* e x_2^* valem, respectivamente, $\lambda_1 = r$ e $\lambda_2 = 2 - r$

Em (Monteiro, 2006)   dito que $x_1^* = 0$ será assintoticamente  st vel para $0 \leq r < 1$ e instável para $r \geq 1$. Agora em $r = 1$ os pontos fixos trocam de estabilidade. Logo, em $(x^*, r) = (0,1)$ ocorre uma bifurcação transc tica supercrítica. Logo $x_2^* = 1 - (1/r)$ é assintoticamente  st vel para $1 < r < 3$.

Dando continuidade   análise, tem-se que caso $r = 3$, o autovalor associado ao ponto fixo x_2^* será $\lambda_2 = -1$. Segundo (Monteiro, 2006) x_2^* sofre uma bifurcação de duplicação de período. Portanto, para $r > 3$, surge uma órbita de período-2 formada pelos pontos x_3^* e x_4^* que são definidos da seguinte maneira.

$$\begin{aligned} x_3^* &= f(x_4^*) = f(f(x_3^*)) = f^{(2)}(x_3^*) \\ x_4^* &= f(x_3^*) = f(f(x_4^*)) = f^{(2)}(x_4^*) \end{aligned} \quad (2)$$

Para se obter a estabilidade da órbita de período-2, segundo (Monteiro, 2006),   necessário avaliar a estabilidade dos pontos fixos x_3^* e x_4^* . É sabido que a órbita é assintoticamente  st vel se x_3^* e x_4^* são pontos fixos assintoticamente  st veis de $f^{(2)}$. Logo, calcula-se os autovalores associados aos pontos fixos fazendo:

$$\begin{aligned} \lambda_3 &= \left. \frac{df^{(2)}(x)}{dx} \right|_{x=x_3^*} \\ \lambda_4 &= \left. \frac{df^{(2)}(x)}{dx} \right|_{x=x_4^*} \end{aligned} \quad (3)$$

obtém-se que:

$$\lambda_3 = \lambda_4 = -r^2 + 2r + 4 \quad (4)$$

Para que a órbita de período-2 seja assintoticamente  st vel,   necessário a definição:

$$-1 < -r^2 + 2r + 4 < +1 \quad (5)$$

Portanto,

$$3 < r < 1 + \sqrt{6} \approx 3,449490 \quad (6)$$

Para $r = 1 + \sqrt{6}$, tem-se que $\lambda_3 = \lambda_4 = -1$ e a órbita de período-2 sofre uma bifurcação de duplicação de período. Portanto, para $r = 1 + \sqrt{6}$, segundo (Monteiro, 2006), os pontos fixos de $f^{(2)}$ perdem sua estabilidade e se bifurcam, gerando uma órbita de período-4 assintoticamente  st vel, cujos pontos são obtidos a partir de $x^* = f^{(4)}(x^*)$.

Conforme se aumenta o valor do parâmetro de controle r , ocorrem sucessivas bifurcações *flip*, gerando órbitas de períodos 8, 16, 32, 64 ...

2.2 Condicionamentos da Equação Logística

Em (Yabuki and Tsuchiya, 2013), foram apresentadas 6 possibilidades de condicionamentos da equação logística (veja Tab. 1) que, apesar de serem matematicamente equivalentes, não são vistos assim pelos computadores pois, como exposto na norma IEEE 754-2008 (Zuras, 2008), os axiomas básicos da multiplicação e divisão não são contemplados pelos computadores que fazem uso da aritmética de ponto flutuante.

$L1$	$x_{n+1} = (ax_n)(1,0 - x_n)$
$L2$	$x_{n+1} = a(x_n(1.0 - x_n))$
$L3$	$x_{n+1} = (a - ax_n)x_n$
$L4$	$x_{n+1} = a(x_n - x_nx_n)$
$L5$	$x_{n+1} = ax_n - (ax_n)x_n$
$L6$	$x_{n+1} = ax_n - a(x_nx_n)$

Tabela 1: Equações logística equivalentes.

Além destas 6 estruturas, propõem-se as duas a seguir (veja Tab. 2), pois nestas não são empregadas nenhuma das propriedades oriundas dos axiomas básicos e, também, é avaliada a influência da potência pois, em alguns testes simples envolvendo comparação entre potências e as mesmas representadas como multiplicação, foi possível observar divergência em alguns casos.

$L7$	$x_{n+1} = ax_n - ax_n^2$
$L8$	$x_{n+1} = ax_n - ax_nx_n$

Tabela 2: Equações logística equivalentes propostas.

Logo, surge uma d vida sobre a importância do condicionamento da equação logística frente aos resultados obtidos.

2.3 Modos de Arredondamento e sua Influência no Processo de Convergência

Adotando como referencial a definição de ponto fixo proposta por (Nepomuceno, 2014), tem-se que:

Definição 2.3.1: Se $d(\hat{f}_n(\hat{x}^*), \hat{f}_{n-1}(\hat{x}^*)) \leq \delta_n + \delta_m$, então $\hat{x}^*$ é um ponto fixo. Em que

$\hat{f}_n$ e $\hat{f}_{n-1}$ são uma aproximação de f_n e f_{n-1} respectivamente, $\hat{x}^*$ é uma aproximação de x^* , δ_n e δ_m é o erro obtido através da iteração de n e m .

Logo, se a distância entre dois pontos consecutivos é menor que o erro acumulado, a simulação deve ser interrompida.

A partir da análise da definição de ponto fixo proposta por (Nepomuceno, 2014) e também das técnicas utilizadas para se realizar a análise intervalar em computadores, surgiu um questionamento quanto à influência do modo de arredondamento na convergência e, conseqüentemente, no resultado final obtido.

Para buscar uma resposta a essa pergunta foi necessário, primeiro, investigar na literatura quais eram as funções a serem utilizadas quando desejava-se variar o modo de arredondamento em uma simulação numérica feita no software Matlab. Assim, após encontrar tais funções, observou-se que as mesmas não são usualmente empregadas pela comunidade científica. Logo, não possuem uma descrição detalhada nem na literatura quanto menos no “help” do Matlab. Em razão dessa situação, foi necessário, primeiro, estudar as mesmas para, assim, entender melhor as suas funcionalidades e peculiaridades.

A seguir, os modos de arredondamento para o Matlab são apresentados com uma descrição da sua funcionalidade.

Modo de arredondamento para o $-\infty$:

```
system_dependent('setround', -Inf),
```

neste modo de arredondamento, tem-se que, quando o valor a ser representado x não é um ponto flutuante, é feito um arredondamento para o número x_- que é o ponto flutuante mais próximo de x que é menor que x .

Modo de arredondamento para o $+\infty$

```
system_dependent('setround', +Inf),
```

neste modo de arredondamento, tem-se que, quando o valor a ser representado x não é um ponto flutuante, é feito um arredondamento para o número x_+ que é o ponto flutuante mais próximo de x que é maior que x .

Modo de arredondamento para o mais próximo:

```
system_dependent('setround', 0.5),
```

neste modo de arredondamento, tem-se que, quando o valor a ser representado x não é um ponto flutuante, é feito um arredondamento para o ponto flutuante mais próximo de x , que pode ser o x_- ou x_+ .

3 Metodologia

3.1 Definição do Problema

Em (Hammel et al., 1987), o seguinte teorema foi proposto para simulação da equação logística quando $r = 3,80$ e $x_0 = 0,4$.

Teorema 3.1.1: Existe uma órbita verdadeira $\{x_n\}$ do mapa logístico para qual p_n (p_n representa o n -ésimo ponto obtido pelo computador Cray X-MP) está a uma distância de 10^{-7} de x_n para 10^7 iterações (i.e., para $n = 0, 1, 2, \dots, 10^7$).

Além da condição adotada para definição do teorema (Hammel et al., 1987) afirma que para $r = 3,6; 3,625; 3,65; 3,7; 3,75; 3,86; 3,91$ e condição inicial $x_0 = 0,4$ para todos os valores de r descrito, a conclusão do teorema é verdadeira.

A partir da análise do teorema proposto por (Hammel et al., 1987) e tendo conhecimento dos trabalhos de (Yabuki and Tsuchiya, 2013) e (Nepomuceno, 2014). Surge uma dúvida quanto a validade do teorema apresentado frente a uma mudança no condicionamento da equação logística e também do modo de arredondamento.

O condicionamento da equação logística a ser utilizado para comparar com o formato normalmente empregado na literatura é apresentado na Eq. (7).

$$x_{n+1} = a \cdot x_n - a \cdot x_n \cdot x_n \quad (7)$$

O motivo da escolha desse condicionamento reside no fato de o mesmo não empregar nenhuma dos axiomas básicos da multiplicação e divisão e, também, por não envolver potência, pois em alguns testes simples envolvendo comparação entre potências e as mesmas representadas como multiplicação, foi possível observar divergência em alguns casos.

Em todas as simulações, a condição inicial a ser utilizada será a mesma proposta por (Hammel et al., 1987) $x_0 = 0,4$. Em relação ao parâmetro de controle r , os autores deste trabalho escolheram 4 dos 8 valores para o qual o teorema se verifica segundo (Hammel et al., 1987), $r = 3,65; 3,75; 3,80; 3,86$.

As configurações da máquina utilizada para as simulações são as seguintes.

- Processador: Intel(R) Core(TM) i7-5500U CPU @ 2.40GHz.
- Memória Ram: 8,00 GB (7,82 GB utilizável).
- Tipo de sistema: 64-bits.
- Sistema operacional: Windows 10 Home.

4 Resultados

A seguir, serão apresentados os resultados obtidos para os valores de r e x_0 citados anteriormente quando é utilizado o condicionamento usualmente empregado pela grande maioria dos pesquisadores e o proposto pelos autores deste trabalho (veja Eq. 7).

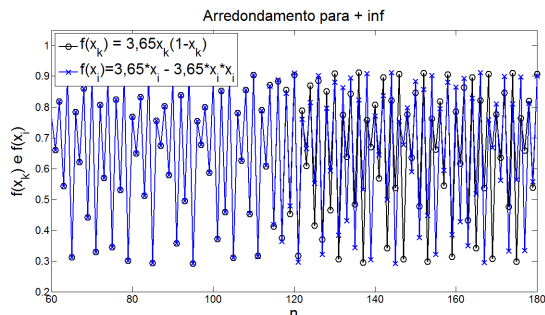


Figura 1: Série Temporal da equa o logística para $r = 3,65$ e $x_0 = 0,4$. Modo de arredondamento para o $+\infty$.

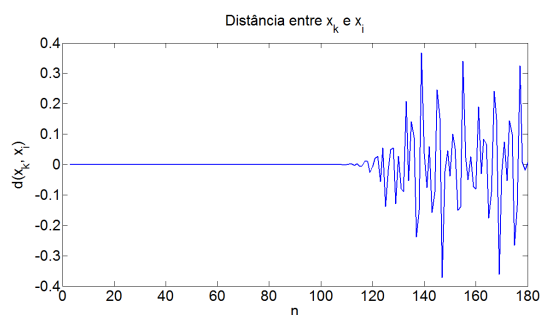


Figura 2: Dist ncia entre os pontos x_k e x_i para $r = 3,65$ e $x_0 = 0,4$. Modo de arredondamento para o $+\infty$.

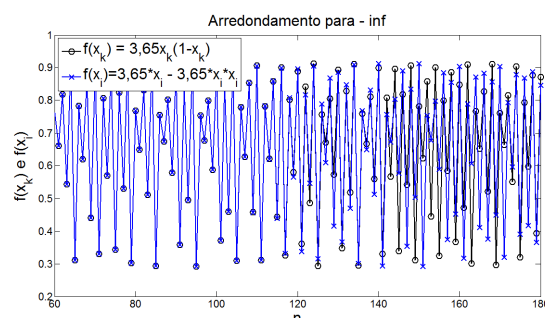


Figura 3: Série Temporal da equa o logística para $r = 3,65$ e $x_0 = 0,4$. Modo de arredondamento para o $-\infty$.

Nas Fig. (1) e (3),   possível observar o distanciamento das duas séries temporais que são matematicamente equivalentes. Essas duas séries temporais chegam a apresentar um distância entre si igual a 0,372609049.

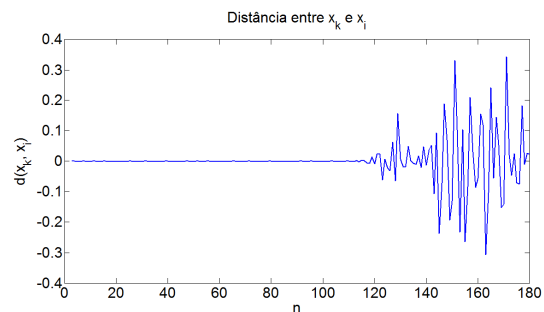


Figura 4: Distância entre os pontos x_k e x_i para $r = 3,65$ e $x_0 = 0,4$. Modo de arredondamento para o $-\infty$.

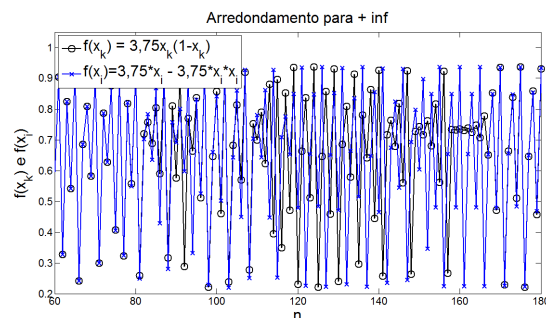


Figura 5: Série Temporal da equa o logística para $r = 3,75$ e $x_0 = 0,4$. Modo de arredondamento para o $+\infty$.

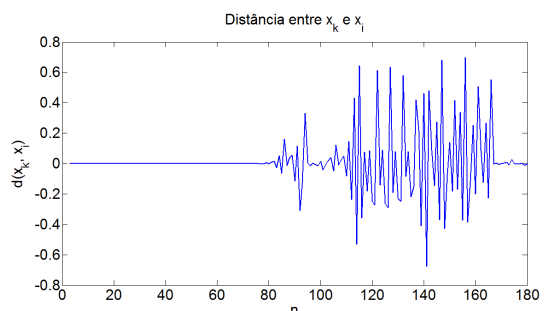


Figura 6: Dist ncia entre os pontos x_k e x_i para $r = 3,75$ e $x_0 = 0,4$. Modo de arredondamento para o $+\infty$.

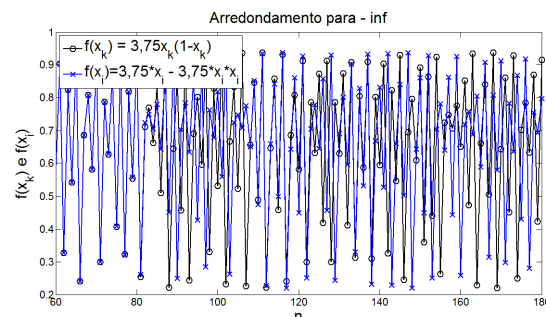


Figura 7: Série Temporal da equa o logística para $r = 3,75$ e $x_0 = 0,4$. Modo de arredondamento para o $-\infty$.

Nas Fig. (5) e (7),   possível observar o dis-

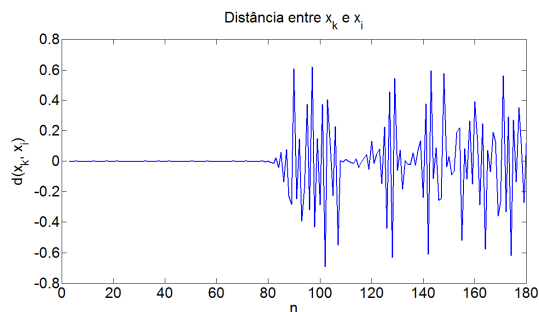


Figura 8: Série Temporal da equação logística para $r = 3,75$ e $x_0 = 0,4$. Modo de arredondamento para o $-\infty$.

tanciamento das duas séries temporais que são matematicamente equivalentes. Essas duas séries temporais chegam a apresentar um distância entre si igual a 0,648906133.

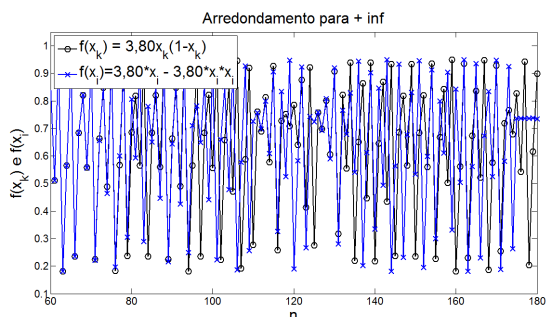


Figura 9: Série Temporal da equação logística para $r = 3,80$ e $x_0 = 0,4$. Modo de arredondamento para o $+\infty$.

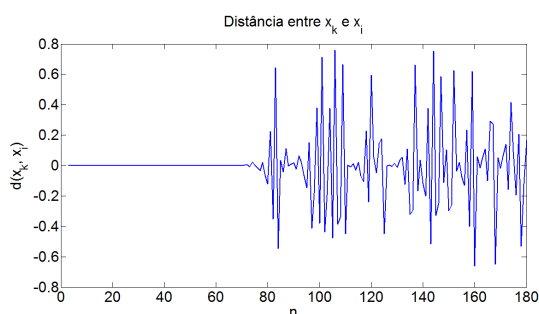


Figura 10: Distância entre os pontos x_k e x_l para $r = 3,80$ e $x_0 = 0,4$. Modo de arredondamento para o $+\infty$.

Nas Fig. (9) e (11),   possível observar o distanciamento das duas séries temporais que são matematicamente equivalentes. Essas duas séries temporais chegam a apresentar um distância entre si igual a 0,751201458.

Nas Fig. (13) e (15),   possível observar o distanciamento das duas séries temporais que são matematicamente equivalentes. Essas duas séries temporais chegam a apresentar um distância entre si igual a 0,803315553.

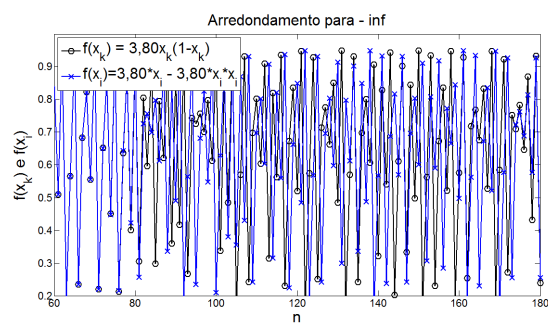


Figura 11: Série Temporal da equação logística para $r = 3,80$ e $x_0 = 0,4$. Modo de arredondamento para o $-\infty$.

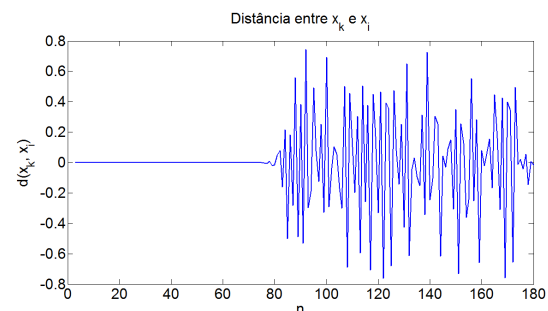


Figura 12: Dist ncia entre os pontos x_k e x_l para $r = 3,80$ e $x_0 = 0,4$. Modo de arredondamento para o $-\infty$.

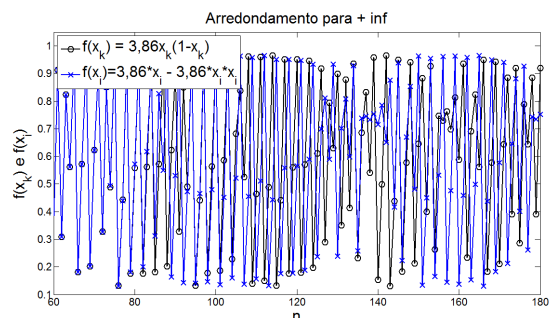


Figura 13: Série Temporal da equação logística para $r = 3,86$ e $x_0 = 0,4$. Modo de arredondamento para o $+\infty$.

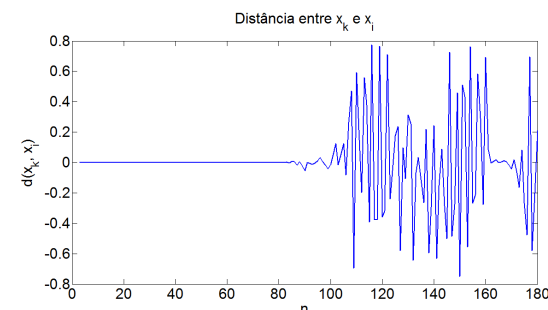


Figura 14: Dist ncia entre os pontos x_k e x_l para $r = 3,86$ e $x_0 = 0,4$. Modo de arredondamento para o $+\infty$.

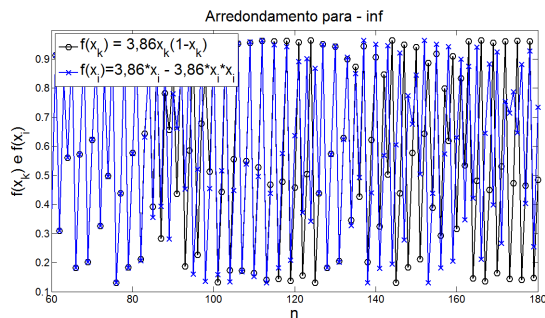


Figura 15: Série Temporal da equação logística para $r = 3,86$ e $x_0 = 0,4$. Modo de arredondamento para o $-\infty$.

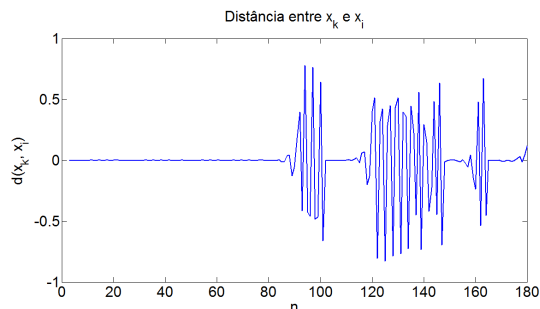


Figura 16: Distância entre os pontos x_k e x_i para $r = 3,86$ e $x_0 = 0,4$. Modo de arredondamento para o $-\infty$.

Avaliando as Fig. (13) e (15),   possível supor que, para certos valores do parâmetro de controle, os modos de arredondamento não influenciam com tanta intensidade, como visto para outros parâmetros de controle, demonstrados neste trabalho.

5 Conclusões

Através da Eq. (7), são obtidos, a partir de um certo número de iterações resultados, que diferem dos obtidos utilizando a representação clássica em que a simples mudança no condicionamento acarretou em valores de x_n distintos nos parâmetros de controle avaliados. Logo, o teorema de (Hammel et al., 1987) não se verifica quando se utilizam dois condicionamentos matematicamente equivalentes da equação logística para valores de parâmetro de controle e condição inicial iguais, pois, para valores de n (número de iterações) entre 85 e 115, as séries temporais não estão mais em uma mesma órbita e apresentam uma distância entre si superior a 10^{-7} .

Outra observação revelante ocorre quando se altera o modo de arredondamento. As séries temporais não se mant m em uma mesma órbita e as órbitas para as quais séries temporais convergem para um modo de arredondamento não são iguais para o outro modo.

Essa breve nota apresenta a relevância de se

avaliarem os possíveis condicionamentos matematicamente equivalentes de uma mesma equação pois, como pode ser observado, o resultado final pode se alterar de um condicionamento para outro em função da não verificação dos axiomas básicos da multiplicação e divisão pelo computador. Entretanto, não há nenhuma maneira fácil de estabelecer um condicionamento correto para uma equação. Logo esse tema merece mais pesquisas.

Agradecimentos

Agradecemos a CAPES, CNPq e Fapemig pelo apoio financeiro e ao PPGEL (UFSJ / CEFET-MG) pela oportunidade de desenvolver o Mestrado do Sr. Paiva.

Referências

- Feigenbaum, M. J. (1978). Quantitative universality for a class of non-linear transformations, *The Journal of Statistical Physics* (19): 25–52.
- Hammel, S., Yorke, J. and Grebogi, C. (1987). Do numerical orbits of chaotic dynamical processes represent true orbits?, *Journal of Complexity* 3(2): 136–145.
- Martinez, M. G., Canton, M. C., Canton, E. C. and Celikovsky, S. (2013). Difference map and its electronic circuit realization., *The Journal of Nonlinear Dynamics and Chaos in Engineering Systems* (74): 819–830.
- May, R. M. (1976). Simple mathematical models with very complicated dynamics, *The Journal Nature* (261): 459–467.
- Monteiro, L. H. A. (2006). *Sistemas Dinámicos*, 2 edn, Livraria da F sica, São Paulo.
- Nepomuceno, E. G. (2014). Convergence of recursive functions on computers, *The Journal of Engineering* pp. 1–3.
- Saha, P. and Strogatz, S. H. (1995). The birth of period three, *Mathematics Magazine* 68(1): 42–47.
- Suneel, M. (2006). Electronic circuit realization of the logistic map, *The Journal Sadhana: Academy Proceedings In Engineering Sciences* (31): 69–78.
- Yabuki, M. and Tsuchiya, T. (2013). Double precision computation of the logistic map depends on computational modes of the floatinf-point processing unit, *arXiv* 1(1305.3128).
- Zuras, D. e. a. (2008). *754-2008 - IEEE Standard for Floating-Point Arithmetic*, IEEE.