

IMPLEMENTAÇÃO DIDÁTICA DO FILTRO DE KALMAN DISCRETO EM UM CIRCUITO RC

PABLO F. SALAROLLI, VINÍCIUS DA R. MOTTA, MARCO A. DE S. L. CUADROS

Grupo da Automação Industrial – GAI, Coordenadoria de Engenharia de Controle e Automação, Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Espírito Santo – Campus Serra

Rodovia ES-010, km 6,5, 29173-087, Manguinhos, Serra, ES, Brasil

E-mails: pablo_salarolli@hotmail.com, vinicius.motta@ifes.edu.br, marcoantonio@ifes.edu.br

Abstract— Noise is an inherent part of all analog variables measurement and, generally, digital or analog filters are used to mitigate them. The Kalman filter is a mathematical method to estimate the value of a variable, weighting between the measured value and a value predicted by the filter itself using the process model. The filter output is a optimal estimate of the actual value and less noisy than the measured value. In order to facilitate the implementation of this tool, it is necessary to have practical applications available that reinforce the concepts and the theory of the Kalman filter. This article aims to show the operation of the Kalman filter to estimate the voltage over the capacitor in an RC circuit in a simple way, serving as an application for undergraduate laboratory classes.

Keywords— Kalman filter, Signal processing, Noise, RC circuit.

Resumo— Ruídos são parte inerente de toda medição de variáveis analógicas e geralmente são utilizados filtros digitais ou analógicos para atenuá-los. O filtro de Kalman é um método matemático para estimar o valor de uma variável, ponderando entre o valor medido e um valor predito pelo próprio filtro utilizando o modelo do processo. A saída do filtro é uma estimativa muito próxima do valor real e com menos ruído que o valor medido. Para facilitar a implementação desta ferramenta, é necessário que haja a disponibilidade de aplicações práticas que reforcem os conceitos e a teoria do filtro de Kalman. O presente artigo visa mostrar o funcionamento do filtro de Kalman para estimar a tensão sobre o capacitor em um circuito RC de forma simples, servindo como uma aplicação para aulas de laboratório de graduação.

Palavras-chave— Filtro de Kalman, Tratamento de sinais, Ruído, Circuito RC

1 Introdução

Durante a Guerra Fria, no fim da década de 1950, os Estados Unidos da América estavam perdendo a corrida espacial para a União Soviética e o governo americano aumentou o financiamento e incentivo à pesquisa para impulsionar o desenvolvimento aeroespacial, o que estimulou os trabalhos de Rudolf Emil Kalman no *Research Institute for Advanced Studies*, em Baltimore (Grewal and Andrews, 2010), culminando na publicação de Kalman em 1960, trazendo uma nova proposta de filtragem linear e solução para problemas de predição, chamada de filtro de Kalman (Kalman, 1960).

A primeira aplicação publicamente conhecida, e também uma das mais importantes, foi no sistema de navegação do projeto Apollo da Agência Espacial Americana (NASA), que realizou as únicas missões na história que levaram o homem à Lua (Schmidt, 1981). Neste projeto, o filtro de Kalman resolveu os problemas de fusão de dados e de rejeição de erros da medição. Desde então, tem sido parte integrante de quase todos sistema de estimativa de trajetória embarcada e sistemas de controle (Grewal and Andrews, 2008).

Muitas tecnologias se tornaram possíveis devido as aplicações do filtro de Kalman em controle, rastreo, localização, robótica móvel, etc.; o que o torna um tópico importante no ensino da engenharia. Porém, o filtro de Kalman é normalmente estudado nos laboratórios de ensino de graduação no Brasil de forma teórica, acompanhado de simulações, não sendo muito comuns os exemplos práticos, aplicados à

sistemas físicos, sejam eles elétricos, mecânicos, eletro hidráulicos, etc., deixando uma lacuna entre a compreensão da teoria e a verificação da sua funcionalidade na prática.

Tendo em vista ajudar a diminuir esta lacuna, o presente trabalho apresenta a implementação do filtro de Kalman para estimar a tensão sobre o capacitor em um circuito RC (resistor-capacitor). Apesar de os níveis de ruído na medição da tensão de saída do circuito RC serem baixos, este é um ótimo meio para implementação do filtro de Kalman, pois ele é simples, compacto e barato, possibilitando alunos e professores utilizarem em casa ou em salas de aula nas áreas de medição de variáveis analógicas, tratamento de sinais e controle.

2 Conceitos

2.1 Probabilidade e estatística

Para auxiliar o entendimento da teoria do filtro de Kalman e também a interpretação dos resultados deste trabalho, alguns conceitos sobre probabilidade e estatística são aqui apresentados.

“A *variância* é uma medida de dispersão dos valores da variável aleatória ao redor da média. Se os valores tendem a concentrar-se próximos da média, a variância é pequena; mas se os valores tendem a afastar-se da média, a variância é grande” (Spiegel, 1978). O *desvio padrão* é a raiz quadrada positiva da variância. Essas medidas podem ser utilizadas para representar numericamente a intensidade do ruído de

uma medição, tornando-se parâmetros para avaliação da qualidade de um sinal.

A *covariância* é uma medida de relação linear (Montgomery and Runger, 2009), que mede o grau de dependência entre duas variáveis aleatórias X e Y (Morettin, 1999).

“A *distribuição de probabilidades* de uma variável aleatória X é uma descrição das probabilidades associadas com os valores possíveis de X ” (Montgomery and Runger, 2009). Uma variável aleatória distribuída normalmente apresenta uma das curvas de distribuição mostradas na Figura 1. Esta curva é centrada na média da variável em questão e quanto maior a largura da base da curva, maior é a variância. Para variáveis no tempo discreto, a soma das probabilidades dos pontos que formam a curva é igual a 1. Sua notação é $N(\mu, \sigma^2)$, onde μ e σ^2 são a média e a variância da variável aleatória, respectivamente. A distribuição pode ser utilizada para representar visualmente a intensidade do ruído de um sinal.

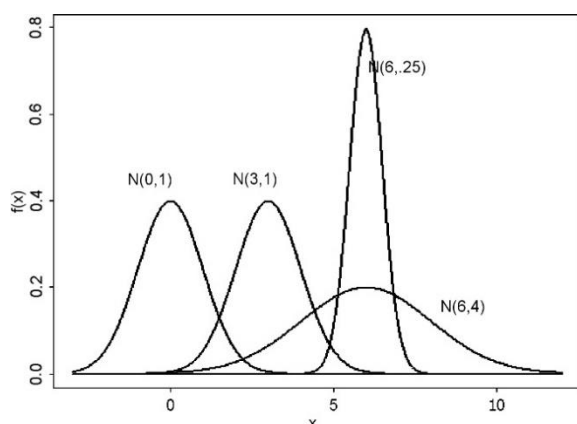


Figura 1. Exemplos de distribuições normais (Shimakura, 2005).

2.2 Sistemas de primeira ordem

O circuito RC é um sistema de primeira ordem e, objetivando a compreensão de sua dinâmica, bem como a realização de sua modelagem de forma experimental, alguns conceitos sobre este sistema serão aqui apresentados. Vale considerar que a utilização do filtro de Kalman não está restrita à apenas sistemas de primeira ordem, podendo ser utilizado em sistemas lineares muito gerais.

“Um sistema é uma entidade que manipula um ou mais sinais para realizar uma função, produzindo, assim, novos sinais” (Haykin and Van Veen, 2001). Um sistema de primeira ordem é aquele cujo modelo é representado por uma equação diferencial sendo a maior ordem da derivada igual a um, e pode ser escrito como uma função de transferência de primeira ordem no domínio da frequência (Hsu, 2012) (Haykin and Van Veen, 2001), como a descrita na Equação (1):

$$G(s) = \frac{K_p}{\tau s + 1} \quad (1)$$

onde K_p é o ganho do processo e τ é a constante de tempo do processo.

Na Figura 2, pode ser vista a resposta característica de um sistema de primeira ordem, onde a saída y varia de forma exponencial em função de uma variação na forma de um degrau na entrada u . K_p é a razão entre Δy e Δu . τ é o tempo para que a saída alcance 63,2% de Δy .

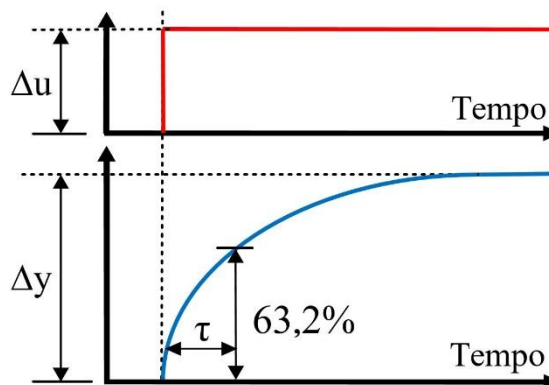


Figura 2. Resposta de um sistema de primeira ordem ao degrau.

Neste trabalho, inicialmente foi encontrada a função de transferência do processo que, em seguida, foi convertida para o espaço de estados discreto. Isto porque o filtro de Kalman discreto requer uma representação no espaço de estados discreto.

3 O filtro de Kalman

O filtro de Kalman é na verdade um estimador para o chamado problema linear quadrático, que é o problema de estimar o estado instantâneo de um sistema dinâmico linear utilizando medições linearmente relacionadas com este estado, i.e., medições de algum sensor, porém corrompidas por ruído branco (Grewal and Andrews, 2008).

O filtro de Kalman discreto (FKD) se baseia no modelo mostrado nas Equações (2) e (3):

$$x_k = Ax_{k-1} + Bu_k + w_k \quad (2)$$

$$z_k = Cx_k + v_k \quad (3)$$

onde: x é o vetor de estados ($n \times 1$); u é o vetor das entradas de controle ($q \times 1$); z é o vetor de medições ($m \times 1$); A é a matriz de transição de estados ($n \times n$); B é a matriz de controle ($n \times q$); C é a matriz de observação ($m \times n$); w é o vetor de ruídos do processo ($n \times 1$) e v é o vetor de ruídos da medição ($m \times 1$). Os índices k e $k-1$ representam os instantes de tempo atual e anterior, respectivamente (Santana and Medeiros, 2007). Vale notar que a dinâmica do processo é representada pela Equação (2), ou seja, a relação entre os estados e a entrada do processo definem como o sistema se comporta. A saída z do sistema é apenas uma relação linear do vetor de estados x , como é visto na Equação (3).

Com instrumentos de medição, é possível obter os valores de z . O grande problema é remover de z o ruído da medição v , obtendo assim, o valor real da saída do sistema. Realizar esta operação é difícil, pois v é composto por valores aleatórios. Porém, se v possuir valores aleatórios distribuídos normalmente, é possível inferir sobre suas medidas de dispersão. Além disso, utilizando o modelo do processo, pode-se estimar os estados do sistema, relacionando-os com a saída pela matriz C .

O filtro de Kalman faz a “fusão” entre a estimativa do modelo e a medição real para minimizar o erro na estimativa dos estados. Para isso, é utilizado um fator que mescla essas duas variáveis, que é o chamado ganho de Kalman (K). O critério de desempenho para se chegar na fórmula do ganho de Kalman é o método de estimação do mínimo erro quadrático médio (*minimum mean-square error*, MMSE) (Brown and Hwang, 2012).

O algoritmo do FKD é recursivo e pode ser implementado basicamente com cinco equações divididas em duas fases: a predição e a atualização. Em termos gerais, a fase de predição leva em conta apenas o modelo do processo enquanto a fase de atualização considera a medição. Vale salientar que não cabe a este trabalho as demonstrações matemáticas das equações do FKD.

3.1 Fase de predição

Esta fase é composta pelas Equações (4) e (5), também chamada de atualização do tempo. Nas equações, o sobrescrito ‘-’ sinaliza um valor *a priori*, já o sobrescrito ‘^’ indica que aquela variável é estimada. Nesta fase é feita a estimativa *a priori* dos estados do sistema (Equação (4)). A Equação (5) calcula o valor *a priori* de P (matriz de covariância dos erros da estimativa), baseado em Q (matriz de covariância dos ruídos do processo w).

$$\hat{x}_k^- = A\hat{x}_{k-1} + Bu_k \quad (4)$$

$$P_k^- = AP_{k-1}A^T + Q \quad (5)$$

3.2 Fase de atualização

Esta fase é composta pelas equações (6), (7) e (8), também é conhecida como atualização da medição. O ganho de Kalman é calculado na Equação (6), utilizando R (matriz de covariância dos ruídos da medição v), além de P^- e C . Na Equação (7), a estimativa dos estados é atualizada e na Equação (8), a matriz P é atualizada, sendo I a matriz identidade de ordem n .

$$K_k = P_k^- C^T (C P_k^- C^T + R)^{-1} \quad (6)$$

$$\hat{x}_k = \hat{x}_k^- + K_k(z_k - C\hat{x}_k^-) \quad (7)$$

$$P_k = (I - K_k C) P_k^- \quad (8)$$

A Figura 3 representa o diagrama de blocos do funcionamento do filtro de Kalman discreto, envolvendo as Equações (2), (3), (4) e (7).

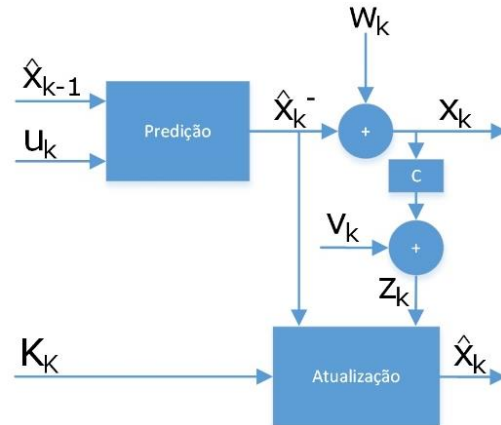


Figura 3. Diagrama de blocos do processo de estimativa dos estados de um processo aleatório no filtro de Kalman.

4 Plataforma de testes

A simulação e o teste prático foram baseados em um circuito RC, como pode ser visto na Figura 4. Ao aplicar uma tensão de entrada (V_f), obtém-se uma resposta característica de um sistema de primeira ordem na tensão de saída (V_c).

Para realizar os testes práticos, o circuito RC foi ligado à uma placa de aquisição NI USB 6009, como é visto na Figura 4.

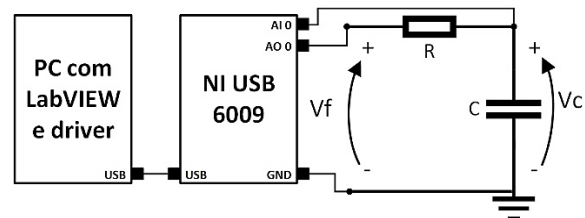


Figura 4. Esquema de ligação da planta.

A NI USB 6009 é uma placa da National Instruments®, que pode medir tensões entre -10 V e +10 V, com resolução de 14 bits e impedância de entrada de 144 kΩ. As saídas analógicas possuem resolução de 12 bits em uma faixa de 0 V a +5 V.

Um circuito RC, como o da Figura 4, tem a característica de apresentar um ganho K_p unitário e uma constante de tempo τ com valor igual ao produto da resistência R pela capacitância C . Os valores de R e C foram escolhidos de forma que o processo seja lento suficiente para que o sinal V_f possa ser observado com facilidade no regime transitório. Também foi levado em consideração que a impedância da entrada analógica da placa de aquisição é relativamente baixa (144 kΩ), o que leva a adotar um valor de resistor R muito menor que 144 kΩ, para inibir o aparecimento de um divisor de tensão entre o resistor R e a entrada analógica da placa, que diminuiria o valor do ganho K_p . Assim, os valores adotados para R e C foram 1 kΩ e 3200 μF, respectivamente. A montagem pode ser

vista na Figura 5. Há dois capacitores (1000 μF e 2200 μF) ligados em paralelo para resultar em 3200 μF , devido à ausência de um capacitor com tal valor.

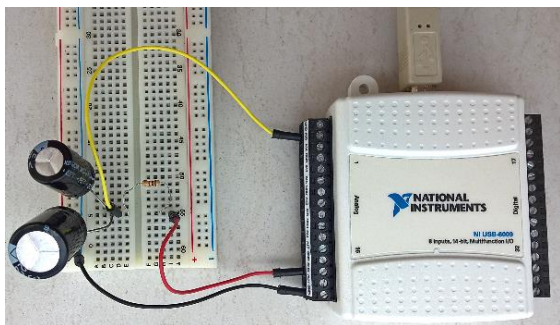


Figura 5. A plataforma de testes.

4.1 A modelagem

A modelagem visa encontrar o ganho do processo K_p e a constante de tempo τ do sistema. Embora em um circuito RC esses parâmetros possam ser levantados facilmente, como já citado na Seção 4, é importante destacar que a resistência interna da placa de aquisição de dados influenciará na dinâmica do processo; assim neste artigo o modelo é estimado de forma experimental.

Para isso, aplicou-se um degrau de 1 volt na alimentação V_f do circuito, obtendo a curva de tensão do capacitor V_c , como pode ser visto na Figura 6.

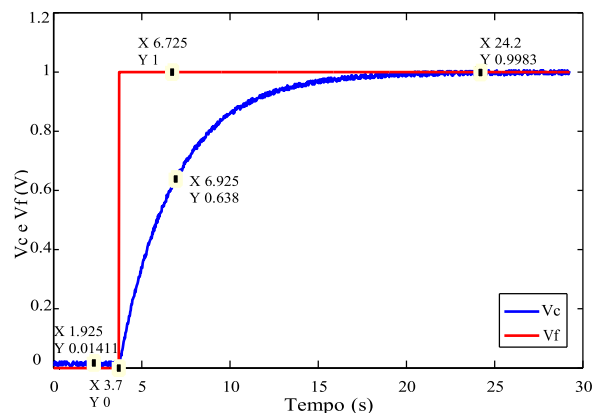


Figura 6. Resposta do circuito RC ao degrau.

Foram realizados os cálculos das Equações (9) e (10) para se obter K_p e τ , baseados na teoria apresentada na Subseção 2.2.

$$K_p = \frac{0,9983 - 0,01411}{1 - 0} = 0,984 \quad (9)$$

$$\tau = 6,925 - 3,7 = 3,225 \text{ s} \quad (10)$$

5 Implementação do algoritmo

Como pode ser observado na Figura 7, o programa foi subdividido em três etapas: inicialização, cálculos do modelo e medição e o filtro de Kalman.

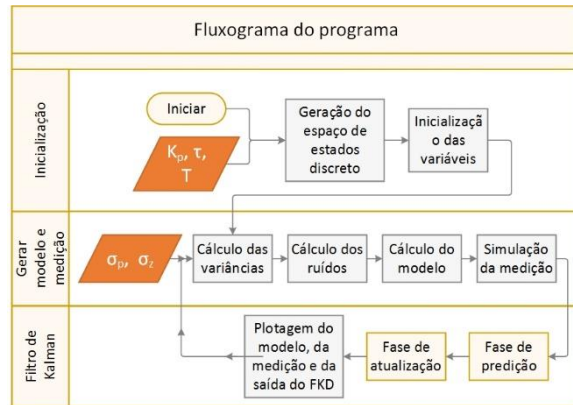


Figura 7. Fluxograma do programa.

A inicialização é composta pelo trecho de código que é executado apenas na primeira iteração do programa. Nela, são declaradas e inicializadas as variáveis, sendo algumas do tipo *persistent*, para que se mantenham na memória enquanto o programa é executado. Aqui também é gerado o espaço de estados discreto, com um período de amostragem T , definido em 0,05 s. Como o sistema é de primeira ordem, há apenas uma variável de estado, que é a tensão sobre o capacitor. Utilizando o modelo encontrado na seção anterior, foi obtido o seguinte modelo no espaço de estados: $A = 0,9846$, $B = 0,0496$ e $C = 0,0351$.

A segunda e terceira etapas são executadas em *loop*. O objetivo da segunda etapa é calcular o estado do sistema, utilizando a Equação (4) do espaço de estados. A terceira etapa é o próprio filtro de Kalman, explicado na Seção 3. Os desvios padrão da medição e do processo são σ_z e σ_p , respectivamente, que são utilizados para simular os ruídos brancos.

O algoritmo do programa está representado na Figura 8.

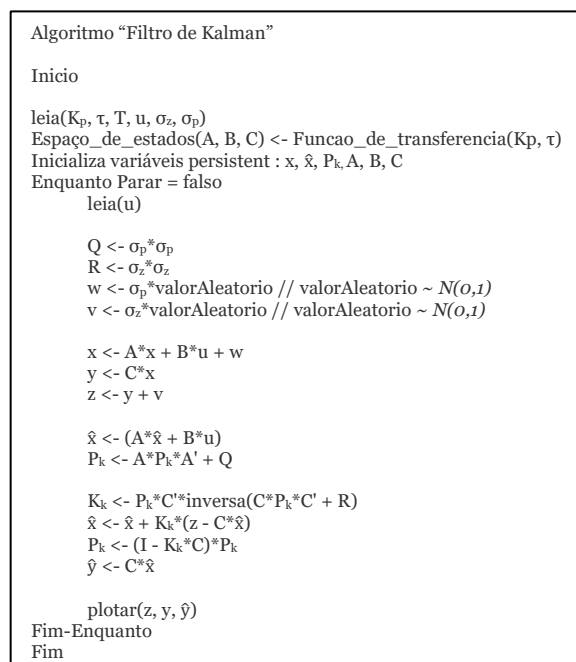


Figura 8. Algoritmo do programa.

Para os testes simulados e práticos, o algoritmo da Figura 8 foi implementado no módulo MathScript RT, do software LabVIEW®, como pode ser visto na Figura 9. Este módulo, é compatível com a linguagem de programação do MATLAB®.

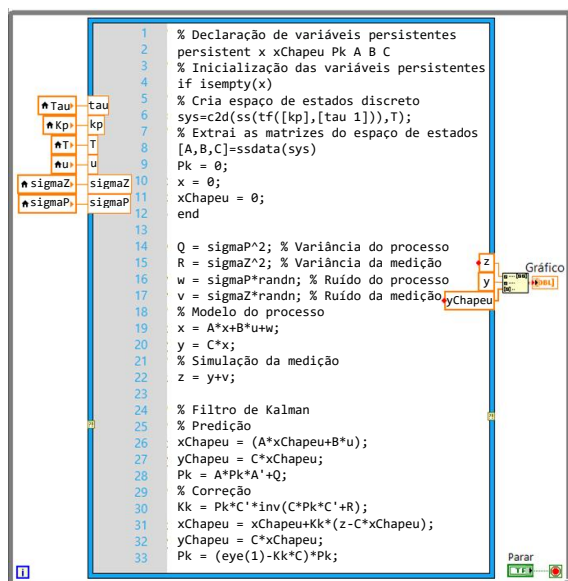


Figura 9. Código no MathScript RT.

No código da Figura 9, as linhas de 1 a 12 são a etapa da inicialização. O modelo e a medição estão entre as linhas 14 e 22. O filtro de Kalman pode ser visto a partir da linha 24.

6 Resultados de simulação e prática

Devido ao circuito RC possuir por natureza pouco ruído, foi aplicado um degrau de 0,1 V. Assim, é possível observar a resposta ao degrau com mais detalhes.

6.1 Simulação

Na simulação, foram adotados $\sigma_p = 0,001$ e $\sigma_z = 0,005$, sendo o modelo utilizado o mesmo obtido nas Equações (9) e (10).

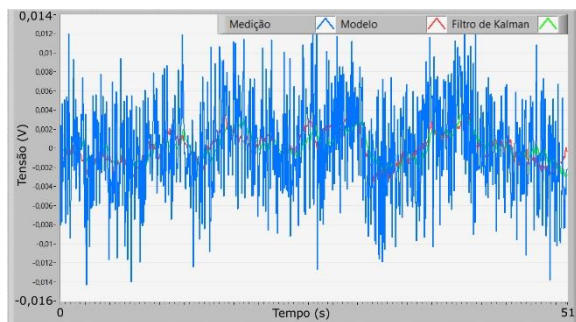


Figura 10. Resultado da simulação no regime permanente.

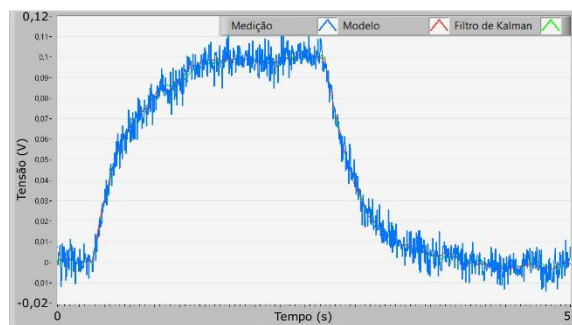


Figura 11. Resposta da simulação aos degraus de subida e descida.

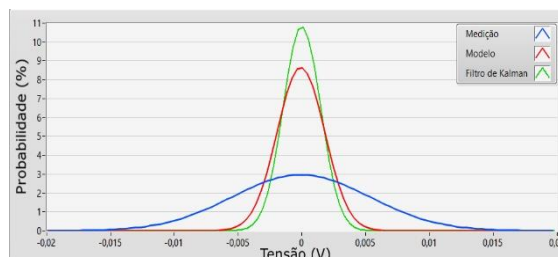


Figura 12. Funções distribuição de probabilidade – simulação.

Tabela 1. Medidas de dispersão – simulação.

Dado	Média (V)	Desvio padrão (V)
Modelo	-0,00017	0,00184
Medição	-0,00013	0,00542
Filtro de Kalman	-0,00010	0,00152

6.2 Prática

A parte inicial da Figura 13 mostra o sinal da medição obtido com a placa de aquisição. Como pode ser observado, os valores são distribuídos em poucos pontos, originando um sinal digital de baixa resolução. Isso ocorre devido à amplitude do ruído da medição ser pequena em relação à resolução do conversor analógico-digital da placa de aquisição. Como esse sinal é composto por poucos e repetidos pontos, a distribuição dos dados fica concentrada em alguns valores, o que não permite exibir resultados na forma de uma curva de distribuição de probabilidades. Para melhor distribuir os pontos do sinal e interferir pouco em seu ruído, foi aplicado um filtro do tipo média móvel de 2 períodos no sinal da medição. O efeito desse filtro pode ser visto na parte final da Figura 13.

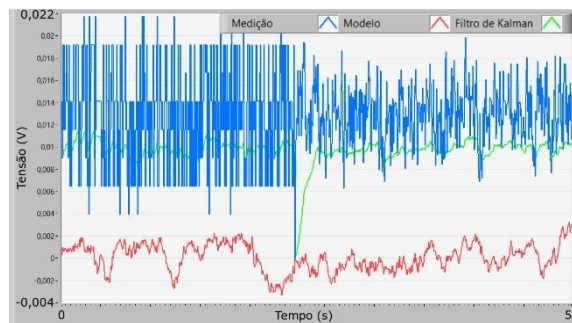


Figura 13. Efeito da média móvel no sinal da medição.

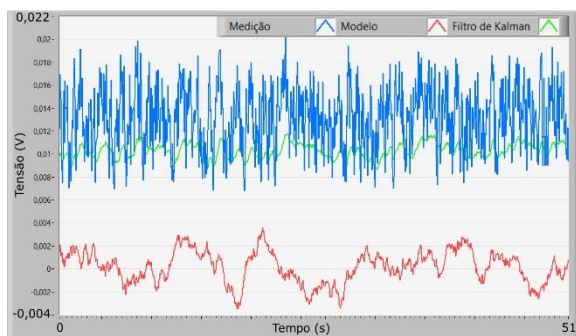


Figura 14. Resposta do teste prático no regime permanente.

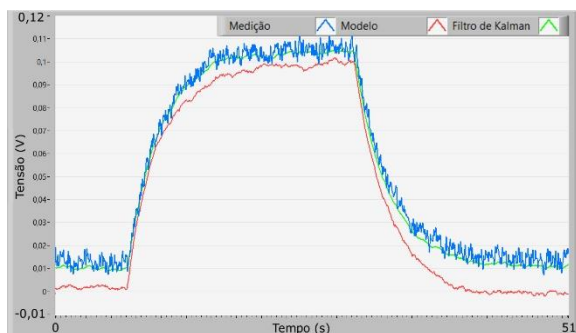


Figura 15. Resposta do teste prático aos degraus de subida e descida.

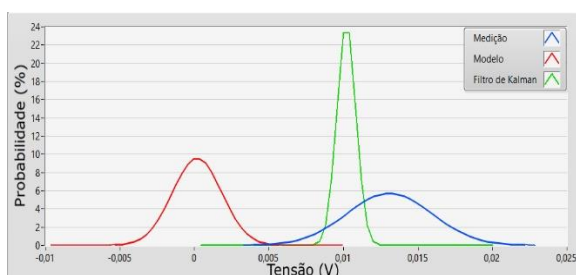


Figura 16. Funções distribuição de probabilidade – teste prático.

Tabela 2. Medidas de dispersão – teste prático.

Dado	Média (V)	Desvio padrão (V)
Modelo	-0,00008	0,00189
Medição	0,01307	0,00266
Filtro de Kalman	0,01171	0,00135

7 Conclusão

Como pôde ser observado nos gráficos das distribuições normais das Figuras 12 e 16 e nas Tabelas 1 e 2, a estimativa do filtro de Kalman ficou com uma média entre a medição e o modelo e com uma variância menor, ou seja, com um grau de ruído mais baixo, o que mostra que este trabalho trouxe uma implementação correta do filtro de Kalman discreto. A simplicidade e o custo do circuito RC junto a forma de implementação simplificada aqui apresentada, incluindo uma breve base teórica, proporciona ao leitor as ferramentas suficientes para realizar uma simulação e um teste prático com certa facilidade.

Agradecimentos

Agradecemos ao CNPq, à SETEC/MEC e ao IFES pelo apoio concedido às pesquisas que deram origem a este trabalho.

Referências Bibliográficas

- Brown, R. and Hwang, P. (2012). *Introduction to random signals and applied Kalman filtering: with MATLAB exercises*. 4th ed. Hoboken, N. J.: Wiley.
- Grewal, M. and Andrews, A. (2008). *Kalman filtering: Theory and Practice Using MATLAB®*. 3rd ed. Hoboken, N. J.: Wiley.
- Grewal, M. and Andrews, A. (2010). Applications of Kalman filtering in aerospace 1960 to the present [historical perspectives]. *Control Systems, IEEE*, Vol. 30, No. 3, pp. 69-78.
- Haykin, S. and Van Veen, B. (2001) *Sinais e sistemas*. Porto Alegre: Bookman, 668 p.
- Hsu, H. (2001). *Sinais e sistemas*. 2nd ed. Porto Alegre: Bookman, 496 p.
- Kalman, R. (1960). A new approach to linear filtering and prediction problems. *Journal of basic Engineering*, Vol. 82, No. 1, pp. 35-45.
- Montgomery, D. and Runger, G. (2009). *Estatística aplicada e probabilidade para engenheiros*. 4th ed. Rio de Janeiro: LTC.
- Morettin, L. (1999). *Probabilidade e estatística: Volume 1 - Probabilidade*. 7th ed. São Paulo: Pearson Makron Books.
- Santana, A. and Medeiros, A. (2007). “Localização de um Robô Móvel Baseada em Odometria e Marcos Naturais Utilizando Filtro de Kalman Extendido”. In: *Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente*, [online] Florianópolis: SBAI. Available at: http://www.sba.org.br/rsv/SBAI/SBAI2007/docs/30124_1.pdf [Accessed 11 Apr. 2016].
- Schmidt, S. (1981). The Kalman filter-Its recognition and development for aerospace applications. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 4, No. 1, pp. 4-7.
- Shimakura, S. (2005). A distribuição Normal. Available at: <http://leg.ufpr.br/~silvia/CE701/node36.html> [Accessed 30 May 2016].
- Spiegel, M. (1978). *Probabilidade e estatística*. São Paulo: Pearson Education do Brasil.