

REGULADORES QUADRÁTICOS PARA SISTEMAS LINEARES SUJEITOS A SALTOS MARKOVIANOS COM CADEIA NÃO OBSERVÁVEL E MATRIZES DE TRANSIÇÃO INCERTAS

DAIANE C. BORTOLIN*, MARCO H. TERRA*

**Departamento de Engenharia Elétrica e de Computação
Universidade de São Paulo - Campus de São Carlos
caixa postal 359, cep 13.566-590, São Carlos, São Paulo, Brasil.*

Emails: daiane.bortolin@usp.br, terra@sc.usp.br

Abstract— In this paper, we deal with optimal control problems for Markovian jump linear systems with unknown Markov chain where the transition probability matrix is subject to uncertainties. Based on a deterministic approach, we propose recursive linear quadratic regulators associated with the first moment of the Markovian system whose solution is given from robust regularized least-squares with penalization.

Keywords— Markovian jump linear system, first moment-linear system, uncertain transition probabilities, optimal control, unknown Markov chain.

Resumo— Este trabalho aborda o problema de controle ótimo para sistemas lineares sujeitos a saltos Markovianos cuja cadeia é desconhecida e as probabilidades de transição estão sujeitas a incertezas. As soluções para esses problemas são obtidas a partir da reformulação do sistema Markoviano como um sistema determinístico, com base em estratégias baseadas em mínimos quadrados ponderados robustos com penalização.

Palavras-chave— Sistema lineares a saltos Markovianos, sistemas de primeiro momento, probabilidades de transição incertas, controle ótimo, cadeia de Markov desconhecida.

1 Introdução

Neste artigo tratamos de sistemas lineares sujeitos a saltos Markovianos (SLSM) em tempo discreto. Os SLSM formam uma importante classe de sistemas devido ao fato de generalizarem os sistemas lineares determinísticos e pela possibilidade de modelar processos cuja dinâmica apresenta alterações abruptas de comportamento como, por exemplo, perturbações ambientais repentinas, falhas de componentes e outros fenômenos aleatórios. O modelo para esta classe de sistemas é composto de vários subsistemas determinísticos com diferentes modos de operação. O salto entre estes modos é governado por uma variável aleatória que evolui de acordo com uma cadeia de Markov associada a uma matriz de transição de probabilidade.

Inúmeras aplicações e resultados relacionados com controle e filtragem de SLSM assumem que as probabilidades de transição entre os modos Markovianos são completamente conhecidas. Entretanto, em problemas práticos, obter informações precisas sobre essas probabilidades pode não ser uma tarefa simples. Neste contexto, muitos pesquisadores têm incorporado algum tipo de incerteza nas matrizes de transição tais como, domínio politópico (Costa et al., 1997; Souza, 2005), conjuntos não-convexos (Nilim e El Ghaoui, 2005), intervalares (Hartfiel, 1998; Boukas, 2009), limitadas em norma (Bortolin e Terra, 2015; Wan et al., 2015) ou, as incertezas são quantificadas pela função de densidade de probabilidade de transição Gaussiana (Luan et al., 2013).

Em relação aos saltos Markovianos, abordamos os SLSM cujas cadeias de Markov são desconhecidas. Nota-se na literatura que duas estratégias de controle têm predominado na solução desses problemas, método variacional (do Val e Başar, 1999) e desigualda-

des matriciais lineares (do inglês, *Linear Matrix Inequalities* - LMIs) (do Val et al., 2002; Souza, 2005).

Neste artigo, um regulador robusto recursivo independente do modo é proposto a partir do primeiro momento do SLSM. Consideramos que a matriz de transição de probabilidade pode ser conhecida, parcialmente conhecida ou completamente desconhecida. Assumimos ainda que as incertezas são limitadas em norma.

A lei de controle é determinada por um regulador linear quadrático recursivo que se assemelha ao regulador proposto por Cerri (2009). Este procedimento baseia-se na solução de problemas de mínimos quadrados ponderados robustos com penalização. As condições de existência para esta classe de reguladores são bem definidas e se assemelham às condições de existência definidas nos reguladores clássicos de sistemas lineares de tempo discreto no espaço de estado sujeito a incertezas.

O artigo está organizado da seguinte maneira: a Seção 2 descreve o modelo para a matriz de transição incerta e para a equação de espaço de estado. Na Seção 3, os SLSM com modo não acessível é reformulado como um sistema linear de primeiro momento e o problema de regulação para este novo sistema é definido. Na Seção 4 é apresentado o regulador linear quadrático recursivo para sistemas lineares no espaço de estado. Na Seção 5 um exemplo numérico ilustra a abordagem proposta. Por fim, a Seção 6 apresenta as conclusões.

1.1 Notações

A notação utilizada em todo o texto é a padrão. Letras maiúsculas denotam matrizes e as minúsculas representam os vetores. As letras gregas são utilizadas para

a notação dos escalares. O conjunto dos números reais é representado por $\mathbb{R}$ sendo $\mathbb{R}^n$ o conjunto de vetores n -dimensionais cujos elementos estão em $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^{n,m}$ o conjunto de matrizes reais de dimensão $n \times m$. Para matrizes reais e vetores, o símbolo sobrescrito T denota o transposto. I_n representa a matriz identidade de dimensão $n \times n$. O símbolo $\mathcal{E}\{x_k\}$ denota o valor esperado de x . A matriz $\text{diag}(A) = \text{diag}(A_1, \dots, A_s)$ representa uma matriz bloco diagonal constituída pelo conjunto de matrizes $\{A_1, \dots, A_s\}$ e $(A \otimes B)$ denota o produto de Kronecker. Adotamos, por simplicidade, a notação $Y^T X Y = Y^T X(\bullet)$.

2 Formulação do Problema

Nesta seção apresentamos um modelo para a matriz de transição (MT) que permite representar os diferentes tipos de incertezas usualmente considerados na literatura. Apresentamos também, a formulação dos sistemas lineares sujeitos a saltos Markovianos que será adotada para deduzir o regulador robusto.

2.1 Matriz de Transição Incerta

Seja $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ o espaço de probabilidade fundamental. Considere o processo $\Theta = \{\theta_0, \dots, \theta_N\}$ uma cadeia de Markov discreta no tempo com $\theta_k \in \mathcal{S} = \{1, \dots, s\}$ para todo $k \geq 0$ e p_{ij} as probabilidades de transição entre os estados $i, j \in \mathcal{S}$. Assuma que as probabilidades de transição podem ser completamente conhecidas ou afetadas por algum tipo de incerteza (parcial ou completamente desconhecida), sendo que a matriz de transição é dada por

$$\mathbb{P}^\delta := [\mathbb{P} + \delta\mathbb{P}] = [p_{ij} + \delta p_{ij}] \in \mathbb{R}^{s \times s} \quad (1)$$

sendo $\mathbb{P}$ uma matriz de parâmetros nominais e $\delta\mathbb{P}$ uma matriz de incertezas. As probabilidades incertas δp_{ij} são modeladas da seguinte forma:

$$\delta p_{ij} = h_{ij} \Delta_{ij} e_{ij}$$

sendo h_{ij}, e_{ij} escalares conhecidos e Δ_{ij} é um escalar com $|\Delta_{ij}| \leq \gamma_{ij}$. Além disso, as probabilidades de transição p_{ij}^δ e as distribuições $\pi_{i,k}^\delta$ satisfazem as seguintes condições:

$$\begin{aligned} P[\theta_{k+1} = j | \theta_k = i] &= p_{ij}^\delta = p_{ij} + \delta p_{ij}, \\ P[\theta_k = i] &= \pi_{i,k}^\delta = \pi_{i,k} + \delta \pi_{i,k}, \\ \sum_{j=1}^s (p_{ij} + \delta p_{ij}) &= 1, \quad \sum_{i=1}^s (\pi_{i,k} + \delta \pi_{i,k}) = 1, \\ 0 \leq p_{ij} + \delta p_{ij} &\leq 1 \quad \text{e} \quad 0 \leq \pi_{i,k} + \delta \pi_{i,k} \leq 1. \end{aligned}$$

As distribuições incertas $\delta \pi_{i,k}$ são modeladas como:

$$\delta \pi_{i,k} = m_{i,k} \bar{\Delta}_{i,k} n_{i,k}$$

sendo $m_{i,k}$ e $n_{i,k}$ escalares conhecidos e $\bar{\Delta}_{i,k}$ é um escalar com $|\bar{\Delta}_{i,k}| \leq \eta_{i,k}$. A distribuição do estado da cadeia de Markov π_k é definida como $\pi_k = \pi_0 \mathbb{P}^k$ quando a MT é conhecida. Para as matrizes de transição incertas, o vetor π_k^δ pode ser determinado, por exemplo, pelo Cálculo dos Vértices, Método Hi-Lo (Hartfiel, 1998)

ou Simulação de Monte Carlo (Samuels, 2001). Assuma que

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^s p_{ij} &= \alpha_i, \quad \sum_{j=1}^s \delta p_{ij} = 1 - \alpha_i \\ \sum_{i=1}^s \pi_{i,k} &= \beta_{i,k} \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^s \delta \pi_{i,k} = 1 - \beta_{i,k} \end{aligned}$$

com $\alpha_i, \beta_{i,k} \in [0, 1], \forall i \in \mathcal{S}$. Note que, quando $\alpha_i = 0, \forall i \in \mathcal{S}$, a MT é desconhecida e quando $\alpha_i = 1, \forall i \in \mathcal{S}$, é completamente conhecida. O Exemplo 1 ilustra o modelo adotado para representar a MT incerta, considerando dois tipos de probabilidades: parcial e completamente desconhecida.

Exemplo 1 Considere a matriz de transição incerta de um SLSM com dois modos de operação descrita por:

$$\mathbb{P}^\delta = \begin{bmatrix} [0,2;0,4] & [0,6;0,8] \\ ? & ? \end{bmatrix}$$

sendo que os elementos da primeira linha são limitados e da segunda são completamente desconhecidos. Para a representação conforme o modelo (1), assumiremos as matrizes $\mathbb{P}$ (nominal) e $\delta\mathbb{P}$ (incerta) com os seguintes parâmetros:

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 0,3 & 0,6 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \delta\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 0,1\Delta_{11} & 0,1\Delta_{12} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} \end{bmatrix}$$

$$\text{sendo} \quad \begin{aligned} -1 \leq \Delta_{11} \leq 1, \quad \Delta_{12} &= 1 - \Delta_{11}, \\ 0 \leq \Delta_{22} \leq 1 \quad \text{e} \quad \Delta_{21} &= 1 - \Delta_{22}. \end{aligned}$$

A Figura 1 exibe a variação da primeira linha de $\mathbb{P}^\delta$ de acordo com os valores de Δ_{11} . Note que, a condição $p_{11} + p_{12} = 1$ é satisfeita.

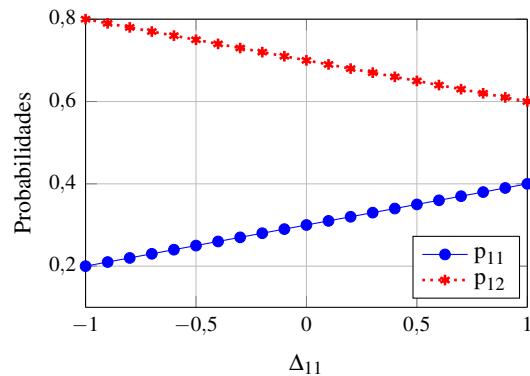


Figura 1: Variação da primeira linha de $\mathbb{P}^\delta$.

2.2 Sistemas Lineares sujeitos a Saltos Markovianos

Considere o sistema linear de tempo discreto sujeito a saltos Markovianos dado por

$$x_{k+1} = F_{\theta_k} x_k + G_{\theta_k} u_k \quad (2)$$

onde $x_k \in \mathbb{R}^n$ é a variável de estado e $u_k \in \mathbb{R}^m$ a variável de entrada de controle para todo $k \in \mathbb{N}$. As matrizes do espaço de estado dependem da variável aleatória θ_k

que admite valores no conjunto $\mathcal{S}$ o qual contém s modos de operação do sistema (2). Sempre que $\theta_k = i$, o SLSM evolui de acordo com o modo i sendo $F_{\theta_k} = F_i$ uma matriz tomada de um conjunto conhecido de matrizes $F = (F_1, \dots, F_s)$. As outras matrizes do sistema são consideradas de maneira análoga.

Neste artigo, consideramos que o controlador não tem acesso aos modos de operação do sistema, com exceção de uma distribuição inicial que pode ser completamente conhecida ou afetada por algum tipo de incerteza. Desta forma, o problema consiste em determinar uma sequência de controle ótimo admissível

$$\mathcal{U}^* = \{u_0^*, u_1^*, \dots, u_{N-1}^*\}$$

que estabiliza o SLSM.

3 Sistema Linear de Primeiro Momento

Nesta seção, o SLSM (2) será reformulado como um sistema independente da cadeia de Markov. Para isto, será considerado o primeiro momento da variável de estado x_k definido por

$$q_{i,k} := \mathcal{E} \left\{ x_k \mathbb{I}_{\{\theta_k=i\}} \right\}, \forall k \geq 0 \text{ e } i \in \mathcal{S} \quad (3)$$

sendo $\mathbb{I}_{\mathcal{C}}$ a função indicadora dada por $\mathbb{I}_{\mathcal{C}}(\omega) = 1$ se $\omega \in \mathcal{C}$ e $\mathbb{I}_{\mathcal{C}}(\omega) = 0$, caso contrário. Por meio de (3) é possível estabelecer uma equação recursiva para $q_{i,k}$ a partir do valor esperado da equação de estado (2) de acordo com as seguintes etapas:

$$\begin{aligned} q_{j,k+1} &= \mathcal{E} \left\{ x_{k+1} \mathbb{I}_{\{\theta_{k+1}=j\}} \right\} \\ &= \sum_{i=1}^s \mathcal{E} \left\{ (F_{\theta_k} x_k + G_{\theta_k} u_k) \mathbb{I}_{\{\theta_k=i\}} | \theta_{k+1} = j \right\} \times \\ &\quad P \left[\theta_{k+1} = j | \theta_k = i \right] \\ &= \sum_{i=1}^s \left(F_i q_{i,k} + G_i \mathcal{E} \left\{ u_k \mathbb{I}_{\{\theta_k=i\}} | \theta_{k+1} = j \right\} \right) p_{ij}^{\delta}. \end{aligned}$$

Levando em conta que,

$$\mathcal{E} \left\{ u_k \mathbb{I}_{\{\theta_k=i\}} | \theta_{k+1} = j \right\} = P[\theta_k = i] u_k = \pi_{i,k}^{\delta} u_k,$$

temos que $q_{j,k+1}$ é dado por:

$$q_{j,k+1} = \sum_{i=1}^s p_{ij}^{\delta} \left(F_i q_{i,k} + \pi_{i,k}^{\delta} G_i u_k \right) \forall j \in \mathcal{S}. \quad (4)$$

A partir da forma matricial de (4) e das probabilidades (nominais e incertas) podemos definir dois sistemas lineares de primeiro momento (SLPM):

- **Caso I: Sistema Nominal** ($\alpha_i = 1, \forall i \in \mathcal{S}$)

$$q_{k+1} = \mathcal{A} q_k + \mathcal{B}_k u_k \quad (5)$$

- **Caso II: Sistema Incerto** ($0 \leq \alpha_i < 1, \forall i \in \mathcal{S}$)

$$q_{k+1} = \mathcal{A}^{\delta} q_k + \mathcal{B}_k^{\delta} u_k \quad (6)$$

com $\mathcal{A}^{\delta} = \mathcal{A} + \delta \mathcal{A}$, $\mathcal{B}_k^{\delta} = \mathcal{B}_k + \delta \mathcal{B}_k$ sendo

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &:= (\mathbb{P}^T \otimes I_n) \mathbb{F}, & \mathbb{F} &:= \text{diag}(F), \\ \delta \mathcal{A} &:= (\delta \mathbb{P}^T \otimes I_n) \mathbb{F}, & \mathbb{G} &:= [G_1 \dots G_s]^T, \\ \mathcal{B}_k &:= (\mathbb{P}^T \otimes I_n) \Pi_k \mathbb{G}, & q_k &:= [q_{1,k} \dots q_{s,k}]^T, \\ \delta \mathcal{B}_k &:= (\delta S^T \otimes I_n) \Pi_k \mathbb{G}, & \Pi_k &:= (\text{diag}(\pi_k) \otimes I_n), \\ \text{e } \delta S &:= [\delta s_{ij} = p_{ij} \delta \pi_{i,k} + \delta p_{ij} \pi_{i,k} + \delta p_{ij} \delta \pi_{i,k}]. \end{aligned}$$

A matriz de parâmetros incertos $\delta \mathbb{P}$ é modelada da seguinte forma:

$$\delta \mathbb{P} = H_{\mathbb{P}} \Delta_{\mathbb{P}} E_{\mathbb{P}}$$

sendo

$$H_{\mathbb{P}} = \begin{bmatrix} h_{11} & \dots & 0 & h_{12} & \dots & 0 & \dots & h_{1s} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & h_{s1} & 0 & \dots & h_{s2} & \dots & 0 & \dots & h_{ss} \end{bmatrix}, \quad (7)$$

$$E_{\mathbb{P}} = \begin{bmatrix} e_{11} & \dots & e_{s1} & 0 & & & & & & \\ & & & e_{12} & \dots & e_{s2} & & 0 & & \\ & 0 & & 0 & & & e_{1s} & \dots & e_{ss} \end{bmatrix}^T$$

e $\Delta_{\mathbb{P}} = \text{diag}(\Delta_{11}, \dots, \Delta_{s1}, \dots, \Delta_{1s}, \dots, \Delta_{ss})$ com $\|\Delta_{\mathbb{P}}\| \leq 1$. Já a matriz δS é definida como:

$$\delta S = T_s \Delta_S V_s \text{ com } \|\Delta_S\| \leq 1$$

e os elementos de $T_s = [t_{ij}]$, $\Delta_S = [\Delta_{ij}]$ e $V_s = [v_{ij}]$ são distribuídos de modo análogo às matrizes $H_{\mathbb{P}}$, $\Delta_{\mathbb{P}}$ e $E_{\mathbb{P}}$, respectivamente. Além disso, temos que

$$\begin{aligned} t_{ij} &= [p_{ij} m_{i,k} \ h_{ij} \ h_{ij} m_{i,k}], \quad \Delta_{ij} = \text{diag}(\bar{\Delta}_{i,k}, \Delta_{ij}, \Delta_{ij} \bar{\Delta}_{i,k}) \\ \text{e } v_{ij} &= [n_{i,k} \ e_{ij} \pi_{i,k} \ e_{ij} n_{i,k}]^T. \end{aligned}$$

Logo, as matrizes de parâmetros incertos do sistema (6) são modeladas como:

$$\delta \mathcal{A} = \mathcal{H} \Delta_{\mathcal{A}} E_{\mathcal{A}} \text{ e } \delta \mathcal{B}_k = \mathcal{H} \Delta_{\mathcal{B}_k} E_{\mathcal{B}_k}$$

sendo $\mathcal{H} := I_{sn}$, $\Delta_{\mathcal{A}} := (E_{\mathbb{P}}^T \Delta_{\mathbb{P}} \otimes I_n)$, $E_{\mathcal{A}} := (H_{\mathbb{P}}^T \otimes I_n) \mathbb{F}$,

$$\Delta_{\mathcal{B}_k} := (E_S^T \Delta_S \otimes I_n) \text{ e } E_{\mathcal{B}_k} := (H_S^T \otimes I_n) \mathbb{G}.$$

O índice de desempenho associado aos SLPM (5) e (6) é uma função quadrática definida por

$$J(q_{k+1}, u_k) = q_{k+1}^T \mathcal{P}(k+1) q_{k+1} + q_k^T \mathcal{Q} q_k + u_k^T \mathcal{R} u_k \quad (8)$$

sendo $\mathcal{P}(k+1) \in \mathbb{R}^{sn,sn}$, $\mathcal{Q} \in \mathbb{R}^{sn,sn}$ e $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^{m,m}$ matrizes definidas positivas. Considere para cada k o problema de determinar a melhor sequência $\{q_{k+1}^*, u_k^*\}$ que minimize o funcional quadrático (8). Dessa forma, estabelecemos os seguintes problemas de otimização de acordo com tipo de MT (nominal ou incerta)

$$\min_{q_{k+1}, u_k} J(q_{k+1}, u_k)$$

$$\text{sujeito a } q_{k+1} = \mathcal{A} q_k + \mathcal{B}_k u_k,$$

se a MT for conhecida, e

$$\min_{q_{k+1}, u_k} \max_{\delta \mathcal{A}, \delta \mathcal{B}_k} J(q_{k+1}, u_k)$$

$$\text{sujeito a } q_{k+1} = \mathcal{A}^{\delta} q_k + \mathcal{B}_k^{\delta} u_k,$$

se a MT estiver sujeita a incertezas.

Note que este modelo independe da variável estocástica θ_k , permitindo uma interpretação determinística do problema. Além disso, a entrada de controle u_k satisfaz, simultaneamente, o SLPM e o SLSM (2) para todo instante de tempo k .

4 Regulador para Sistemas Lineares de Tempo Discreto no Espaço de Estado

Nesta seção apresentamos alguns conceitos fundamentais sobre as funções de penalidades, que transformam um problema de otimização restrita em um problema irrestrito, e um regulador linear quadrático recursivo para sistemas lineares baseado na abordagem proposta por Cerri (2009).

4.1 Funções Penalidade

Considere o seguinte problema de minimização restrita

$$\begin{aligned} \min_x f(x) \\ \text{sujeito a } h(x) = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Suponha que este problema possa ser reescrito como um problema de otimização irrestrito

$$\min_x g(\mu, x) = f(x) + \mu h(x)^T h(x) \quad (11)$$

sendo μ um parâmetro de penalidade e o termo $\mu h(x)^T h(x)$ definido como função de penalidade. O método consiste em resolver o problema (11) iterativamente, gerando uma sequência de soluções $x(k)$ que converge para a solução ótima de (10). A convergência global deste método é garantida pelo Teorema 1.

Teorema 1 (Luenberger e Ye, 2008) *Seja $\{x(k)\}$ uma sequência gerada pelo método das funções penalidades. Então, qualquer ponto limite da sequência é uma solução para (10).*

4.2 Regulador Linear Quadrático Recursivo

Considere o problema de obter a solução ótima (q_{k+1}^*, u_k^*) que satisfaz o seguinte problema de otimização:

$$\min_{q_{k+1}, u_k} \max_{\delta \mathcal{A}, \delta \mathcal{B}_k} \left\{ \mathcal{J}_{k,\mu}(q_{k+1}, u_k) \right\} \quad (12)$$

para todo $k \geq 0$, com o funcional quadrático $\mathcal{J}_{k,\mu}$ dado por

$$\mathcal{J}_{k,\mu}(q_{k+1}, u_k) = \begin{bmatrix} q_{k+1} \\ u_k \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathcal{P}(k+1) & 0 \\ 0 & \mathcal{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{k+1} \\ u_k \end{bmatrix} +$$

$$\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ I_{sn} & -\mathcal{B}_k^\delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{k+1} \\ u_k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -I_{sn} \\ \mathcal{A}^\delta \end{bmatrix} q_k \right)^T W(\mu) \begin{pmatrix} \bullet \end{pmatrix}$$

com $W(\mu) = \text{diag}(\mathcal{Q}, \mu I_{sn})$ e $\mu > 0$ fixado. Note que, na ausência das incertezas $\delta \mathcal{A}$ e $\delta \mathcal{B}_k$ o problema consiste apenas na minimização de q_{k+1} e u_k .

O Lema 2 apresenta a solução ótima para o problema de otimização (12) através de um arranjo matricial. Esta solução é obtida por meio da abordagem proposta por Cerri (2009), que combina as funções de penalidade com a solução ótima de problemas de mínimos quadrados ponderados.

Lema 2 (Cerri, 2009) *Considere o problema de otimização (12) com $\mu > 0$ fixado. Suponha que Σ , em (9), é (semi) definida positiva. Então, a solução ótima para (12) é dada pelo regulador linear*

$$\begin{bmatrix} q_{k+1,\mu}^* \\ u_{k,\mu}^* \\ \mathcal{J}_{k,\mu}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{sn} & 0 & 0 \\ 0 & I_m & 0 \\ 0 & 0 & q_{k,\mu}^* \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathcal{L}_\mu(k) \\ \mathcal{K}_\mu(k) \\ \mathcal{P}_\mu(k) \end{bmatrix} q_{k,\mu}^*$$

sendo a malha fechada $\mathcal{L}_\mu(k)$, o ganho $\mathcal{K}_\mu(k)$ e a solução da equação da Riccati $\mathcal{P}_\mu(k)$ obtidos de acordo com a recursão em (9).

Observe que a penalidade imposta pelo parâmetro μ e a variável $\hat{\lambda}$ em (9) estão associadas ao nível de robustez do regulador apresentado no Lema 2. O Algoritmo 1 apresenta o procedimento para a obtenção da solução ótima $(q_{k+1,\mu}^*, u_{k,\mu}^*)$ sendo que a entrada de controle $u_{k,\mu}^*$ também pode ser uma solução ótima para o SLSM (2).

5 Exemplo Ilustrativo

Para exemplificar a eficácia do modelo proposto, consideramos o exemplo apresentado por Boukas e Liu (2001) no qual as matrizes de parâmetros são dadas por:

$$F_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1,2 \end{bmatrix}, F_2 = \begin{bmatrix} 1,13 & 0 \\ 0,16 & 0,478 \end{bmatrix}, F_3 = \begin{bmatrix} 0,30 & 0,13 \\ 0,16 & 1,14 \end{bmatrix},$$

$$G_1 = \begin{bmatrix} 0,1 & 0 \\ 0,1 & 0 \end{bmatrix}, G_2 = \begin{bmatrix} 0,2 & 0,1 \\ 0 & -0,1 \end{bmatrix} \text{ e } G_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0,1 \\ 0 & -0,1 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} \mathcal{L}_\mu(k) \\ \mathcal{K}_\mu(k) \\ \mathcal{P}_\mu(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & I_{sn} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_m \\ 0 & 0 & -I_{sn} & \hat{\mathcal{A}}^T & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{P}_\mu(k+1)^{-1} & 0 & 0 & 0 & I_{sn} & 0 \\ 0 & \mathcal{R}^{-1} & 0 & 0 & 0 & I_m \\ 0 & 0 & \mathcal{Q}^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Sigma & \hat{I} & -\hat{\mathcal{B}}_k \\ I_{sn} & 0 & 0 & \hat{I}^T & 0 & 0 \\ 0 & I_m & 0 & -\hat{\mathcal{B}}_k^T & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -I_{sn} \\ \hat{\mathcal{A}} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

com $\hat{\mathcal{A}}$, $\hat{\mathcal{B}}_k$, $\hat{I}$ e Σ dados de acordo com os seguintes casos:

- **Caso I** (Sistema Nominal): $\hat{\mathcal{A}} \leftarrow \mathcal{A}$, $\hat{\mathcal{B}}_k \leftarrow \mathcal{B}_k$, $\hat{I} \leftarrow I_{sn}$ e $\Sigma \leftarrow \mu^{-1} I_{sn}$.
- **Caso II** (Sistema Incerto): $\hat{\mathcal{A}} \leftarrow [\mathcal{A} \ E_{\mathcal{A}} \ 0]^T$, $\hat{\mathcal{B}}_k \leftarrow [\mathcal{B}_k \ 0 \ E_{\mathcal{B}_k}]^T$, $\hat{I} \leftarrow [I_{sn} \ 0 \ 0]^T$,

$$\Sigma \leftarrow \text{diag} \left((\mu^{-1} - \hat{\lambda}^{-1}) I_{sn}, \hat{\lambda}^{-1} I_{4ns^2} \right) \text{ e } \hat{\lambda} > \mu.$$

As matrizes de ponderação, adaptadas de Boukas e Liu (2001), presentes no índice de desempenho (8) são:

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} 0,17 & 0,03 \\ 0,03 & 0,09 \end{bmatrix},$$

$\mathcal{P}(N) = I_6$ e $\mathcal{Q} = \text{diag}(\mathcal{Q})$ sendo $\mathcal{Q}_2 = 0,01I_2$,

$$\mathcal{Q}_1 = \begin{bmatrix} 0,02 & 0,01 \\ 0,01 & 0,01 \end{bmatrix} \text{ e } \mathcal{Q}_3 = \begin{bmatrix} 0,17 & -0,04 \\ -0,04 & 0,01 \end{bmatrix}.$$

Algoritmo 1: *Regulador Linear Quadrático Recursivo*

Modelo: Defina os parâmetros do SLPM: nominais ($\alpha_i = 1, \forall i \in \mathcal{S}$) ou incertos ($0 \leq \alpha < 1, \forall i \in \mathcal{S}$).

Condições Iniciais:

- Defina os valores para $\mu > 0$, N , Θ , x_0 e $\mathcal{P}(N) \succ 0$.
- Escolha os valores de $\bar{\Delta}_{i,k}$, $i \in \mathcal{S}$, e obtenha π_0 .
- Calcule $q_{i,0} = \pi_{i,0}x_0$ e π_{∞}^{δ} .

Passo 1: Calcule para todo $k = N - 1, \dots, 0$:

$$\mathcal{L}_{\mu}(k), \mathcal{K}_{\mu}(k) \text{ e } \mathcal{P}_{\mu}(k) \text{ conforme (9).}$$

Passo 2: Calcule para todo $k = 0, \dots, N - 1$:

$$\begin{bmatrix} q_{k+1,\mu}^* \\ u_{k,\mu}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{L}_{\mu}(k) \\ \mathcal{K}_{\mu}(k) \end{bmatrix} q_{k,\mu}^* \text{ e}$$

$$x_{k+1} = F_{\theta_k}x_k + G_{\theta_k}u_{k,\mu}^*.$$

O Algoritmo 1 foi implementado no software *MATLAB*[®] com os seguintes parâmetros:

$$\mu = 10^{11}, \hat{\lambda} = 1,5\mu, x_0 = [-0,2 \quad 0,8]^T$$

$$\pi_0 = [0,18 \quad 0,30 \quad 0,52]$$

de acordo com os seguintes casos:

• **Caso I:** A MT é completamente conhecida e dada por:

$$\mathbb{P}^{\delta} = \mathbb{P} = \begin{bmatrix} 0,2 & 0,8 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0,5 \\ 0 & 0,3 & 0,7 \end{bmatrix}$$

e o ganho de realimentação obtido para o sistema de primeiro momento (5) é dado por $\mathcal{K}^* = [\mathcal{K}_1^* \quad \mathcal{K}_2^*]$ sendo

$$\mathcal{K}_1^* = \begin{bmatrix} -0,0191 & -0,0020 & -0,0217 \\ -0,0582 & 0,0172 & -0,1181 \end{bmatrix} \text{ e}$$

$$\mathcal{K}_2^* = \begin{bmatrix} -0,0005 & -0,0057 & -0,0035 \\ 0,0167 & -0,0314 & 0,0323 \end{bmatrix}.$$

A Figura 2 ilustra a estimativa de $\mathcal{E}\{\|x_k\|\}$ e de $\mathcal{E}\{\|q_k\|\}$, obtidas por meio de simulações de Monte Carlo baseadas em 10.000 realizações e considerando $N = 150$.

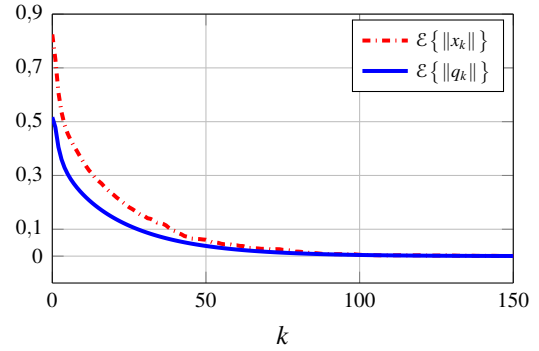


Figura 2: Estimativa de $\mathcal{E}\{\|x_k\|\}$ e de $\mathcal{E}\{\|q_k\|\}$ para o Caso I.

• **Caso II:** A MT é desconhecida, mas as probabilidades podem variar entre dois limitantes conhecidos da seguinte forma:

$$\mathbb{P}^{\delta} = [\mathbb{P} + \delta\mathbb{P}]$$

sendo

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 0,15 & 0,75 & 0 \\ 0 & 0,45 & 0,45 \\ 0 & 0,25 & 0,65 \end{bmatrix} \text{ e } \delta\mathbb{P} = 0,2 \begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} & 0 \\ 0 & \Delta_{22} & \Delta_{23} \\ 0 & \Delta_{32} & \Delta_{33} \end{bmatrix}$$

$$\text{com } 0 \leq \Delta_{11}, \Delta_{22}, \Delta_{32} \leq 0,5, \Delta_{12} = 0,5 - \Delta_{11},$$

$$\Delta_{23} = 0,5 - \Delta_{22} \text{ e } \Delta_{33} = 0,5 - \Delta_{32}.$$

Assumimos os seguintes valores para as matrizes $H_{\mathbb{P}}$ e $E_{\mathbb{P}}$ definidas em (7)

$$h_{ij} = 0,4 \text{ e } e_{ij} = 0,5 \quad \forall i, j = 1, 2, 3$$

$$\text{exceto } h_{13} = h_{21} = h_{31} = e_{13} = e_{21} = e_{31} = 0.$$

Na implementação do Algoritmo 1 para o Caso II, consideramos $\pi_k^{\delta} = \pi_{\infty}^{\delta}$ para todo $k \geq 0$ sendo que as distribuições estáveis foram determinadas pelo Método Hi-Lo (Hartfiel, 1998) e modeladas como limitantes em norma da seguinte forma:

$$\pi_{\infty}^{\delta} = [0 \quad 0,3125 + 0,25\bar{\Delta}_{2,\infty} \quad 0,5625 + 0,25\bar{\Delta}_{3,\infty}]$$

com $0 \leq \bar{\Delta}_{2,\infty} \leq 0,5$ e $\bar{\Delta}_{3,\infty} = 1 - \bar{\Delta}_{2,\infty}$. Assumimos os seguintes valores para os parâmetros de $\delta\pi_{\infty}$

$$m_{1,\infty} = n_{1,\infty} = 0$$

$$\text{e } m_{i,\infty} = n_{i,\infty} = 0,5 \quad \forall i = 2, 3.$$

A Figura 3 apresenta a estimativa de $\mathcal{E}\{\|x_k\|\}$ e de $\mathcal{E}\{\|q_k\|\}$, obtidas por meio de simulações de Monte Carlo baseadas em 10.000 realizações e considerando $N = 200$. Para cada simulação, foram definidos valores para Δ_{11} , Δ_{22} e Δ_{32} a fim de obter uma MT conhecida e, consequentemente, uma realização da cadeia de Markov.

O ganho de realimentação obtido para o sistema de primeiro momento (6) é dado por: $\mathcal{K}^* = [\mathcal{K}_1^* \quad \mathcal{K}_2^*]$ com

$$\mathcal{K}_1^* = \begin{bmatrix} -0,3022 & -0,1549 & -0,3208 \\ -0,1988 & 0,2658 & 0,0718 \end{bmatrix} \text{ e}$$

$$\mathcal{K}_2^* = \begin{bmatrix} -0,1776 & -0,1303 & -0,5634 \\ 0,3471 & 0,1634 & 1,0766 \end{bmatrix}.$$

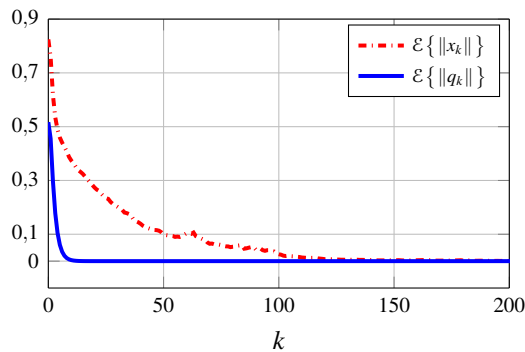


Figura 3: Estimativa de $E\{\|x_k\|\}$ e de $E\{\|q_k\|\}$ para o Caso II.

6 Conclusões

Neste artigo propomos uma abordagem na qual os SLSM sem a observação da cadeia de Markov são reformulados como SLPM. Assumimos que a matriz de transição pode ser afetada por algum tipo de incerteza modelada por limitantes em norma. A lei de controle é obtida por um regulador linear quadrático recursivo baseado na combinação dos métodos de funções penalidade e mínimos quadrados ponderados, similar ao método proposto por Cerri (2009). Este regulador determina uma sequência de ganhos para os SLPM que também pode ser uma solução para os SLSM. Um exemplo numérico ilustra a validade e a qualidade do modelo proposto, visto que as soluções encontradas estabilizam o sistema. A comparação com os métodos convencionais e a extensão para os SLSM sujeitos a incertezas na equação de espaço de estados são sugestões para trabalhos futuros.

Agradecimentos

Este trabalho foi realizado com o apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES).

Referências

- Bortolin, D. C. e Terra, M. H. (2015). Recursive robust regulator for Markovian jump linear systems subject to uncertain transition probabilities, *Control Conference (ECC), 2015 European*, pp. 3215–3219.
- Boukas, E. K. (2009). H_∞ control of discrete-time Markov jump systems with bounded transition probabilities, *Optimal Control Applications and Methods* **30**(5): 477–494.
- Boukas, E. K. e Liu, Z. K. (2001). Robust H_∞ control of discrete-time Markovian jump linear systems with mode-dependent time-delays, *IEEE Transactions on Automatic Control* **46**(12): 1918–1924.

- Cerri, J. P. (2009). *Regulador robusto recursivo para sistemas lineares de tempo discreto no espaço de estados*, Dissertação (mestrado), Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, S.P.
- Costa, O., Val, J. D. e Geromel, J. (1997). A convex programming approach to H_2 control of discrete-time Markovian jump linear systems, *International Journal of Control* **66**(4): 557–580.
- do Val, J. e Başar, T. (1999). Receding horizon control of jump linear systems and a macroeconomic policy problem, *Journal of Economic Dynamics and Control* **23**(8): 1099–1131.
- do Val, J., Geromel, J. e Gonçalves, A. (2002). The H_2 -control for jump linear systems: cluster observations of the Markov state, *Automatica* **38**(2): 343 – 349.
- Hartfiel, D. (1998). *Markov Set-Chains. Lecture Notes in Mathematics 1695*, Springer.
- Luan, X., Zhao, S. e Liu, F. (2013). H_∞ control for discrete-time Markov jump systems with uncertain transition probabilities, *IEEE Transactions on Automatic Control* **58**(6): 1566–1572.
- Luenberger, D. G. e Ye, Y. (2008). *Linear and Nonlinear Programming*, 3 edn, Springer, New York.
- Nilim, A. e El Ghaoui, L. (2005). Robust control of Markov decision processes with uncertain transition matrices, *Oper. Res.* **53**(5): 780–798.
- Samuels, C. L. (2001). *Markov set-chains as models of plant succession*, PhD thesis, University of Tennessee.
- Souza, C. E. (2005). Mode-independent H_∞ control of discrete-time Markovian jump linear systems, *Proceedings of the 16th IFAC World Congress, 2005*.
- Wan, X., Xu, L., Fang, H. e Ling, G. (2015). Robust non-fragile H_∞ state estimation for discrete-time genetic regulatory networks with Markov jump delays and uncertain transition probabilities, *Neurocomputing* **154**: 162 – 173.