

UM CONTROLADOR ADAPTATIVO POR POSICIONAMENTO DE POLOS E ESTRUTURA VARIÁVEL DE ORDEM FIXA PARA PLANTAS INTERVALARES

FRANCISCO DAS CHAGAS DA SILVA JUNIOR*, ALDAYR DANTAS DE ARAÚJO†

**Campus Natal - Zona Norte*
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte
Natal, RN, Brasil

†*Departamento de Engenharia Elétrica*
Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Natal, RN, Brasil

Emails: francisco.junior@ifrn.edu.br, aldayr@dca.ufrn.br

Abstract— This paper presents the design of a variable structure controller for linear plants whose parameters are unknown and defined by closed intervals. The purpose of the proposed controller is to allocate the closed-loop poles in a region bounded by an interval characteristic polynomial, which is chosen based on performance requirements and whose stability is guaranteed by the Kharitonov's Theorem. The controller parameters are calculated on-line from estimates of the plant parameters, which are generated by switching laws. Simulation results for a non-minimum phase system are presented to illustrate the properties of the technique proposed.

Keywords— Pole Placement Control, Variable Structure Control, Adaptive Control, Interval Plants.

Resumo— Este artigo apresenta o projeto de um controlador com estrutura variável para plantas lineares cujos parâmetros são desconhecidos e definidos por intervalos fechados conhecidos. O objetivo do controlador proposto é posicionar os polos de malha fechada em uma região delimitada por um polinômio característico intervalar, escolhido com base em especificações de desempenho e cuja estabilidade é garantida pelo Teorema de Kharitonov. Os parâmetros do controlador são calculados em tempo real a partir das estimativas dos parâmetros da planta, que são geradas por leis chaveadas. Resultados de simulação são apresentados para uma planta de fase não mínima, para ilustrar as propriedades da técnica proposta.

Palavras-chave— Controle por Posicionamento de Polos, Controle com Estrutura Variável, Controle Adaptativo, Plantas Intervalares.

1 Introdução

Quando os parâmetros da planta a ser controlada não são conhecidos com exatidão, pode-se combinar uma abordagem de controle por posicionamento de polos com uma lei adaptativa para estimar os parâmetros da planta (método do gradiente, mínimos quadrados, etc). Essa combinação leva ao esquema denominado Controle Adaptativo por Posicionamento de Polos (APPC - *Adaptive Pole Placement Control*), que é desenvolvido principalmente na abordagem indireta, onde o sinal de controle é uma função das estimativas dos parâmetros da planta (Ioannou and Sun, 1996), e é aplicável a plantas lineares e invariantes no tempo (LTI - *Linear Time-Invariant*) de fase mínima e não mínima, já que não envolve cancelamentos de zeros e polos.

Se o modelo matemático da planta não é conhecido com exatidão, mas cada coeficiente pertence a um intervalo real conhecido, pode-se estender o problema de posicionamento pontual dos polos para o problema de posicionar os polos de malha fechada em uma região adequada do plano complexo s , especificada através das raízes de um polinômio característico intervalar, já que com as incertezas em relação ao modelo matemático da planta não se pode garantir o posicionamento de polos perfeito. Condições semelhantes foram tra-

tadas em (Keel and Bhattacharyya, 1999).

Este artigo tem como motivação trabalhos anteriores que combinaram estratégias de controle adaptativo com a técnica de Controle por Estrutura Variável (VSC - *Variable Structure Control*), que é baseada na teoria de relés (Utkin, 1978), com o objetivo de melhorar o desempenho do transitório e a robustez, explorando assim o que cada técnica tem de melhor. Seguindo esse conceito, foi proposto o Controlador Adaptativo por Modelo de Referência e Estrutura Variável (VS-MRAC - *Variable Structure Model Reference Adaptive Control*) (Hsu and Costa, 1989), onde somente a entrada e a saída da planta são mensuráveis e leis chaveadas são utilizadas em substituição às leis adaptativas integrais do Controle Adaptativo por Modelo de Referência (MRAC - *Model Reference Adaptive Control*), que em geral possui um transitório lento e oscilatório. O VS-MRAC é restrito a plantas de fase mínima e apresentou resultados interessantes de robustez a variações paramétricas, assim como a perturbações externas e a dinâmica não modelada, assim como um bom desempenho transitório (Hsu and Costa, 1992).

Este artigo trata do controle por posicionamento regional de polos e estrutura variável aplicado a plantas lineares incertas, representadas por funções de transferência próprias com coeficientes que pertencem a intervalos reais conhecidos

e que são estimados através de leis chaveadas, assim como no VS-MRAC. A estratégia apresentada no presente artigo é denominada Controle Adaptativo por Posicionamento de Polos e Estrutura Variável (VS-APPC - *Variable Structure Adaptive Pole Placement Control*) (Silva Junior and Araújo, 2005), que é motivada pelo sucesso do VS-MRAC e derivada do APPC, sendo, portanto, aplicável a plantas de fase não mínima.

2 Parametrização

Vamos considerar uma planta LTI, com apenas uma entrada u e uma saída y (SISO - *single input-single output*), do tipo

$$y = G(s)u = \frac{Z(s)}{R(s)}u \quad (1)$$

cujos polinômios $Z(s)$ e $R(s)$ são definidos como:

$$Z(s) = \beta_{n-1}s^{n-1} + \dots + \beta_1s + \beta_0 \quad (2)$$

$$R(s) = s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \dots + \alpha_1s + \alpha_0 \quad (3)$$

onde os coeficientes $\beta_{n-1}, \dots, \beta_0, \alpha_{n-1}, \dots, \alpha_0$ são constantes, mas desconhecidos, com $\beta_{n-1} \neq 0$.

Definindo vetores para agrupar parâmetros e sinais separadamente, podemos representar a planta em (1) da seguinte forma:

$$y^{(n)}(t) = \theta_\beta^* \psi_u + \theta_\alpha^* \psi_y \quad (4)$$

onde

$$\theta_\beta^* = [\beta_{n-1}, \dots, \beta_1, \beta_0]^T$$

$$\theta_\alpha^* = [\alpha_{n-1}, \dots, \alpha_1, \alpha_0]^T$$

$$\psi_u = [u^{(n-1)}, u^{(n-2)}, \dots, u]^T$$

$$\psi_y = [-y^{(n-1)}, -y^{(n-2)}, \dots, -y]^T$$

e $u^{(i)} \triangleq \frac{d^i}{dt^i}u(t)$ e $y^{(i)} \triangleq \frac{d^i}{dt^i}y(t)$.

Vamos considerar agora um polinômio Hurwitz mônico de ordem n definido como

$$\Lambda(s) = s^n + \lambda_{n-1}s^{n-1} + \dots + \lambda_1s + \lambda_0$$

cujos coeficientes estão agrupados no vetor $\lambda = [\lambda_{n-1}, \dots, \lambda_1, \lambda_0]^T$. Portanto, adicionando o termo $(\Lambda - s^n)y$ em ambos os lados de (4), ficamos com

$$y^{(n)} - \lambda^T \psi_y = \theta_\beta^* \psi_u + \theta_\alpha^* \psi_y - \lambda^T \psi_y$$

que pode ser reescrita como

$$y = W(s)(\theta_\beta^* \psi_u + \theta_\alpha^* \psi_y - \lambda^T \psi_y) \quad (5)$$

onde $W(s) = \Lambda^{-1}(s)$. Como θ_β^* , θ_α^* e λ são vetores constantes, podemos reescrever (5) na forma do seguinte modelo paramétrico linear, a ser usado nas próximas seções:

$$y = W(s)L(s)(\hat{\theta}_\beta^T \phi_u + \hat{\theta}_\alpha^T \phi_y - \lambda^T \phi_y) \quad (6)$$

onde

$$\phi_u = L^{-1}(s)\psi_u, \quad \phi_y = L^{-1}(s)\psi_y$$

e o polinômio $L(s)$ é escolhido de maneira que $L^{-1}(s)$ seja uma função de transferência própria e estável e $W(s)L(s)$ seja uma função de transferência estritamente real positiva (ERP). A importância de $W(s)L(s)$ ser ERP será explicada no projeto das leis adaptativas.

3 Estimação de Parâmetros

Vamos considerar agora o seguinte modelo série-paralelo para estimar $y(t)$:

$$\hat{y} = W(s)L(s)(\hat{\theta}_\beta^T \phi_u + \hat{\theta}_\alpha^T \phi_y - \lambda^T \phi_y) \quad (7)$$

onde $\hat{\theta}_\beta$ e $\hat{\theta}_\alpha$ são as estimativas online para θ_β e θ_α , respectivamente. O erro de estimação, que reflete a incerteza paramétrica, é dado por

$$\epsilon_1 = y - \hat{y} \quad (8)$$

Portanto, substituindo y e $\hat{y}$ em (8), ficamos com

$$\epsilon_1 = W(s)L(s)(-\tilde{\theta}_\beta^T \phi_u - \tilde{\theta}_\alpha^T \phi_y) \quad (9)$$

onde $\tilde{\theta}_\beta = \hat{\theta}_\beta - \theta_\beta^*$ e $\tilde{\theta}_\alpha = \hat{\theta}_\alpha - \theta_\alpha^*$, ou com o seguinte modelo compacto:

$$\epsilon_1 = W(s)L(s)(-\tilde{\theta}^T \phi) \quad (10)$$

onde $\tilde{\theta} = [\tilde{\theta}_\beta, \tilde{\theta}_\alpha]^T$ e $\phi = [\phi_u, \phi_y]^T$.

Vamos considerar agora a seguinte representação de espaço de estado para (10):

$$\begin{cases} \dot{\epsilon} = A_e \epsilon + B_e(-\tilde{\theta}^T \phi) \\ \epsilon_1 = C_e^T \epsilon \end{cases} \quad (11)$$

onde A_e , B_e e C_e são as matrizes associadas com uma representação de espaço de estado que tem como função de transferência $W(s)L(s) = C_e^T(sI - A_e)^{-1}B_e$. Pelo fato de $W(s)L(s)$ ser ERP, podemos garantir que

$$\begin{cases} A_e^T P_e + P_e^T A_e = -2Q_e \\ P_e B_e = C_e \end{cases} \quad (12)$$

onde $P_e = P_e^T > 0$ para alguma $Q_e = Q_e^T > 0$.

Vamos considerar a seguinte candidata à função de Lyapunov para a equação diferencial em (11):

$$V(\epsilon) = \frac{\epsilon^T P_e \epsilon}{2} \quad (13)$$

A derivada no tempo de (13) é dada por

$$\dot{V}(\epsilon) = -\epsilon^T Q_e \epsilon + \epsilon^T P_e B_e(-\tilde{\theta}^T \phi) \quad (14)$$

A propriedade ERP de $W(s)L(s)$ nos garante de (12) que $P_e B_e = C_e$ o que implica que $\epsilon^T P_e B_e = \epsilon^T C_e = \epsilon_1$. Portanto, (14) pode ser escrita como

$$\dot{V}(\epsilon) = -\epsilon^T Q_e \epsilon - \epsilon_1 \tilde{\theta}^T \phi \quad (15)$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \dot{V}(\epsilon) = & -\epsilon^\top Q_e \epsilon - \epsilon_1 \sum_{i=0}^{n-1} [\hat{\beta}_i - \beta_i] \phi_{u,n-i} \\ & - \epsilon_1 \sum_{i=0}^{n-1} [\hat{\alpha}_i - \alpha_i] \phi_{y,n-i} \end{aligned} \quad (16)$$

Vamos considerar agora as seguintes leis chaveadas para $\hat{\theta}$:

$$\begin{cases} \hat{\beta}_i = \bar{\beta}_i \operatorname{sgn}(\epsilon_1 \phi_{u,n-i}), & \bar{\beta}_i > |\beta_i| \\ \hat{\alpha}_i = \bar{\alpha}_i \operatorname{sgn}(\epsilon_1 \phi_{y,n-i}), & \bar{\alpha}_i > |\alpha_i| \end{cases} \quad (17)$$

para $i = 0, 1, \dots, n-1$. Portanto, temos

$$\begin{aligned} \dot{V}(\epsilon) = & -\epsilon^\top Q_e \epsilon - \sum_{i=0}^{n-1} [\bar{\beta}_i |\epsilon_1 \phi_{u,n-i}| - \beta_i \epsilon_1 \phi_{u,n-i}] \\ & - \sum_{i=0}^{n-1} [\bar{\alpha}_i |\epsilon_1 \phi_{y,n-i}| - \alpha_i \epsilon_1 \phi_{y,n-i}] \end{aligned}$$

e concluímos que

$$\dot{V}(\epsilon) \leq -\epsilon^\top Q_e \epsilon < 0 \quad (18)$$

que garante $\epsilon = 0$ como um ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável, que implica que $\epsilon \in \mathcal{L}_\infty$ e com mais alguns cálculos que $\epsilon \in \mathcal{L}_2$. Portanto, $\epsilon_1 \in \mathcal{L}_\infty$.

4 Posicionamento de Polos Intervalar

Nesta seção, vamos considerar uma lei de controle por posicionamento de polos para o caso em que não se conhece exatamente os parâmetros da planta em (1), mas se conhece o intervalo fechado onde cada um deles se encontra. Vamos considerar um polinômio qualquer $D(s)$ de ordem n para definir alguns termos a serem utilizados na sequência:

- $d \in R^n$ denota o vetor que contém todos os coeficientes de $D(s)$, representados por d_i , para $i = 0, 1, \dots, n-1$;
- $[D(s)]$ denota o polinômio intervalar cujos coeficientes representados por $[d_i]$ denotam os intervalos fechados conhecidos onde cada coeficiente d_i de $D(s)$ se encontra. Portanto, podemos dizer que $D(s) \in [D(s)]$ e $d_i \in [d_i]$, para $i = 0, 1, \dots, n-1$;
- $[d] \in R^n$ denota o vetor que contém todos os coeficientes de $[D(s)]$;
- d^- e d^+ denotam os vetores de valores mínimos e máximos dos elementos de $[d]$, respectivamente;
- d_i^- e d_i^+ denotam os elementos i dos vetores d^- e d^+ , respectivamente;
- $D^-(s)$ e $D^+(s)$ denotam os polinômios arestas de $[D(s)]$, ou seja, polinômios cujos coeficientes são os elementos de d^- e d^+ , respectivamente;

- $D_c(s)$ denota o polinômio central de $[D(s)]$, cujos coeficientes são os centros dos respectivos coeficientes intervalares de $[D(s)]$ e são agrupados no vetor d_c .

Como estamos considerando que não conhecemos exatamente os parâmetros de $G(s)$, vamos considerar a planta intervalar $[G(s)]$, tal que $G(s) \in [G(s)]$. Ou seja,

$$[G(s)] = \frac{[Z(s)]}{[R(s)]} = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} [\beta_i] s^i}{s^n + \sum_{i=0}^{n-1} [\alpha_i] s^i} \quad (19)$$

Portanto, temos que $\beta_i \in [\beta_i] = [\beta_i^-, \beta_i^+]$ e $\alpha_i \in [\alpha_i] = [\alpha_i^-, \alpha_i^+]$, para $i = 0, 1, \dots, n-1$.

Como não conhecemos o modelo exato da planta, não podemos garantir que os polos de malha fechada permanecerão exatamente em determinadas posições pontuais. Portanto, vamos considerar um polinômio intervalar mônico Hurwitz, que representa uma família de polinômios de raízes com parte real negativa, e é denominado polinômio característico intervalar, dado por

$$[B(s)] = s^{n+2} + \sum_{i=0}^{n+1} [b_i] s^i \quad (20)$$

onde $[b_i] = [b_i^-, b_i^+]$, para $i = 0, 1, \dots, n+1$, e, portanto, temos que $b^- = [b_{n+1}^-, \dots, b_1^-, b_0^-]^\top$ e $b^+ = [b_{n+1}^+, \dots, b_1^+, b_0^+]^\top$.

O objetivo do projeto agora é calcular o sinal de controle u de maneira que os polos de malha fechada permaneçam na região delimitada por $[B(s)]$ e y siga um sinal de referência constante r . Portanto, podemos usar a abordagem polinomial para projetar um controlador de ordem fixa, cuja lei de controle proposta é dada por

$$u = -\frac{P_c(s)}{Q_m(s)L_c(s)} e_1 \quad (21)$$

onde $e_1 = y - r$ é o erro de rastreamento, $Q_m(s) = s$ é o modelo interno de r e os polinômios $P_c(s)$ e $L_c(s)$ são dados por

$$P_c(s) = p_2 s^2 + p_1 s + p_0, \quad L_c(s) = s + l_0$$

Aplicando (21) em (19), chegamos à equação da planta em malha fechada:

$$u = \frac{P_c(s)[Z(s)]}{Q(s)L_c(s)[R(s)] + P_c(s)[Z(s)]} \quad (22)$$

Portanto, a solução do problema de posicionamento de polos se resume a solucionar a equação Diofantina

$$Q(s)L_c(s)[R(s)] + P_c(s)[Z(s)] = B(s) \quad (23)$$

de maneira que $B(s) \in [B(s)]$, que é o polinômio característico intervalar, cujo grau é $n+2$. O que

se deseja com a equação (23) pode ser representado como

$$c^- \leq [S]x \leq c^+ \quad (24)$$

onde $[S]$ é uma matriz derivada da matriz de Sylvester $[A]$ associada aos polinômios $Q_m(s)[R(s)]$ e $[Z(s)]$, com dimensão $4 \times (n+2)$; c^- e c^+ são os vetores associados ao polinômio característico intervalar; e x é o vetor associado aos parâmetros do controlador, ou seja,

$$[S] = \begin{bmatrix} 1 & [\beta_{n-1}] & 0 & 0 \\ [\alpha_{n-1}] & [\beta_{n-2}] & [\beta_{n-1}] & 0 \\ [\alpha_{n-2}] & [\beta_{n-3}] & [\beta_{n-2}] & [\beta_{n-1}] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ [\alpha_1] & [\beta_0] & [\beta_1] & [\beta_2] \\ [\alpha_0] & 0 & [\beta_0] & [\beta_1] \\ 0 & 0 & 0 & [\beta_0] \end{bmatrix}$$

$$c^- = [b_{n+1}^- - \alpha_{n-1}^-, \dots, b_2^- - \alpha_0^-, b_1^-, b_0^-]^\top$$

$$c^+ = [b_{n+1}^+ - \alpha_{n-1}^+, \dots, b_2^+ - \alpha_0^+, b_1^+, b_0^+]^\top$$

$$x = [l_0, p_2, p_1, p_0]^\top$$

Portanto, qualquer vetor x que atenda à condição em (24) pode ser selecionado, pois garante o posicionamento de polos na região delimitada por $[B(s)]$.

Considerando um polinômio intervalar dado por $[M(s)]$, o espaço das raízes ou espectro de $[M(s)]$, denotado por $S[M(s)]$, é definido como o conjunto de todas as raízes de $[M(s)] = 0$, quando os coeficientes de $[M(s)]$ assumem valores em $[m] = [m^-, m^+]$. O Teorema das Arestas, cuja prova é apresentada em (Keel and Bhattacharyya, 1999), diz que o espaço de raízes $S[M(s)]$ de um polinômio intervalar $[M(s)]$ é limitado pelas raízes de suas arestas $[m^-, m^+]$.

Para que o posicionamento robusto de polos seja arbitrário no plano complexo, é necessário que os polinômios intervalares da função de transferência da planta desconhecida sejam robustamente coprimos (Beeck, 1975). Dois polinômios intervalares $[M(s)]$ e $[N(s)]$ são robustamente coprimos se a resultante de Sylvester intervalar $[A]$ associada é robustamente não-singular (Lordelo et al., 2006), ou ainda se $S([M(s)]) \cap S([N(s)]) = \emptyset$. Considerando A_c como a matriz centro de $[A]$ e Δ como a matriz dos raios de $[A]$ e, portanto, $[A] = [A_c - \Delta, A_c + \Delta]$, podemos checar a não-singularidade robusta de $[A]$ através do seguinte teste, apresentado em (Juzzo et al., 2003):

$$\rho(|A_c^{-1}|\Delta) < 1 \quad (25)$$

Na qual $\rho(A) = \max\{|\lambda| : Ax = \lambda x \text{ para algum } x \neq 0\}$.

5 Projeto do VS-APPC

Nesta seção, vamos considerar o que foi apresentado nas seções anteriores para desenvolver o projeto do VS-APPC, aplicado a plantas intervalares.

5.1 Parametrização e Leis Adaptativas

Conforme apresentado na Seção 3, para o projeto das leis adaptativas é necessário construir o seguinte modelo paramétrico para estimar a saída y , que requer a escolha de uma função de transferência ERP de ordem n , definida como $W(s)L(s)$:

$$\hat{y} = W(s)L(s)(\hat{\theta}_b^\top \phi_u + \hat{\theta}_a^\top \phi_y - \lambda^\top \phi_y) \quad (26)$$

onde

$$W(s) = \frac{1}{\Lambda(s)} = \frac{1}{s^n + \lambda_{n-1}s^{n-1} + \dots + \lambda_1s + \lambda_0}$$

$$\lambda = [\lambda_{n-1}, \dots, \lambda_1, \lambda_0]^\top$$

$$\phi_u = L^{-1}(s)\psi_u, \quad \phi_y = L^{-1}(s)\psi_y$$

$$\psi_u = [u^{(n-1)}, \dots, u]^\top, \quad \psi_y = [-y^{(n-1)}, \dots, -y]^\top$$

$$\hat{\theta}_\beta = [\hat{\beta}_{n-1}, \dots, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_0]^\top, \quad \hat{\theta}_\alpha = [\hat{\alpha}_{n-1}, \dots, \hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_0]^\top$$

e o erro de estimação é calculado como $\epsilon_1 = y - \hat{y}$.

Considerando que conhecemos o intervalo onde cada parâmetro da planta se encontra e para garantir que cada estimativa tenha sinal definido, vamos considerar uma pequena modificação nas leis chaveadas para $\hat{\theta}$ em (17), mantendo as propriedades de estabilidade apresentadas na Seção 3. As novas leis chaveadas são definidas como:

$$\begin{cases} \hat{\beta}_i = \bar{\beta}_i \text{sgn}(\epsilon_1 \phi_{u,n-i}) + \beta_{i,c} \\ \hat{\alpha}_i = \bar{\alpha}_i \text{sgn}(\epsilon_1 \phi_{y,n-i}) + \alpha_{i,c} \end{cases} \quad (27)$$

onde $\beta_{i,c}$ e $\alpha_{i,c}$ são os centros de $[\beta_i]$ e $[\alpha_i]$, respectivamente, e, portanto, devemos ter $\bar{\beta}_i > \beta_i^+ - \beta_{i,c}$ e $\bar{\alpha}_i > \alpha_i^+ - \alpha_{i,c}$, para $i = 0, 1, \dots, n-1$.

Calculadas as estimativas de θ_β e θ_α , temos as estimativas para os polinômios $Z(s)$ e $R(s)$, conforme segue:

$$\hat{Z}(s) = \hat{\beta}_{n-1}s^{n-1} + \dots + \hat{\beta}_1s + \hat{\beta}_0$$

$$\hat{R}(s) = s^{n-1} + \hat{\alpha}_{n-1}s^{n-1} + \dots + \hat{\alpha}_1s + \hat{\alpha}_0$$

5.2 Polinômio Característico Intervalar

O polinômio característico intervalar $[B(s)]$ deve ser escolhido de maneira que todas as suas raízes tenham parte real negativa. Essa garantia pode ser obtida pelo Teorema de Kharitonov (Kharitonov, 1979), que diz que um polinômio intervalar representado como

$$[K(s)] = s^n + [k_{n-1}]s^{n-1} + \dots + [k_1]s + [k_0]$$

onde $[k_i] = [k_i^-, k_i^+]$, para $i = 0, 1, \dots, n-1$, é Hurwitz se e somente se os seguintes quatro polinômios extremos são Hurwitz:

$$K_1(s) = s^n + \dots + k_4^-s^4 + k_3^+s^3 + k_2^+s^2 + k_1^-s + k_0^-$$

$$K_2(s) = s^n + \dots + k_4^-s^4 + k_3^-s^3 + k_2^+s^2 + k_1^+s + k_0^-$$

$$K_3(s) = s^n + \dots + k_4^+s^4 + k_3^+s^3 + k_2^-s^2 + k_1^-s + k_0^+$$

$$K_4(s) = s^n + \dots + k_4^+s^4 + k_3^-s^3 + k_2^-s^2 + k_1^+s + k_0^+$$

5.3 Cálculo dos Parâmetros do Controlador

Conforme visto na Seção 4, é possível encontrar-mos varias soluções que satisfazem a inequação (24), ou seja, vários vetores x que garantem o posicionamento de polos regional. O projeto proposto neste artigo considera inicialmente encontrar um vetor intervalar $[x]$ que garanta o posicionamento de polos regional, ou seja, vetores x^- e x^+ que delimitem uma faixa de variação possível para cada parâmetro do controlador, de maneira que qualquer $x \in [x]$ garanta o posicionamento de polos desejado, conforme $[B(s)]$. Conhecendo a matriz $[S]$ e os vetores c^- e c^+ , com auxílio da função `fmincon` do Matlab, que permite encontrar mínimos e máximos de funções definidas pelo usuário, obedecendo determinadas restrições, encontramos o vetor intervalar $[x] = [x^-, x^+]$. Essa busca deve ser feita de maneira recursiva, pois nem sempre as soluções para x^- e x^+ delimitam um intervalo válido, ou seja, um intervalo que garanta o posicionamento de polos conforme as raízes de $[B(s)]$. O vetor $[x]$ encontrado é, portanto, definido como

$$[x] = [x^-, x^+] = \begin{bmatrix} l_0^-, & l_0^+ \\ p_2^-, & p_2^+ \\ p_1^-, & p_1^+ \\ p_0^-, & p_0^+ \end{bmatrix} \quad (28)$$

Os polinômios da planta estimados ($\hat{Z}(s)$ e $\hat{R}(s)$) e o modelo interno de r são usados para formar a matriz $\hat{S}$. Para o cálculo dos parâmetros do controlador VS-APPC em tempo real, é considerado o polinômio característico central $B_c(s)$, ou seja, um polinômio mônico de grau $n + 2$ cujos coeficientes são os centros dos respectivos coeficientes intervalares do polinômio $[B(s)]$, formando assim o vetor c_c , que tem o mesmo formato de c^- e c^+ em (24), mas contendo os coeficientes de $B_c(s)$. Para garantir o posicionamento de polos desejado, os parâmetros do controlador são calculados conforme:

$$\hat{x} = \hat{S}^{-1} c_c \quad (29)$$

considerando as seguintes saturações: se $\hat{x}_i < x_i^-$, então $\hat{x}_i = x_i^-$; se $\hat{x}_i > x_i^+$, então $\hat{x}_i = x_i^+$. Com isso, temos a lei de controle do VS-APPC:

$$u = -\frac{\hat{p}_2 s^2 + \hat{p}_1 s + \hat{p}_0}{s^2 + \hat{l}_0 s} e_1 \quad (30)$$

6 Resultados de Simulação

Esta seção apresenta um resultado de simulação do VS-APPC aplicado a uma planta de segunda ordem de fase não mínima. Foram considerados o passo de integração $h = 0.001s$, que é usado no método de Euler para as aproximações derivativas, o sinal de referência $r = 1$ e os polinômios de projeto: $\Lambda(s) = (s + 1)^2$ e $L(s) = s + 2$, utilizados na equação do modelo da planta, conforme (26).

Vamos considerar a seguinte planta estável de fase não mínima:

$$G(s) = \frac{2s - 10}{s^2 + 8s + 16} \quad (31)$$

Vamos considerar também que os parâmetros da planta $G(s)$ não são conhecidos. Entretanto, vamos considerar uma planta intervalar $[G(s)]$, cujos coeficientes intervalares contêm os parâmetros exatos de $G(s)$:

$$[G(s)] = \frac{[1.7, 2.1]s + [-10.2, -9.9]}{s^2 + [7.7, 8.1]s + [15.8, 16.1]} \quad (32)$$

Conforme (25) e (32), temos que $\rho(|A_c^{-1}|)\Delta = 0.1015$, o que garante a não-singularidade de $[A]$ e, portanto, $Q_m(s)[R(s)]$ e $[Z(s)]$ são polinômios intervalares robustamente coprimos.

Deseja-se projetar um controlador de maneira que os polos de malha fechada sejam alocados de forma robusta no espectro limitado pelas raízes dos polinômios arestas $B^-(s) = (s + 4.5)^4$ e $B^+(s) = (s + 6)^4$, que formam o polinômio $[B(s)]$, cuja estabilidade é garantida pelo Teorema de Kharitonov, além do sinal de saída y ter de seguir uma referência $r = 1$.

A partir da matriz $[S]$, associada à planta $[G(s)]$ em (32), e dos vetores c^- e c^+ , associados ao polinômio $[B(s)]$ desejado, determinamos o vetor intervalar $[x]$, conforme (24), através de um algoritmo com auxílio da função `fmincon` do Matlab:

$$[x] = \begin{bmatrix} l_0^-, & l_0^+ \\ p_2^-, & p_2^+ \\ p_1^-, & p_1^+ \\ p_0^-, & p_0^+ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20.0029, & 21.9917 \\ -5.2182, & -4.0135 \\ -53.4173, & -18.7116 \\ -111.9624, & -44.0464 \end{bmatrix}$$

O cálculo dos parâmetros do controlador em cada instante $t > 0$ é feito com base na equação (29), onde a matriz $\hat{S}$ é gerada a partir das leis chaveadas em (27) e c_c é construído com base em $B_c(s)$, que é o polinômio central de $[B(s)]$.

A Fig. 1 apresenta o comportamento do sistema em (31) quando o VS-APPC é utilizado. Aos 3s de simulação, os parâmetros da planta são alterados para: $\beta_1 = 1.8$, $\beta_0 = -10.1$, $\alpha_1 = 7.8$ e $\alpha_0 = 15.9$. Aos 6s, é feita uma mudança no sinal de referência para $r = 0.5$. De acordo com (27), temos: $\beta_{1,c} = 1.9$, $\beta_{0,c} = -10.1$, $\alpha_{1,c} = 7.9$ e $\alpha_{0,c} = 15.9$. As constantes escolhidas obedecendo as restrições das leis chaveadas foram: $\bar{\beta}_1 = 0.21$, $\bar{\beta}_0 = 0.21$, $\bar{\alpha}_1 = 0.3$ e $\bar{\alpha}_0 = 8.5$. A porcentagem de *overshoot* foi de 0.61%, a porcentagem de *undershoot* foi de 39.71% e o tempo de estabilização foi de 0.639s, considerando uma tolerância de 2%. Para efeito de comparação, utilizando a mesma lei de controle, mas com parâmetros fixados nos centros de $[x]$, temos a porcentagem de *overshoot* de 4.25%, a porcentagem de *undershoot* de 34.65%

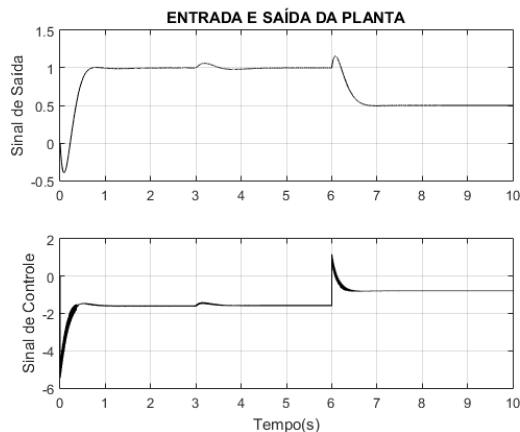


Figura 1: VS-APPC aplicado a uma planta intervalar.

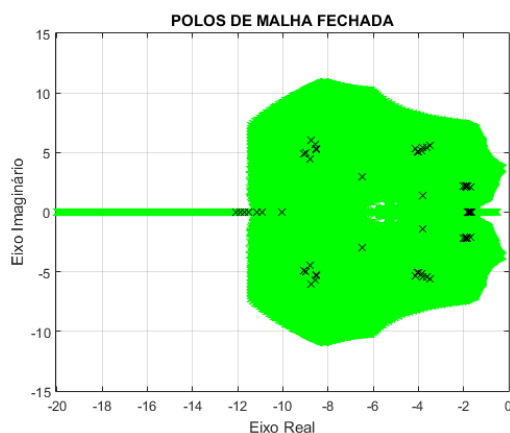


Figura 2: Comportamento dos polos de malha fechada com a aplicação do VS-APPC.

e o tempo de estabilização de 1.476s. Portanto, o controlador proposto neste artigo apresenta desempenho significativamente mais rápido. A presença do modelo interno $Q_m(s)$ na lei de controle (21) torna o sinal de controle mais suave em relação a outros controladores com estrutura variável.

A Fig. 2 apresenta o comportamento dos polos do sistema em malha fechada do sistema (em preto), cujo comportamento foi apresentado na Fig. 1. A área em verde mostra a região desejada para o posicionamento dos polos de malha fechada, definida pelo polinômio $[B(s)]$. Como podemos observar, mesmo com alterações no sinal de referência e nos parâmetros da planta, dentro dos respectivos intervalos, o controlador alcança perfeitamente o objetivo de posicionar os polos.

7 Conclusões

Este artigo apresentou o projeto de um controlador com estrutura variável para plantas LTI intervalares. A estratégia apresentou transitório rápido e atingiu o objetivo de posicionar os polos

de malha fechada em uma região definida por um polinômio característico intervalar.

Como trabalhos futuros, pretende-se testar a robustez do controlador no que se refere a perturbações e dinâmica não modelada, assim como realizar a implementação prática do controlador proposto.

Referências

- Beeck, H. (1975). Zur Problematik der Hüllenbestimmung von Intervallgleichungssystemen, *Lecture Notes in Computer Science* **29**: 150–159.
- Hsu, L. and Costa, R. R. (1989). Variable Structure Model Reference Adaptive Control Using Only Input and Output Measurements - Part I, *International Journal of Control* **49**: 399–416.
- Hsu, L. and Costa, R. R. (1992). Robustness of VS-MRAC with Respect to Unmodelled Dynamics and External Disturbances, *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing* **6**: 19–33.
- Ioannou, P. A. and Sun, J. (1996). *Robust Adaptive Control*, Prentice Hall.
- Juzzo, E. A., Lordelo, A. D. S. and Ferreira, P. A. V. (2003). Condições Suficientes para Irreduzibilidade de Plantas Intervalares via Análise Intervalar, *Anais do XXVI Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional*, São José do Rio Preto/SP, p. 105.
- Keel, L. H. and Bhattacharyya, S. P. (1999). Robust Stability and Performance with Fixed-Order Controllers, *Automatica* **35**: 1717–1724.
- Kharitonov, V. L. (1979). Asymptotic Stability of an Equilibrium Position of a Family of Systems of Linear Differential Equations, *Differential Equations* **14**: 1483–1485.
- Lordelo, A. D. S., Juzzo, E. A. and Ferreira, P. A. V. (2006). Analysis and Design of Robust Controllers Using the Interval Diophantine Equation, *Reliable Computing* **12**: 371–388.
- Silva Junior, F. C. and Araújo, A. D. (2005). Variable Structure Adaptive Pole Placement Control, *Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control*, Sevilha, Espanha, pp. 2859–2864.
- Utkin, V. (1978). *Sliding Modes and Their Application in Variable Structure Systems*, Mir.