

MODELAGEM DE AERONAVES MODERADAMENTE FLEXÍVEIS EMPREGANDO TEORIA DAS FAIXAS NÃO-ESTACIONÁRIA

RAFAEL MENDES BERTOLIN*, FLÁVIO JOSÉ SILVESTRE*, ANTÔNIO BERNARDO GUIMARÃES NETO*,
PEDRO JOSE GONZALEZ RAMIREZ*, THIAGO DE SOUZA SIQUEIRA VERSIANI*, GEFERSON CLEUBER
SILVA*

**Laboratório de Novos Conceitos em Aeronáutica
Divisão de Engenharia Aeronáutica
Instituto Tecnológico de Aeronáutica
São José dos Campos, São Paulo, Brasil*

Emails: rafaelmbufs@gmail.com, flaviojs@ita.br, antoniobgn@gmail.com,
pedrojgonzalezr@gmail.com, versiani.t@gmail.com, geffersonports@hotmail.com

Abstract— In this paper the flight dynamics of a flexible virtual transport aircraft is modelled applying an inertially uncoupled formulation which makes use of the mean axes and employs an unsteady aerodynamic approach in the time domain in conjunction with the strip theory.

Keywords— flexible aircraft; strip theory; unsteady aerodynamic; flight dynamics.

Resumo— Neste trabalho uma formulação inercialmente desacoplada, que faz uso do referencial dos eixos médios e emprega uma abordagem aerodinâmica não-estacionária no domínio do tempo em conjunto com a teoria das faixas, é utilizada para modelar a dinâmica do voo de uma aeronave moderadamente flexível. A metodologia é aplicada para uma aeronave conceitual com flexibilidade variável.

Palavras-chave— aeronaves flexíveis; teoria das faixas; aerodinâmica não-estacionária; dinâmica do voo.

Nomenclatura

c_j	=	corda média aerodinâmica, m	$\mathbf{M}_{A_{res}}$	=	momentos aerodinâmicos resultantes
$C_{l_{\alpha_j}}$	=	coeficiente de sustentação local	$\mathbf{M}^{ext}$	=	vetor de momentos externos, N.m
$\mathbf{F}_A^{(NC)}$	=	forças aerodinâmicas não-circulatórias e circulatórias	$\mathbf{M}_T$	=	momento propulsivo resultante, N.m
$\mathbf{F}_A^{(C)}$	=	forças aerodinâmicas incrementais devido às deformações elásticas, N	$\mathcal{O}_{A^{(G)}}$	=	referencial aerodinâmico global
$\mathbf{F}_{A_{flex}}$	=	forças aerodinâmicas incrementais devido às deformações elásticas, N	$\mathcal{O}_{A^{(L)}}$	=	referencial aerodinâmico local
$\mathbf{F}_{ARB}$	=	forças aerodinâmicas devido ao movimento de corpo rígido, N	$\mathcal{O}_{B^{(G)}}$	=	referencial global do corpo
$\mathbf{F}_{A_{res}}$	=	forças aerodinâmicas resultantes	$\mathcal{O}_{B^{(L)}}$	=	referencial local do corpo
$\mathbf{F}^{ext}$	=	vetor de forças externas, N	$\mathcal{O}_I$	=	referencial inercial
$\mathbf{F}_T$	=	força de tração resultante, N	$\mathbf{p}$	=	posição do elemento de massa em relação ao centro de gravidade, m
$\mathbf{G}$	=	aceleração da gravidade, m/s ²	$\mathbf{p}_d$	=	deslocamento elástico do elemento de massa, m
$\mathbf{J}$	=	tensor de inércia, kg.m ²	$\mathbf{p}_r$	=	posição do elemento de massa na estrutura não deformada em relação ao centro de gravidade, m
$l^{(NC)}$	=	sustentações não-circulatória e circulatória por unidade de comprimento, N/m	$\mathbf{Q}_\eta$	=	vetor de carregamentos generalizados, N.m
$l^{(C)}$	=	sustentações não-circulatória e circulatória por unidade de comprimento, N/m	$Q_{\eta_k}^{(NC)}$	=	vetores dos carregamentos generalizados não-circulatórios e circulatórios, N.m
m	=	massa, kg	$Q_{\eta_k}^{(C)}$	=	forças generalizadas incrementais, N.m
$m^{(NC)}$	=	momentos de arfagem não-circulatório e circulatório por unidade de comprimento, N.m/m	$\mathbf{Q}_{\eta_{flex}}$	=	forças generalizadas de corpo rígido, N.m
$m^{(C)}$	=	momentos de arfagem não-circulatório e circulatório por unidade de comprimento, N.m/m	$\mathbf{Q}_{\eta_{RB}}$	=	forças generalizadas de corpo rígido, N.m
$\mathbf{M}_A^{(NC)}$	=	momentos aerodinâmicos não-circulatórios e circulatórios	$\mathbf{R}$	=	posição do elemento de massa em relação à $\mathcal{O}_I$, m
$\mathbf{M}_A^{(C)}$	=	momentos aerodinâmicos incrementais devido às deformações elásticas, N.m	$\mathbf{R}_0$	=	posição do centro de gravidade em relação à $\mathcal{O}_I$, m
$\mathbf{M}_{A_{flex}}$	=	momentos aerodinâmicos incrementais devido às deformações elásticas, N.m	$\mathbf{T}_{B^{(G)}A^{(G)}}$	=	matriz de transformação de $\mathcal{O}_{A^{(G)}}$ para $\mathcal{O}_{B^{(G)}}$
$\mathbf{M}_{ARB}$	=	momentos aerodinâmicos devido ao movimento de corpo rígido, N.m			

$\mathbf{T}_{\mathbf{B}^{(L)}\mathbf{A}^{(L)}}$	= matriz de transformação de $\mathcal{O}_{A^{(L)}}$ para $\mathcal{O}_{B^{(L)}}$
$\mathbf{T}_{\mathbf{B}^{(G)}\mathbf{B}^{(L)}}$	= matriz de transformação de $\mathcal{O}_{B^{(L)}}$ para $\mathcal{O}_{B^{(G)}}$
$\mathbf{T}_{\mathbf{B}^{(G)}\mathbf{I}}$	= matriz de transformação de $\mathcal{O}_I$ para $\mathcal{O}_{B^{(G)}}$
$\mathbf{T}_{\mathbf{B}^{(G)}\mathbf{T}}$	= matriz de transformação do referencial propulsivo para $\mathcal{O}_{B^{(G)}}$
$\mathbf{V}$	= vetor velocidade linear, m/s
$w_{3/4}^f$	= <i>downwash</i> induzido na posição de 3/4 da corda
$x_{1/2j},$ $x_{EA_j},$ x_{AC_j}	= posições em $x_{B^{(L)}}$ do ponto médio da corda, do eixo elástico e do centro aerodinâmico, m
ζ	= matriz diagonal dos amortecimentos estruturais
η	= vetor de amplitudes modais
$\lambda_{1j}(t),$ $\lambda_{2j}(t)$	= estados de atraso aerodinâmico da j -ésima faixa
Λ	= ângulo de diedro, rad
μ	= matriz diagonal das massas modais, kg.m ²
ρ	= densidade do ar, kg/m ³
Φ	= matriz de formas modais, m
ω	= vetor velocidade angular, rad/s
ω_n	= matriz diagonal das frequências naturais não-amortecidas, rad/s

1 Introdução

A mecânica do voo pode ser definida, segundo Guimarães Neto (2014), como um ramo da Mecânica Aplicada e da Astronáutica que estuda as forças que atuam em uma aeronave em voo e como a aeronave responde quando submetida a tais forças, principalmente em termos de desempenho, estabilidade e controle. Tradicionalmente, do ponto de vista da mecânica do voo, nenhuma influência da dinâmica estrutural durante o voo é levada em consideração, configurando assim a chamada aproximação de corpo rígido.

Entretanto nos últimos anos uma mudança nesse tratamento tradicional tem ocorrido, no sentido de que fenômenos aeroelásticos decorrentes da dinâmica estrutural, até então tratados como uma área do conhecimento à parte denominada de Aeroelasticidade, vêm sendo integrados aos modelos e o acoplamento destes fenômenos com o movimento de corpo rígido das aeronaves tem sido objeto de estudo, dando origem ao termo *aeronaves flexíveis*.

Muitos são os motivos que podem ser apontados como os responsáveis pelo surgimento dessa nova classe de aeronaves, denominada de flexíveis. Temas tais como redução de poluentes, gestão de resíduos, sustentabilidade e uso eficiente e ecológico de energia fizeram com que novas abordagens de projetos de engenharia emergissem. Na indústria aeronáutica isso se traduziu na utilização de

novos materiais, mais resistentes e de baixas densidades, na introdução de critérios apertados de projeto estrutural e na busca de uma maior eficiência aerodinâmica. Acontece que todos esses fatores têm conferido uma menor rigidez às aeronaves e um inevitável aumento da flexibilidade estrutural. O aumento da flexibilidade pode levar a acoplamentos dinâmicos indesejáveis e potencialmente perigosos, criando assim uma variedade de desafios a serem superados. Diante desse contexto, é notória a importância de se buscar metodologias para o desenvolvimento de modelos integrados que descrevam a dinâmica completa de aeronaves flexíveis.

Ao longo dos últimos anos várias formulações matemáticas têm sido propostas, com diferentes graus de complexidades dependendo dos níveis de flexibilidade considerados. Segundo Silvestre and Luckner (2015) uma aeronave pode ser caracterizada como moderadamente ou muito flexível. No primeiro caso enquadram-se aeronaves cujos deslocamentos estruturais podem ser descritos por meio de equações lineares, ao passo que no segundo caso estão aeronaves sujeitas a grandes deformações elásticas, violando assim as premissas da teoria linear.

Este trabalho tem como objetivo utilizar da abordagem apresentada por Silvestre and Luckner (2015), baseada na formulação dinâmica proposta por Waszak and Schmidt (1988), para modelar e simular a dinâmica de voo de uma aeronave flexível. Trata-se de uma formulação idealizada para aeronaves pouco ou moderadamente flexíveis, deduzida a partir da mecânica Lagrangeana, adotando-se como referencial do corpo o sistema de coordenadas dos eixos médios (EM) e representando os deslocamentos estruturais por meio da superposição modal, garantindo assim que o acoplamento entre a dinâmica de corpo rígido e a dinâmica estrutural seja exclusivamente de caráter aerodinâmico. Já o carregamento aerodinâmico incremental devido à vibração é obtido por meio de uma formulação não-estacionária no domínio do tempo em conjunto com a teoria das faixas.

A metodologia é aplicada para o modelo de uma aeronave conceitual genérica de flexibilidade variável, da categoria *narrow-body*, designada GNBA (do inglês *Generic Narrow-Body Airliner*) e desenvolvida por Guimarães Neto (2014). Três configurações com diferentes níveis de flexibilidade estrutural foram consideradas.

2 Dinâmica do Voo de uma Aeronave Moderadamente Flexível

2.1 Equações de Movimento

Considere na Figura 1 o elemento de massa dm . O vetor $\mathbf{p}$ corresponde à posição deste elemento em relação ao centro de gravidade (CG) da aero-

nave, enquanto $\mathbf{R}$ trata-se da posição de dm porém agora em relação à origem do referencial inercial ($\mathcal{O}_I$). Já a posição do CG da aeronave em relação a $\mathcal{O}_I$ é dada pelo vetor $\mathbf{R}_0$. $\mathcal{O}_{B(G)}$ é definido como a origem do referencial global do corpo da aeronave não deformada. $\mathbf{p}_r$ por sua vez expressa a posição de dm na estrutura não deformada da aeronave, em relação ao CG. $\mathbf{p}_d$ é o vetor de des-

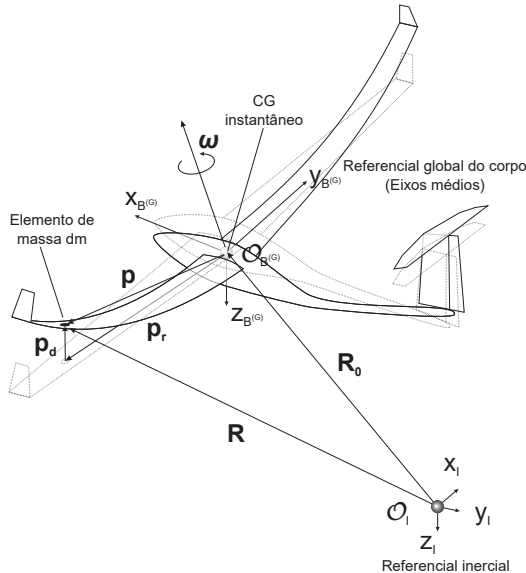


Figura 1: Referenciais inercial e dos eixos médios em uma aeronave flexível em voo. Fonte: (Silvestre and Luckner, 2015)

locamento elástico do elemento de massa, que na base modal é escrito da seguinte maneira:

$$\mathbf{p}_d|_{B(G)}(x, y, z, t) = \Phi(x, y, z)\boldsymbol{\eta}(t) \quad (1)$$

onde $\Phi_{3 \times n_e}$ é a forma modal considerando-se n_e modos elásticos obtidos a partir de um problema de vibração livre não-amortecida e $\boldsymbol{\eta}_{n_e \times 1}$ é o vetor de amplitudes modais. O símbolo $|_{\bullet}$ denota o referencial no qual o vetor é expresso.

A primeira questão a ser considerada na dedução das equações de movimento (EoM) de uma aeronave flexível trata-se da escolha adequada de um sistema de coordenadas do corpo. Para pequenas deformações uma abordagem bastante empregada trata-se do trabalho de Waszak and Schmidt (1988) que faz o emprego do chamado referencial dos EM.

Os EM são definidos, segundo Silvestre (2013), como um sistemas de coordenadas flutuante onde os momentos linear e angular causados pelas deformações estruturais se anulam. Isso implica que:

$$\int_V \frac{\delta \mathbf{p}}{\delta t} dm = \mathbf{0} \text{ (momento linear)} \quad (2)$$

$$\int_V \mathbf{p} \times \frac{\delta \mathbf{p}}{\delta t} dm = \mathbf{0} \text{ (momento angular)} \quad (3)$$

sendo $\frac{\delta(\bullet)}{\delta t}$ a derivada temporal medida em relação aos EM e $\int_V \bullet$ a integral sobre o volume.

Acontece que as restrições impostas pelas equações (2) e (3) não são tão práticas de serem aplicadas (Waszak and Schmidt, 1988). Contudo Canavin and Likins (1977) demonstram que assumindo-se pequenos deslocamentos elásticos e representando estes por meio da superposição modal, tem-se que:

$$\frac{\delta_C}{\delta_C t} \int_V \mathbf{p}_d dm = \mathbf{0} \quad (4)$$

$$\frac{\delta_C}{\delta_C t} \int_V \mathbf{p}_r \times \mathbf{p}_d dm = \mathbf{0} \quad (5)$$

onde $\frac{\delta_C(\bullet)}{\delta_C t}$ denota a derivada temporal medida em relação a um ponto C arbitrário fixo na aeronave não deformada.

As equações (4) e (5) são conhecidas como restrições práticas e por meio delas pode-se inferir que os EM serão necessariamente coincidentes com o referencial global do corpo e as formas modais elásticas serão ortogonais em relação aos modos de corpo rígido, garantindo assim o completo desacoplamento inercial do sistema.

Sendo assim, derivando as equações de movimento em relação em relação $\mathcal{O}_{B(G)}$ por meio da mecânica Lagrangeana, e aplicando restrições impostas pelas equações (2) e (3), a expressão da energia cinética da aeronave será simplificada e nenhum termo de acoplamento inercial aparecerá. O sistema de equações então é dado por:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{V}}|_{B(G)} &= -\boldsymbol{\omega}|_{B(G)} \times \mathbf{V}|_{B(G)} \\ &+ \mathbf{T}_{B(G)I} \mathbf{G}|_I + \frac{1}{m} \mathbf{F}^{ext}|_{B(G)} \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\omega}}|_{B(G)} &= -\mathbf{J}^{-1}(\boldsymbol{\omega}|_{B(G)} \times (\mathbf{J} \boldsymbol{\omega}|_{B(G)})) \\ &+ \mathbf{J}^{-1} \mathbf{M}^{ext}|_{B(G)} \end{aligned} \quad (7)$$

$$\ddot{\boldsymbol{\eta}} = -2\boldsymbol{\zeta} \boldsymbol{\omega}_n \dot{\boldsymbol{\eta}} - \boldsymbol{\omega}_n^2 \boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\mu}^{-1} \mathbf{Q}_{\boldsymbol{\eta}} \quad (8)$$

onde $\mathbf{V}|_{B(G)}$ e $\boldsymbol{\omega}|_{B(G)}$ são as velocidades linear e angular de $\mathcal{O}_{B(G)}$ em relação a $\mathcal{O}_I$; $\mathbf{T}_{B(G)I}$ é a matriz de transformação de $\mathcal{O}_I$ para $\mathcal{O}_{B(G)}$; m é a massa da aeronave; $\mathbf{J}$ é o tensor de inércia em relação a $\mathcal{O}_{B(G)}$, assumido constante no contexto de pequenas deformações; $\mathbf{G}|_I$ trata-se da aceleração da gravidade; $\mathbf{F}^{ext}|_{B(G)}$ e $\mathbf{M}^{ext}|_{B(G)}$ as resultantes de forças e momentos externos; $\boldsymbol{\mu}$ e $\boldsymbol{\omega}_n$ são matrizes diagonais contendo as n_e massas modais μ_i e frequências naturais não-amortecidas ω_{n_i} ; $\boldsymbol{\zeta}$, assumida conservadoramente diagonal, corresponde à matriz dos n_e amortecimentos estruturais ζ_i ; e, por fim, $\mathbf{Q}_{\boldsymbol{\eta}}$ é o vetor dos n_e carregamentos generalizados Q_{η_i} .

As duas primeiras equações vetoriais são bastante conhecidas da dinâmica do voo clássica e correspondem à dinâmica de corpo rígido da aeronave. Já a terceira equação vetorial representa

a dinâmica aeroelástica em coordenadas modais. Nestas equações o acoplamento entre as dinâmicas aeroelástica e de corpo rígido ocorre exclusivamente por meio de $\mathbf{F}^{ext}$, $\mathbf{M}^{ext}$ e $\mathbf{Q}_\eta$. Neste trabalho, apenas acoplamentos de caráter aerodinâmicos serão considerados, de modo que:

$$\mathbf{F}^{ext}|_{B(G)} = \mathbf{T}_{B(G)} \mathbf{T} \mathbf{F}_T + \mathbf{F}_{A_{res}}|_{B(G)} \quad (9)$$

$$\mathbf{M}^{ext}|_{B(G)} = \mathbf{M}_T|_{B(G)} + \mathbf{M}_{A_{res}}|_{B(G)} \quad (10)$$

onde $\mathbf{F}_T$ é a força de tração resultante expressa no referencial propulsivo, $\mathbf{T}_{B(G)} \mathbf{T}$ é a matriz de transformação do referencial propulsivo para $\mathcal{O}_{B(G)}$, $\mathbf{M}_T|_{B(G)}$ é o momento propulsivo resultante e $\mathbf{F}_{A_{res}}|_{B(G)}$ e $\mathbf{M}_{A_{res}}|_{B(G)}$ são, respectivamente, as resultantes das forças e momentos aerodinâmicos. As expressões da força e do momento propulsivos são bastante conhecidas da literatura clássica sobre dinâmica do voo e portanto serão aqui omitidas. Já as forças e os momentos aerodinâmicos resultantes merecem, neste caso, uma atenção especial.

No estudo do movimento de aeronaves flexíveis ocorre uma interação mútua entre as dinâmicas de corpo rígido e aeroelástica muito bem ilustrada pela Figura 2. Observa-se que o carregamento aerodinâmico resultante é composto por uma parcela decorrente do movimento de corpo rígido da aeronave e uma parcela incremental devido à deformação estrutural. Assim:

$$\mathbf{F}_{A_{res}}|_{B(G)} = \mathbf{T}_{B(G)} \mathbf{A}_{(G)} \mathbf{F}_{A_{RB}}|_{A(G)} + \mathbf{F}_{A_{flex}}|_{B(G)} \quad (11)$$

$$\mathbf{M}_{A_{res}}|_{B(G)} = \mathbf{M}_{A_{RB}}|_{B(G)} + \mathbf{M}_{A_{flex}}|_{B(G)} \quad (12)$$

onde $\mathbf{T}_{B(G)} \mathbf{A}_{(G)}$ é a matriz de transformação do referencial aerodinâmico global ($\mathcal{O}_{A(G)}$) para $\mathcal{O}_{B(G)}$, $\mathbf{F}_{A_{RB}}|_{A(G)}$ e $\mathbf{M}_{A_{RB}}|_{B(G)}$ as parcelas referentes ao movimento de corpo rígido e $\mathbf{F}_{A_{flex}}|_{B(G)}$ e $\mathbf{M}_{A_{flex}}|_{B(G)}$ a parcela incremental devido as deformações elásticas.

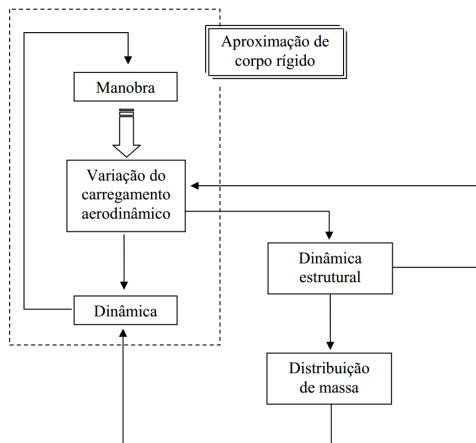


Figura 2: Interação mútua entre as dinâmicas de corpo rígido e aeroelástica. Fonte: (Silvestre, 2007)

O mesmo raciocínio é válido também para as expressões das forças generalizadas:

$$\mathbf{Q}_\eta = \mathbf{Q}_{\eta_{RB}} + \mathbf{Q}_{\eta_{flex}} \quad (13)$$

$\mathbf{F}_{A_{RB}}|_{A(G)}$, $\mathbf{M}_{A_{RB}}|_{B(G)}$ e $\mathbf{Q}_{\eta_{RB}}$ também são conhecidos da literatura e são definidos em termos de coeficientes adimensionais, pressão dinâmica, superfícies de referência e comprimentos característicos (para o caso das forças generalizadas e dos momentos). Já a dedução de $\mathbf{F}_{A_{flex}}$, $\mathbf{M}_{A_{flex}}$ e $\mathbf{Q}_{\eta_{flex}}$ será descrita a seguir.

2.2 Carregamento Incremental devido à Dinâmica Estrutural

Neste trabalho os carregamentos incrementais serão computados por meio da teoria das faixas juntamente com uma abordagem aerodinâmica não-estacionária obtida a partir da teoria de Theodorsen modificada por Yates para aplicação em uma asa real e formulada no domínio do tempo por meio da aproximação de Jones para a função indicial de Wagner (Silvestre, 2013).

Considere na Figura 3 uma superfície sustentadora de uma aeronave, como uma asa. Seja κ um plano que contém a corda da raiz da asa e é paralelo ao plano definido pelos eixos $x_{B(G)}$ e $y_{B(G)}$. A superfície sustentadora, por sua vez, é assumida plana e pertencente ao plano ϑ , que possui um ângulo de diedro Λ em relação ao plano κ . Um referencial local do corpo ($\mathcal{O}_{B(L)}$) é definido com sua origem centrada no bordo de fuga da corda da raiz da asa, seu eixo $x_{B(L)}$ paralelo a $x_{B(G)}$ e apontando na mesma direção, $y_{B(L)}$ apontando para a ponta da asa e situado no plano ϑ e $z_{B(L)}$ completando o sistema de coordenadas cartesianas. Observa-se ainda a j -ésima faixa da superfície sustentadora, situada em $y_{B(L)} = y_j$, com largura igual a Δy_j . Já as linhas tracejadas AC , EA e $\frac{2}{3}c(y)$, são, respectivamente, as posições ao longo da envergadura do centro aerodinâmico, do eixo elástico e do ponto situado em 3/4 da corda. A matriz de transformação de $\mathcal{O}_{B(L)}$ para $\mathcal{O}_{B(G)}$, para um ângulo de diedro Λ positivo conforme convencionado na Figura 3, é dada por:

$$\mathbf{T}_{B(G)B(L)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\Lambda) & -\sin(\Lambda) \\ 0 & \sin(\Lambda) & \cos(\Lambda) \end{bmatrix} \quad (14)$$

De maneira análoga, cada superfície sustentadora possui também um referencial aerodinâmico local ($\mathcal{O}_{A(L)}$) cuja orientação relativa a $\mathcal{O}_{B(L)}$ é expressa por meio de ângulos locais de ataque (α_L) e de derrapagem (β_L). O vetor velocidade escrito

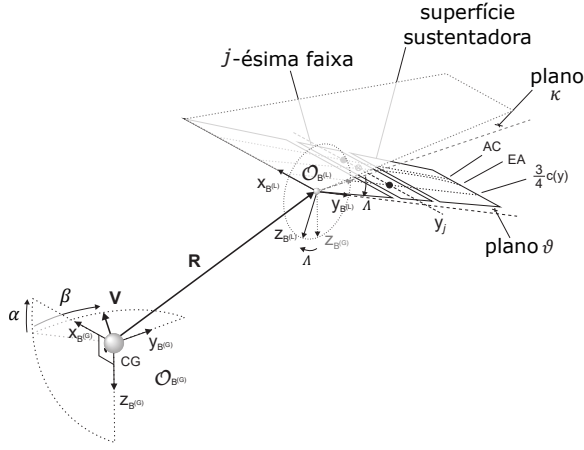


Figura 3: Sistema de referência local do corpo $\mathcal{O}_{B(L)}$ definido na raiz de uma superfície sustentadora e sistema de referência global do corpo $\mathcal{O}_{B(G)}$. Fonte: (Silvestre and Luckner, 2015)

em $\mathcal{O}_{B(L)}$ é dado então por:

$$\mathbf{V}|_{\mathbf{B}(L)} = \mathbf{T}_{\mathbf{B}(G)\mathbf{B}(L)}^T \mathbf{T}_{\mathbf{B}(G)\mathbf{A}(G)} \begin{bmatrix} V \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_L \\ v_L \\ w_L \end{bmatrix} \quad (15)$$

e portanto α_L e β_L podem ser calculados como:

$$\alpha_L = \arctan\left(\frac{w_L}{u_L}\right) \quad (16)$$

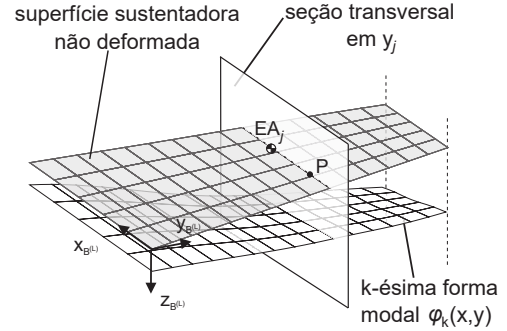
$$\beta_L = \arctan\left(\frac{v_L}{u_L}\right) \quad (17)$$

consequentemente a determinação da matriz de transformação de $\mathcal{O}_{A(L)}$ para $\mathcal{O}_{B(L)}$ ($\mathbf{T}_{\mathbf{B}(L)\mathbf{A}(L)}$) é imediata.

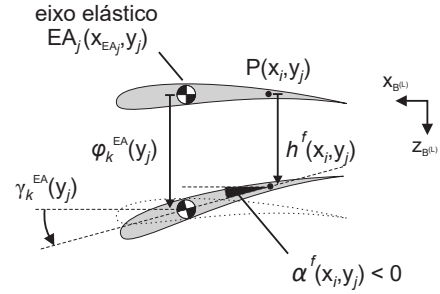
Considere agora a Figura 4 que mostra em 4a a superfície sustentadora não deformada e sua k -ésima forma modal $\varphi_k(x, y)$ como função das coordenadas de $\mathcal{O}_{B(L)}$, e em 4b a sua seção transversal na coordenada $y_{B(L)} = y_j$. Na teoria das faixas assume-se que o perfil da superfície sustentadora não sofre nenhuma deformação geométrica causada pelas deformações elásticas do corpo. Isto implica que a função $\varphi(x, y_j)$ pode ser linearizada em torno do eixo elástico, de modo que:

$$h^f(x_{EA_j}, y_j, t) = \sum_{k=1}^{n_e} \varphi_k^{EA}(y_j) \eta_k(t) = \boldsymbol{\varphi}^{EA}(y_j) \boldsymbol{\eta}(t) \quad (18)$$

$$\alpha^f(x_{EA_j}, y_j, t) = \sum_{k=1}^{n_e} -\gamma_k^{EA}(y_j) \eta_k(t) = -\boldsymbol{\gamma}^{EA}(y_j) \boldsymbol{\eta}(t) \quad (19)$$



(a) Representação da k -ésima forma modal no referencial local do corpo.



(b) Seção transversal da j -ésima faixa situada em $y_{B(L)} = y_j$

Figura 4: Aproximação da forma modal no eixo elástico por uma torção e deslocamento equivalentes. Fonte: (Silvestre and Luckner, 2015)

onde $\boldsymbol{\varphi}^{EA}(y_j)$ e $\boldsymbol{\gamma}^{EA}(y_j)$ são vetores linha de comprimento n_e , nos quais cada k -ésima coluna corresponde, respectivamente, a $\varphi_k^{EA}(y_j)$ e $\gamma_k^{EA}(y_j)$.

Para um perfil sujeito a uma oscilação elástica, as expressões não-estacionárias da força de sustentação e do momento de arfagem aerodinâmicos, por unidade de comprimento e atuantes no AC do perfil, podem ser deduzidas, segundo Silvestre (2013), por meio da teoria de Theodorsen (1949) modificada por YATES (1958) para aplicação em uma asa real, e podem ser divididas em duas partes: uma devido à porção não circulatória (NC) do escoamento, e outra devido à porção circulatória (C). Tendo isso em mente e de posse das Equações (18) e (19) tem-se que:

$$l^{(NC)}(y_j, t) = \pi \rho(t) \frac{c_j^2}{4} [\ddot{h}^f(x_{EA_j}, y_j, t) + V(t) \dot{\alpha}^f(x_{EA_j}, y_j, t) - (x_{1/2_j} - x_{EA_j}) \ddot{\alpha}^f(x_{EA_j}, y_j, t)] \quad (20)$$

$$m^{(NC)}(y_j, t) = \pi \rho(t) \frac{c_j^2}{4} \left\{ V(t) \dot{h}^f(x_{EA_j}, y_j, t) + (x_{1/2_j} - x_{EA_j}) \ddot{h}^f(x_{EA_j}, y_j, t) + V^2(t) \alpha^f(x_{EA_j}, y_j, t) - \left[\frac{c_j^2}{32} + (x_{1/2_j} - x_{EA_j})^2 \right] \ddot{\alpha}(x_{EA_j}, y_j, t) \right\} \quad (21)$$

$$l^{(C)}(y_j, t) = \frac{1}{2}\rho(t)V(t)c_j C_{l_{\alpha_j}} [w_{3/4}^f(y_j, t) + \lambda_{1_j}(t) + \lambda_{2_j}(t)] \quad (22)$$

$$m^{(C)}(y_j, t) = -\pi\rho(t)V(t)\left(\frac{c_j}{2}\right)^2 w_{3/4}^f(y_j, t) + (x_{AC_j} - x_{EA_j})l^{(C)} \quad (23)$$

onde $\rho(t)$ é a densidade do ar, $V(t)$ é a velocidade do escoamento, $x_{1/2_j}$, x_{EA_j} e x_{AC_j} são, respectivamente, as posições em $x_{B(L)}$ do ponto médio da corda, do eixo elástico e do centro aerodinâmico, c_j e $C_{l_{\alpha_j}}$ correspondem à corda média aerodinâmica e ao coeficiente de sustentação local e por fim $w_{3/4}^f(y_j, t)$ trata-se do *downwash* induzido pelas oscilações elásticas na posição de 3/4 da corda, todos relativos à j -ésima faixa. Já os estados de atraso aerodinâmico $\lambda_{1_j}(t)$ e $\lambda_{2_j}(t)$ da j -ésima faixa são deduzidos a partir da aproximação de Jones para a função de Wagner (Silvestre, 2013), sendo calculados por meio de:

$$\dot{\lambda}_{1_j} = -0.041\frac{2V}{c_j}\lambda_{1_j}(t) - 0.165\dot{w}_{3/4}^f(y_j, t) \quad (24)$$

$$\dot{\lambda}_{2_j} = -0.32\frac{2V}{c_j}\lambda_{2_j}(t) - 0.335\dot{w}_{3/4}^f(y_j, t) \quad (25)$$

Com isso, e sabendo-se que cada faixa da superfície sustentadora pode ser tratada como um perfil, as forças e os momentos dados pelas Equações (20) a (23), multiplicados por Δy_j , transformados para $O_{B(G)}$ por meio das matrizes descritas no início desta seção e somados para todas as faixas da superfície sustentadora resultam nas forças e nos momentos aerodinâmicos incrementais:

$$\mathbf{F}_{\mathbf{A}}^{(\text{NC})}\Big|_{B(G)}(t) = \rho(t)\mathbf{F}_{\mathbf{A}_{\dot{\eta}}}^{(\text{NC})}(t)\ddot{\eta}(t) + \rho(t)V(t)\mathbf{F}_{\mathbf{A}_{\dot{\eta}}}^{(\text{NC})}(t)\dot{\eta}(t) \quad (26)$$

$$\mathbf{M}_{\mathbf{A}}^{(\text{NC})}\Big|_{B(G)}(t) = \rho(t)\mathbf{M}_{\mathbf{A}_{\dot{\eta}}}^{(\text{NC})}(t)\ddot{\eta}(t) + \rho(t)V(t)\mathbf{M}_{\mathbf{A}_{\dot{\eta}}}^{(\text{NC})}(t)\dot{\eta}(t) + \rho(t)V^2(t)\mathbf{M}_{\mathbf{A}_{\eta}}^{(\text{NC})}(t)\eta(t) \quad (27)$$

$$\mathbf{F}_{\mathbf{A}}^{(C)}\Big|_{B(G)}(t) = \rho(t)V(t)\mathbf{F}_{\mathbf{A}_{\dot{\eta}}}^{(C)}(t)\dot{\eta}(t) + \rho(t)V^2(t)\mathbf{F}_{\mathbf{A}_{\eta}}^{(C)}(t)\eta(t) + \rho(t)V(t)\mathbf{F}_{\mathbf{A}_{\lambda}}^{(C)}(t)(\lambda_1(t) + \lambda_2(t)) \quad (28)$$

$$\mathbf{M}_{\mathbf{A}}^{(C)}\Big|_{B(G)}(t) = \rho(t)V(t)\mathbf{M}_{\mathbf{A}_{\dot{\eta}}}^{(C)}(t)\dot{\eta}(t) + \rho(t)V^2(t)\mathbf{M}_{\mathbf{A}_{\eta}}^{(C)}(t)\eta(t) + \rho(t)V(t)\mathbf{M}_{\mathbf{A}_{\lambda}}^{(C)}(t)(\lambda_1(t) + \lambda_2(t)) \quad (29)$$

onde $\lambda_1(t)$ e $\lambda_2(t)$ são vetores contendo os n_s (número de faixas) estados de atraso aerodinâmico λ_{1_j} e λ_{2_j} . $\mathbf{F}_{\mathbf{A}_{\dot{\eta}}}^{(\text{NC})}$, $\mathbf{F}_{\mathbf{A}_{\dot{\eta}}}^{(\text{NC})}$, $\mathbf{F}_{\mathbf{A}_{\dot{\eta}}}^{(C)}$, $\mathbf{F}_{\mathbf{A}_{\eta}}^{(C)}$, $\mathbf{M}_{\mathbf{A}_{\dot{\eta}}}^{(\text{NC})}$, $\mathbf{M}_{\mathbf{A}_{\eta}}^{(\text{NC})}$, $\mathbf{M}_{\mathbf{A}_{\dot{\eta}}}^{(C)}$ e $\mathbf{M}_{\mathbf{A}_{\eta}}^{(C)}$ são matrizes $3 \times n_e$, enquanto que $\mathbf{F}_{\mathbf{A}_{\lambda}}^{(C)}$ e $\mathbf{M}_{\mathbf{A}_{\lambda}}^{(C)}$ são $3 \times n_s$.

Sob a hipótese de pequenos deslocamentos, e considerando-se apenas a componente $z_{B(L)}$ dos mesmos, as forças generalizadas elásticas são dadas por:

$$Q_{\eta_k}^{(NC)} = \rho(t)\mathbf{Q}_{\eta_{k\dot{\eta}}}^{(\text{NC})}(t)\ddot{\eta}(t) + \rho(t)V(t)\mathbf{Q}_{\eta_{k\dot{\eta}}}^{(\text{NC})}(t)\dot{\eta}(t) + \rho(t)V^2(t)\mathbf{Q}_{\eta_{k\eta}}^{(\text{NC})}(t)\eta(t) \quad (30)$$

$$Q_{\eta_k}^{(C)} = \rho(t)V(t)\mathbf{Q}_{\eta_{k\dot{\eta}}}^{(C)}(t)\dot{\eta}(t) + \rho(t)V^2(t)\mathbf{Q}_{\eta_{k\eta}}^{(C)}(t)\eta(t) + \rho(t)V(t)\mathbf{Q}_{\eta_{k\lambda}}^{(C)}(t)(\lambda_1(t) + \lambda_2(t)) \quad (31)$$

onde $\mathbf{Q}_{\eta_{k\dot{\eta}}}^{(\text{NC})}$, $\mathbf{Q}_{\eta_{k\dot{\eta}}}^{(\text{NC})}$, $\mathbf{Q}_{\eta_{k\eta}}^{(\text{NC})}$, $\mathbf{Q}_{\eta_{k\eta}}^{(C)}$ e $\mathbf{Q}_{\eta_{k\eta}}^{(C)}$ são vetores linhas $1 \times n_e$ e $\mathbf{Q}_{\eta_{k\lambda}}^{(C)}$ é um vetor $1 \times n_s$. Todas as matrizes de coeficientes não-estacionários descritas nas Equações (26) a (31) são dependentes da geometria, das formas modais, de propriedades aerodinâmicas das faixas, de α_L e β_L , e suas expressões completas são apresentadas por Silvestre (2013).

Assim o carregamento aerodinâmico incremental resultante é dado por:

$$\mathbf{F}_{A_{flex}} = \mathbf{F}_{\mathbf{A}}^{(\text{NC})}\Big|_{B(G)} + \mathbf{F}_{\mathbf{A}}^{(C)}\Big|_{B(G)} \quad (32)$$

$$\mathbf{M}_{A_{flex}} = \mathbf{M}_{\mathbf{A}}^{(\text{NC})}\Big|_{B(G)} + \mathbf{M}_{\mathbf{A}}^{(C)}\Big|_{B(G)} \quad (33)$$

$$\mathbf{Q}_{\eta_{flex}} = \mathbf{Q}_{\eta}^{(\text{NC})} + \mathbf{Q}_{\eta}^{(C)} \quad (34)$$

onde $\mathbf{Q}_{\eta}^{(\text{NC})}$ e $\mathbf{Q}_{\eta}^{(C)}$ são vetores coluna $n_e \times 1$ cujos elementos são, respectivamente, $Q_{\eta_k}^{(\text{NC})}$ e $Q_{\eta_k}^{(C)}$.

3 Aplicação

De posse da formulação apresentada, um modelo de simulação de voo foi implementado no ambiente MATLAB & Simulink e posteriormente aplicado para a aeronave virtual GNBA desenvolvida por Guimarães Neto (2014). Três configurações de flexibilidade foram consideradas: a Nominal e as duas configurações de maior flexibilidade, W050F050 e W025F025, sendo estas assim designadas devido ao fato de que para estes casos a rigidez da asa e da fuselagem da aeronave foram reduzidas, respectivamente, à 50% e 25% da rigidez apresentada pelo modelo Nominal.

Em um primeiro momento a aeronave foi trimada para a condição de voo reto nivelado, a uma velocidade de Mach 0.78 e altitude de 11582 m, considerando o modelo de atmosfera padrão ISA.

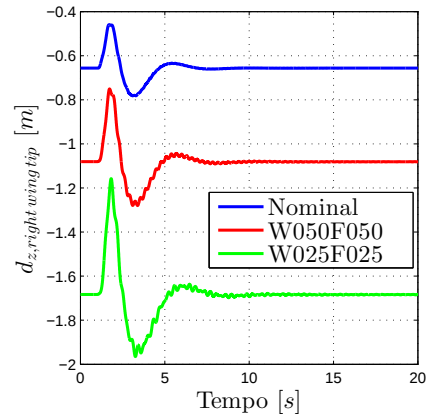
Tabela 1: Equilíbrio para o voo reto nivelado da configuração de massa DW do GNBA.

Variáveis	Casos Paramétricos		
	W025F025	W050F050	Nominal
$\alpha = \theta$ [°]	3.519	2.896	2.426
ϕ [°]	-0.011	-0.003	-0.001
F_t [N]	40159.081	35960.110	33107.991
δ_a [°]	0.183	0.047	0.020
δ_r [°]	0.007	0.001	0.000
i_h [°]	-0.235	-0.309	-0.339
$d_{z,wt}$ [m]	-1.6835	-1.0809	-0.6561
θ_{wt} [°]	-3.9184	-2.627	-1.8897
η_1 [-]	-1.844	-1.164	-0.656
η_2 [-]	0.006	0.001	0.000

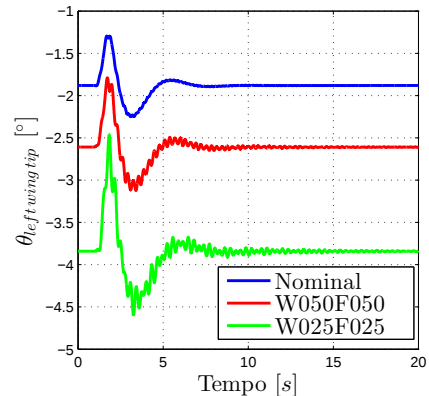
Observando a Tabela 1, percebe-se que para cada um dos casos de flexibilidade $\alpha = \theta$, resultado esperado uma vez que a aeronave foi trimada para operar com asas niveladas, ou seja, $\phi \approx 0$. Observa-se entretanto a ocorrência de um ângulo de inclinação lateral ϕ ligeiramente negativo. Isto se deve à uma distribuição de massa assimétrica do GNBA que é compensada por meio de uma deflexão ligeiramente positiva dos ailerons δ_a . O leme de direção δ_r , por sua vez, pode ser assumido nulo. Entretanto os resultados numéricos na ordem de 10^{-3} se justificam devido ao acoplamento dinâmico latero-direcional e à pequena deflexão dos ailerons. Já o ângulo de incidência do estabilizador horizontal i_h é negativo para compensar o momento picador causado pelo ângulo de ataque positivo e pelo fato de a aeronave ser estaticamente estável. Observa-se ainda que a amplitude modal η_1 relativa ao modo de flexão simétrica das asas apresenta um valor negativo, que traduzido em deslocamentos estruturais reais corresponde à uma deflexão da asa no sentido de $-z_{B(G)}$, em concordância com o deslocamento medido na ponta da asa $d_{z,wt}$. Por fim, a torção da ponta da asa em relação à sua raiz (θ_{wt}) é negativa devido ao enflechamento positivo do GNBA.

No que diz respeito às diferenças entre os casos paramétricos, observa-se que o ângulo de ataque aumenta com a flexibilidade. Isto está diretamente relacionado ao enflechamento positivo das asas do GNBA e, por conseguinte, às suas inerentes tendências de apresentarem uma torção negativa em direção às pontas quando defletidas. Esta característica acarreta em uma perda da capacidade das asas de gerar sustentação. Para compensar esse efeito maiores ângulos de ataque são necessários. O aumento do ângulo de ataque por sua vez é acompanhado de um aumento do arrasto aerodinâmico, justificando assim a necessidade de mais tração. Por fim, quanto mais flexível a aeronave, maiores serão, em módulo, os valores das amplitudes modais e dos deslocamentos e torções nas pontas das asas.

Em seguida foram efetuadas simulações de voo em manobra. Tratam-se das respostas não-lineares de malha aberta do GNBA à entradas de comando do tipo *doublet* aplicadas nas superfícies de controle. Uma vez que apenas as superfícies sustentadoras foram consideradas no cálculo do carregamento incremental, as deformações nas pontas das asas e na empenagem vertical foram escolhidas para demonstrar o comportamento da aeronave.



(a) Deslocamento na ponta da asa direita.



(b) Torção na ponta da asa esquerda.

Figura 5: Respostas ao comando *doublet* aplicado no profundor.

A Figura 5 apresenta as respostas a um *doublet* de amplitude $\pm 5^\circ$ aplicado no profundor do GNBA a partir de 1 segundo de simulação. Observa-se que nos instantes iniciais as asas encontram-se deformada na condição de trimagem. Após a aplicação do *doublet* as oscilações para cada uma das configuração de flexibilidade apresentam os mesmos comportamentos. Maiores amplitudes de deformações são observadas para as configurações mais flexíveis, como esperado. Na Figura 6 o mesmo comportamento é observado na raiz da empenagem vertical, porém agora em resposta a um *doublet* acoplado de amplitude $\pm 5^\circ$ aplicado nos ailerons e leme. Nas Figuras 5 e 6 também fica evidente que, com o aumento da flexibilidade, a resposta estrutural torna-se mais evi-

dente, como se pode perceber pelas oscilações de frequência mais elevada em ambos os casos.

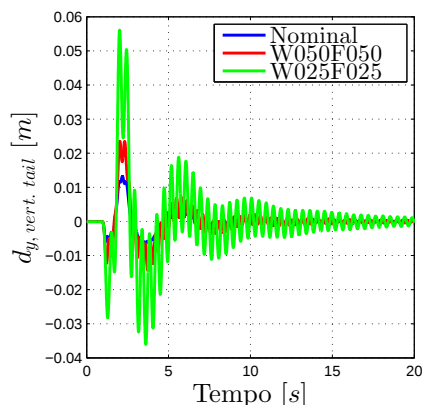


Figura 6: Respostas ao comando *doublet* acoplado aplicado nos ailerons e leme. Deslocamento da empenagem vertical na direção $y_{B(G)}$.

4 Conclusões

A formulação descrita mostrou-se apropriada, no contexto de pequenas deformações, para captar as tendências do comportamento estrutural, sendo, portanto, uma abordagem adequada para preencher a lacuna existente entre a dinâmica do voo clássica e a aeroelasticidade, podendo ser empregada, por exemplo, nas fases preliminares de projeto de aeronaves para análise da interação entre as dinâmicas de corpo rígido e estrutural, bem como os efeitos dessa interação sobre o projeto de sistemas de controle. Adicionalmente, tal metodologia mostrou-se prática de ser implementada e apresentou baixo custo computacional se comparada com abordagens de maior fidelidade.

Agradecimentos

Os autores agradecem o apoio do CNPq.

Referências

- Canavin, J. and Likins, P. (1977). Floating reference frames for flexible spacecraft, *Journal of Spacecraft and Rockets* **14**(12): 724–732.
- Guimarães Neto, A. B. (2014). *Flight dynamics of flexible aircraft using general body axes: a theoretical and computational study*, PhD thesis, Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São José dos Campos. Thesis of Doctor in Science in Flight Mechanics.
- Silvestre, F. J. (2007). *Modelagem da mecânica do voo de aeronaves flexíveis e aplicações de controle*, Master's thesis, Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São José dos Campos.

Silvestre, F. J. (2013). *Methodology for modeling the dynamics of flexible, high-aspect-ratio aircraft in the time domain for aeroservoelastic investigations*, 1 st edn, mbvberlin, Berlin. ISBN: 978-3-86387-316-5.

Silvestre, F. J. and Luckner, R. (2015). Experimental validation of a flight simulation model for slightly flexible aircraft, *AIAA Journal* pp. 1–17.

Theodorsen, T. (1949). General theory of aerodynamic instability and the mechanism of flutter.

Waszak, M. R. and Schmidt, D. K. (1988). Flight dynamics of aeroelastic vehicles, *Journal of Aircraft* **25**(6).

YATES, JR, E. C. (1958). Calculation of flutter characteristics for finite-span swept or unswept wing at subsonic and supersonic speeds by a modified strip analysis, p. 124.