

OBSERVADORES DE ESTADO PARA SISTEMAS LINEARES CHAVEADOS COM ESTRATÉGIA DE CHAVEAMENTO DEPENDENTE DA SAÍDA DA PLANTA

ALEXANDRE A. CARNIATO*, EDSON I. M. JÚNIOR†, LEONARDO A. CARNIATO*, MARCELO CARVALHO M. TEIXEIRA‡, EDVALDO ASSUNÇÃO‡, RODRIGO CARDIM‡

*IFSP - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo
Departamento de Indústria - Campus Presidente  p t cio
Avenida: José Ramos Júnior, 27-50, 19470-000, Presidente  p t cio, São Paulo, Brasil

†IFMS - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Mato Grosso do Sul
Campus Três Lagoas
Rua Ant nio Estevão Leal, 790 - 79641-162, Três Lagoas, Mato Grosso do Sul, Brasil

‡Laboratório de Pesquisa em Controle (LPC), Departamento de Engenharia Elétrica, Faculdade de Engenharia, Univ Estadual Paulista (UNESP), Campus Ilha Solteira, Avenida José Carlos Rossi, 1370, Ilha Solteira, SP 13385-000, Brasil

Emails: carniato@ifsp.edu.br, edson.mainardi@ifms.edu.br, leonardo@ifsp.edu.br, marcelo@dee.feis.unesp.br, edvaldo@dee.feis.unesp.br, rcardim@dee.feis.unesp.br

Abstract— This paper deals with the analysis and control of switched linear systems considering the switching strategy using only the plant output. The state vector is considered not completely available. Hence, a switched observer is obtained in order to design observer feedback gain, ($u = K_{\sigma}\hat{x}$). Furthermore, the switching rule depends on the plant output, unlike of papers available in literature, which consider the estimated state vector to design the switching rule. The design are based in Linear Matrix Inequalities (LMIs). One example shows that, when the conditions of the proposed theorem are feasible, the addressed control strategy presents better results, when compared to similar results available in the literature.

Keywords— Switched Systems, State Observers, Output Feedback, LMIs.

Resumo— Este trabalho trata da análise e controle de sistemas lineares chaveados com chaveamento dependente da sa da da planta. Considera-se que o vetor de estado do sistema não está completamente disponível. Obt m-se, portanto, um observador chaveado e faz-se a realimentação do vetor de estado estimado, considerando ($u = K_{\sigma}\hat{x}$). Além disto, considera-se uma regra de chaveamento dependente da saída da planta, diferente de trabalhos encontrados na literatura que consideram o vetor de estado estimado para projetar a estratégia de chaveamento. Os projetos são baseados em LMIs (*Linear Matrix Inequalities*). Um exemplo numérico mostra que, quando as condições dos teoremas propostos são factíveis, a estratégia de controle abordada neste artigo apresenta resultados mais eficazes, se comparados com as técnicas disponíveis na literatura.

Palavras-chave— Sistemas Chaveados, Observadores de Estado, Realimentação de Saída, LMIs.

1 Introdução

Sistemas chaveados representam uma subclasse dos sistemas híbridos. Deste modo, pode-se dizer que sistemas chaveados são sistemas dinâmicos compostos por um número finito de subsistemas que comutam entre si, respeitando uma regra de chaveamento. Os subsistemas não precisam apresentar as mesmas características, ou seja, caso o sistema global seja estável, não necessariamente, cada subsistema será estável (Liberzon, 2003).

Recentemente, t picos de pesquisa relacionados aos sistemas chaveados apresentaram um crescimento considerável (Geromel and Colaneri, 2006). Este fato associa-se   uma vasta possibilidade de descrever sistemas físicos. Pode-se citar algumas aplicações práticas, tais como: controle de tráfego urbano (Papageorgiou et al., 2003), controle de conversores CC-CC (Cardim et al., 2011; Deaecto et al., 2010), dentre outros.

Em muitas aplicações práticas, o vetor de estado pode não estar completamente disponível. Deste modo, é importante estudar e proje-

tar estratégias de chaveamento entre os subsistemas que não dependam do vetor de estado. Em (Mainardi Júnior et al., 2014), os autores propuseram uma regra de chaveamento dependente apenas da saída da planta para sistemas lineares chaveados incertos. Além disto, no trabalho supracitado, não considerou-se realimentação do sistema ($u(t) = 0$), ou seja, apenas o chaveamento entre os subsistemas disponíveis foi utilizado para garantir estabilidade assintótica.

Já em (Carniato et al., 2015), os autores propuseram uma generalização dos resultados apresentados em (Mainardi Júnior et al., 2014) através da realimentação est tica de saída ($u(t) = K_{\sigma}y$). Através de comparações de factibilidade e custo garantido (Deaecto et al., 2010) verificou-se que a realimentação est tica de saída, juntamente com o chaveamento entre os subsistemas apresentaram resultados mais satisfatórios.

Uma outra estratégia para o controle de sistemas lineares chaveados, quando o vetor de estado não está completamente disponível, baseia-se em observadores de estado (Luenberger, 1966).

A utilização desta técnica tornou-se padrão para realimentação dinâmica de saída, sendo abordado em diversos livros (Hespanha, 2009; Chen, 1995). Este método baseia-se na criação de um sistema paralelo ao sistema original, considerando o vetor de estado estimado ($\hat{x}(t)$).

A principal contribuição deste trabalho é apresentar uma outra estratégia de projeto de controladores para sistemas lineares chaveados, com regra de comutação dependente da saída da planta, através de observadores de estado. Em seguida, comparar-se a esta técnica com as disponíveis na literatura através de resposta temporal e custo garantido.

Por conveniência, a seguir são definidas algumas notações que serão utilizadas ao longo do trabalho. Para matrizes ou vetores reais ($'$) indica o transposto. O conjunto formado pelos N primeiros inteiros $\{1, \dots, N\}$ é denotado por $\mathbb{K}_N$. O conjunto de todos os vetores $\lambda = [\lambda_1 \dots \lambda_N]'$ tais que $\lambda_i \geq 0$, $i \in \mathbb{K}_N$ e $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_N = 1$ é denotado por Λ . A combinação convexa de um conjunto de matrizes $(A_1, \dots, A_N)$ é denotada $A_\lambda = \sum_{i=1}^N \lambda_i A_i$, sendo $\lambda \in \Lambda$. Além disso, o símbolo $(*)$ será usado em expressões matriciais para denotar o transposto de um elemento simétrico. Para expressões em linha, este símbolo denotará o transposto dos termos do lado esquerdo, como mostrado nos exemplos a seguir:

$$\begin{bmatrix} A & B' \\ B & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & (*) \\ B & C \end{bmatrix},$$

$$A + B + A' + B' = A + B + (*).$$

2 Sistemas Lineares Chaveados

Considere o sistema linear chaveado definido em (Geromel and Colaneri, 2006):

$$\dot{x}(t) = A_\sigma x(t) + B_\sigma u(t), \quad x(0) = x_0 \quad (1)$$

$$y(t) = Cx(t), \quad (2)$$

sendo $x(t) \in \mathbb{R}^n$ o vetor de estado, $y(t) \in \mathbb{R}^p$ a saída controlada. Considere que $\sigma(t)$ é a regra ou lei de chaveamento, que seleciona em cada instante de tempo $t \geq 0$, um subsistema disponível (A_i, B_i) , $i \in \mathbb{K}_N$, sendo que $B_i \in \mathbb{R}^{n \times m}$ é uma matriz constante e conhecida. Além disto, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ é a entrada de controle da planta, x_0 é a condição inicial e $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ é a matriz de saída do sistema, constante para todo $t \geq 0$.

Desta maneira, define-se o seguinte problema de controle:

Problema 1 *Determine uma função $u(\cdot) : \mathbb{R}^p \rightarrow \{1, 2, \dots, N\}$ tal que a regra de chaveamento*

$$\sigma(t) = u(y(t)), \quad (3)$$

torne o ponto de equilíbrio $x = 0$ do sistema linear chaveado definido em (1) globalmente assintoticamente estável.

Visando resolver o problema de controle supracitado, considerando $u(t) = 0$, tem-se o seguinte teorema:

Teorema 1 (Mainardi Júnior et al., 2012) *Suponha que o vetor de estado $x(t) \in \mathbb{R}^n$ não está completamente disponível, porém $y(t) \in \mathbb{R}^p$ está passível para realimentação. Se existirem $\lambda \in \Lambda$, matrizes $Q_0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $Q_i \in \mathbb{R}^{p \times p}$, $i \in \mathbb{K}_N$ e uma matriz $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ positiva definida, tais que:*

$$A_i'P + PA_i < Q_0 + C'Q_iC, \quad (4)$$

$$Q_0 + C'Q_\lambda C < 0, \quad (5)$$

então a estratégia de chaveamento

$$\sigma(t) = \arg \min_{i \in \mathbb{K}_N} (y'Q_iy), \quad (6)$$

torna o ponto de equilíbrio ($x = 0$) do sistema (1) globalmente assintoticamente estável.

Prova: Para maiores detalhes, veja (Mainardi Júnior et al., 2012). $\square$

O teorema a seguir generaliza o Teorema 1 introduzindo o custo garantido definido em (7).

$$J = \int_0^\infty y(t)'y(t) dt < x_0'Px_0, \quad (7)$$

Teorema 2 (Mainardi Júnior et al., 2012) *Suponha que o vetor de estado $x(t) \in \mathbb{R}^n$ não está completamente disponível, porém $y(t) \in \mathbb{R}^p$ está passível para realimentação. Se existirem $\lambda \in \Lambda$, matrizes $Q_0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $Q_i \in \mathbb{R}^{p \times p}$, $i \in \mathbb{K}_N$ e uma matriz $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ positiva definida, tal que:*

$$A_i'P + PA_i + C'C < Q_0 + C'Q_iC, \quad (8)$$

e (5) seja satisfeita, então a estratégia de chaveamento (6) torna o ponto de equilíbrio ($x = 0$) do sistema (1) globalmente assintoticamente estável e o custo garantido (7) é mantido para $x(0) = x_0 \neq 0$.

Prova: Para maiores detalhes, veja (Mainardi Júnior et al., 2012). $\square$

Os autores do trabalho (Carniato et al., 2015) propuseram uma generalização do Teorema 1 através da realimentação estática de saída. Desta maneira define-se o seguinte problema de controle:

Problema 2 *Determine uma lei de controle*

$$u(t) = K_\sigma y(t), \quad (9)$$

que torne o ponto de equilíbrio $x = 0$ do sistema definido em (1) globalmente assintoticamente estável, considerando a regra de chaveamento definida em (6) e que também satisfaça um certo índice de desempenho, por exemplo, o custo garantido (7).

Teorema 3 (Carniato et al., 2015) Considere o sistema apresentado em (1), sendo que $\text{posto}(B_i) = m$ para $i \in \mathbb{K}_N$ e que $y(t) \in \mathbb{R}^p$ está disponível para realimentação. Se existirem $\lambda \in \Lambda$, matrizes $X_{1i}, X_{2i} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, matrizes simétricas $Q_0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Q_i \in \mathbb{R}^{p \times p}$, matrizes $N_i \in \mathbb{R}^{m \times p}$, matrizes $M_i \in \mathbb{R}^{m \times m}$ e uma matriz simétrica definida positiva $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$, tais que:

$$\begin{bmatrix} X_{1i}A_i + B_iN_iC + A_i'X_{1i}' + C'N_i'B_i' \\ P - X_{1i}' - X_{2i}A_i + B_iN_iC \\ P - X_{1i} + A_i'X_{2i}' + C'N_i'B_i' \\ -X_{2i} - X_{2i}' \end{bmatrix} < \begin{bmatrix} Q_0 + C'Q_iC & 0_{n \times n} \\ 0_{n \times n} & 0_{n \times n} \end{bmatrix}, \quad (10)$$

$$X_{1i}B_i = B_iM_i, \quad (11)$$

$$X_{2i}B_i = B_iM_i, \quad (12)$$

$$Q_0 + C'Q_iC < 0. \quad (13)$$

para todo $i \in \mathbb{K}_N$ e $j \in \mathbb{K}_r$, então a regra de chaveamento (6) e (9) com os ganhos $K_i = M_i^{-1}N_i$, tornam o ponto de equilíbrio $x = 0$ do sistema (1) globalmente assintoticamente estável.

Prova: Para maiores detalhes, veja (Carniato et al., 2015). $\square$

Em seguida apresenta-se uma generalização através da inserção do custo garantido, definido em (7), para o Teorema 3.

Teorema 4 (Carniato et al., 2015) Considere o sistema apresentado em (1), sendo que $\text{posto}(B_i) = m$ para $i \in \mathbb{K}_N$ e que $y(t) \in \mathbb{R}^p$ está disponível para realimentação. Se existirem $\lambda \in \Lambda$, matrizes $X_{1i}, X_{2i} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, matrizes simétricas $Q_0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Q_i \in \mathbb{R}^{p \times p}$, matrizes $N_i \in \mathbb{R}^{m \times p}$, matrizes $M_i \in \mathbb{R}^{m \times m}$ e uma matriz simétrica definida positiva $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$, tal que:

$$\begin{bmatrix} X_{1i}A_i + B_iN_iC + A_i'X_{1i}' + C'N_i'B_i' + C'C \\ P - X_{1i}' - X_{2i}A_i + B_iN_iC \\ P - X_{1i} + A_i'X_{2i}' + C'N_i'B_i' \\ -X_{2i} - X_{2i}' \end{bmatrix} < \begin{bmatrix} Q_0 + C'Q_iC & 0_{n \times n} \\ 0_{n \times n} & 0_{n \times n} \end{bmatrix}, \quad (14)$$

e que as condições (11), (12) e (13) sejam satisfeitas para todo $i \in \mathbb{K}_N$ e $j \in \mathbb{K}_r$, então a regra de chaveamento (6) e (9) com os ganhos $K_i = M_i^{-1}N_i$, tornam o ponto de equilíbrio $x = 0$ do sistema (1) globalmente assintoticamente estável e o custo (7) é mantido para $x(0) = x_0 \neq 0$.

Prova: Para maiores detalhes, veja (Carniato et al., 2015). $\square$

3 Observador de Estado em Sistemas Lineares Chaveados

O observador de estado proposto em (Luenberger, 1966) tornou-se padrão para realimentação dinâmica de saída, sendo abordado em diversos livros, dentre estes, pode-se citar (Chen, 1995) e (Hespanha, 2009). Este método baseia-se na criação de um sistema paralelo ao sistema original, considerando o vetor de estado estimado (15).

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + L(y - C\hat{x}) \quad (15)$$

sendo $L \in \mathbb{R}^{n \times m}$ a matriz de ganho da saída. Deste modo, a partir de (1) e (15) busca-se obter um observador chaveado através do cômputo de um conjunto de matrizes de ganho de saída $\{L_1, L_2, \dots, L_N \in \mathbb{R}^{n \times m}\}$ e de uma função de chaveamento $\hat{\sigma}(t)$. Desta maneira, obtém-se:

$$\dot{\hat{x}}(t) = A_{\hat{\sigma}(t)}\hat{x}(t) + B_{\hat{\sigma}(t)}u(t) + L_{\hat{\sigma}(t)}(y - C\hat{x}) \quad (16)$$

$$\hat{y}(t) = C\hat{x}(t) \quad (17)$$

A partir destes resultados, uma propriedade importante é descrita no lema a seguir.

Lema 1 (Yoshimura et al., 2012) Considerando-se um observador linear chaveado para um sistema linear chaveado, se $\hat{\sigma}(t) = \sigma(t)$, então o sistema do erro de estimação é um sistema linear chaveado.

Prova: Considere que $\hat{\sigma}(t) = \sigma(t)$. Deste modo, a partir de (1) e (16) tem-se:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{\hat{x}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{\sigma(t)} & 0 \\ L_{\sigma(t)}C & A_{\sigma(t)} - L_{\sigma(t)}C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{\sigma(t)} \\ B_{\sigma(t)} \end{bmatrix} u(t) \quad (18)$$

Definindo-se $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ e subtraindo (16) de (1), obtém-se:

$$\dot{e}(t) = (A_{\sigma(t)} - L_{\sigma(t)}C)e(t), \quad (19)$$

que claramente é um sistema linear. Deste modo, a prova está concluída. $\square$

Observação 1 A partir do Lema 1, é possível notar que o sistema do erro de estimação tem uma descrição mais simples do que aquela do sistema principal, evitando a aparição de modos mistos. Além disso, o mais importante é que o erro nulo é sempre alcançável, desde que o sistema seja assintoticamente estável.

Lema 2 (Lin and Antsaklis, 2009) Se todos os subsistemas em um sistema linear chaveado compartilharem uma função quadrática de Lyapunov comum, então a origem do sistema é globalmente assintoticamente estável sob uma regra de chaveamento arbitrária.

A partir dos conceitos discutidos anteriormente, define-se o seguinte problema de controle:

Problema 3 *Supondo que a saída controlada, $y(t) \in \mathbb{R}^p$ está sempre disponível para realimentação, determine uma lei de controle*

$$u(t) = -K_{\sigma(t)}\hat{x}(t), \quad (20)$$

sendo $K_{\sigma} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ os ganhos de realimentação, $\hat{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estado estimado, e uma regra de chaveamento $\hat{\sigma}(y, t) = \sigma(y, t)$ que selecione a cada instante de tempo, um subsistema conhecido de um conjunto $(A_i, B_i, C, L_i, K_i), i \in \mathbb{K}_N$, tal que, o ponto de equilíbrio $x = 0$ do sistema definido em (1) e (2) seja globalmente assintoticamente estável e também satisfaça um certo índice de desempenho, por exemplo, o custo garantido (7).

Visando propor uma solução para o Problema 3, inicialmente deve-se representar a planta através de uma maneira adequada. Para isto, substitua (20) em (1) e (2). Para representar a nova dinâmica da planta, considere que $Z_{\sigma(t)} = (A_{\sigma(t)} - B_{\sigma(t)}K_{\sigma(t)})$ e $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$. Deste modo, obtém-se:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{e}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{\sigma(t)} & B_{\sigma(t)}K_{\sigma(t)} \\ 0 & (A_{\sigma(t)} - L_{\sigma(t)}C) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ e(t) \end{bmatrix} \quad (21)$$

Deste modo, a partir (21), verifique que, o Teorema 5 propõe uma solução para o Problema 3. A principal motivação dos autores para realização deste trabalho, justifica-se no fato que, esta metodologia permite o projeto de uma regra de chaveamento dependente da saída da planta juntamente com o projeto de controladores utilizando a estimação das variáveis de estado.

Teorema 5 *Considere o sistema linear chaveado definido em (1) e (2) e suponha que $y(t) \in \mathbb{R}^p$ está completamente disponível para realimentação. Se existirem, um escalar $\lambda \in \Lambda$, matrizes $N_i \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $G_i \in \mathbb{R}^{n \times p}$, matrizes simétricas $Q_0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $Q_i \in \mathbb{R}^{p \times p}$ e matrizes simétricas definidas positiva $P_0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $P_L \in \mathbb{R}^{n \times n}$, tais que:*

$$\begin{bmatrix} A'_i P_0 - B'_i N_i + (*) & P_0 B_i K_i \\ * & A'_i P_L - G'_i C + (*) \end{bmatrix} < \begin{bmatrix} Q_0 + C' Q_i C & 0_n \\ 0_n & 0_n \end{bmatrix}, \quad (22)$$

$$B_i M_i = P_0 B_i, \quad (23)$$

$$Q_0 + C' Q_{\lambda} C < 0, \quad (24)$$

para todo $i \in \mathbb{K}_N$, então a regra de chaveamento (6), considerando $\hat{\sigma}(t) = \sigma(t)$, juntamente com os ganhos $K_i = (M'_i)^{-1} N_i$, $i \in \mathbb{K}_N$, tornam a origem ($x = 0$) do sistema (21) globalmente assintoticamente estável.

Prova: Considere que (22) - (24) são factíveis. Deste modo, a partir de (6) e (24), para $x \neq 0$, note que:

$$\begin{aligned} 0 &> x'(Q_0 + C' Q_{\lambda} C)x \geq x' Q_0 x + \min_{i \in \mathbb{K}_N} (y' Q_i y) \\ &= x'(Q_0 + C' Q_{\sigma} C)x. \end{aligned} \quad (25)$$

A expressão (25) pode ser reescrita como:

$$\begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} Q_0 + C' Q_{\sigma} C & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} < 0. \quad (26)$$

Definindo-se $N_{\sigma} = M_{\sigma} K_{\sigma}$ e $G_{\sigma} = P_L L_{\sigma}$, a partir (22), (23) e (26) segue que:

$$\begin{aligned} 0 &> \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} Q_0 + C' Q_{\sigma} C & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} \\ &> \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} A'_{\sigma} P_0 + P_0 A_{\sigma} - B'_{\sigma} N_{\sigma} - N'_{\sigma} B'_{\sigma} & \\ & K'_{\sigma} B'_{\sigma} P_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} \\ &\quad \begin{bmatrix} P_0 B_{\sigma} K_{\sigma} & \\ A'_{\sigma} P_L + P_L A_{\sigma} - G'_{\sigma} C - C' G'_{\sigma} & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} A'_{\sigma} P_0 + P_0 A_{\sigma} - P_0 B_{\sigma} K_{\sigma} - K'_{\sigma} B'_{\sigma} P_0 & \\ & K'_{\sigma} B'_{\sigma} P_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} \\ &\quad \begin{bmatrix} P_0 B_{\sigma} K_{\sigma} & \\ P_L (A_{\sigma} - L_{\sigma} C) + (A_{\sigma} - L_{\sigma} C)' P_L & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} (A_{\sigma} - B_{\sigma} K_{\sigma})' P_0 + P_0 (A_{\sigma} - B_{\sigma} K_{\sigma}) & \\ & K'_{\sigma} B'_{\sigma} P_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} \\ &\quad \begin{bmatrix} P_0 B_{\sigma} K_{\sigma} & \\ P_L (A_{\sigma} - L_{\sigma} C) + (A_{\sigma} - L_{\sigma} C)' P_L & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix}' \left\{ \begin{bmatrix} (A_{\sigma} - B_{\sigma} K_{\sigma}) & B_{\sigma} K_{\sigma} \\ 0 & (A_{\sigma} - L_{\sigma} C) \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} P_0 & 0 \\ 0 & P_L \end{bmatrix} \right. \\ &\quad \left. + \begin{bmatrix} P_0 & 0 \\ 0 & P_L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (A_{\sigma} - B_{\sigma} K_{\sigma}) & B_{\sigma} K_{\sigma} \\ 0 & (A_{\sigma} - L_{\sigma} C) \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (27)$$

Considerando a seguinte função candidata de Lyapunov $V(x, e) = x' P_0 x + e' P_L e$, note que a partir de (21) e (27), $\dot{V}(x, e) < 0$ para $[x' \ e']' \neq [0 \ 0]$. $\square$

Observação 2 *Atualmente na literatura não existem algoritmos eficazes para resolver os problemas de controlabilidade e estabilidade simultaneamente. Deste modo, uma solução bastante utilizada pelos pesquisadores da área é conhecida como princípio da separação (Witsenhausen, 1971; Brezinski, 2013).*

A partir da observação acima, propõe-se um algoritmo para o problema de controle proposto no Teorema 5.

Algoritmo 1 Considere o sistema linear chaveado, invariante no tempo, controlável e observável dado em (1) e (2). Uma possível solução para o problema de controle proposto no Teorema 5 é descrita nos passos abaixo:

Passo 1 - Utilizando o princípio da separação, encontre se possível, $P_0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $N_i \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $M_i \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $Q_0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $Q_i \in \mathbb{R}^{p \times p}$ tais que as seguintes LMIs:

$$A_i'P_0 + P_0A_i - N_i'B_i' - B_iN_i < Q_0 + C'Q_iC, \quad (28)$$

$$P_0B_i = B_iM_i, \quad (29)$$

$$Q_0 + C'Q_iC < 0, \quad (30)$$

são mantidas para todo $i \in \mathbb{K}_N$.

Passo 2 - Obtenha, se possível, as matrizes de ganho $K_i \in \mathbb{R}^{m \times n}$, sendo que, $K_i = (M_i')^{-1}N_i$, para $i \in \mathbb{K}_N$.

Passo 3 - Para as matrizes $P_0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $N_i \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $M_i \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $Q_0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $Q_i \in \mathbb{R}^{p \times p}$ obtidas no Passo 1, encontre, se factível, $P_L \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $G_i \in \mathbb{R}^{n \times p}$ tais que as LMIs:

$$\begin{bmatrix} A_i'P_0 - B_iN_i + (*) & P_0B_iK_i \\ * & A_i'P_L - G_iC + (*) \end{bmatrix} < \begin{bmatrix} Q_0 + C'Q_iC & 0_n \\ 0_n & 0_n \end{bmatrix}, \quad (31)$$

são mantidas para $i \in \mathbb{K}_N$.

Passo 4 - Determine $L_i \in \mathbb{R}^{m \times n}$, tal que, $L_i = P_L^{-1}G_i$, para $i \in \mathbb{K}_N$.

O teorema a seguir generaliza as condições dispostas no Teorema 5 através da inserção do custo garantido definido em (7).

Teorema 6 Considere o sistema linear chaveado definido em (1) e (2) e suponha que $y(t) \in \mathbb{R}^p$ está completamente disponível para realimentação. Se existirem, um escalar $\lambda \in \Lambda$, matrizes $N_i \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $G_i \in \mathbb{R}^{n \times p}$, matrizes simétricas $Q_0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $Q_i \in \mathbb{R}^{p \times p}$ e matrizes simétricas definidas positiva $P_0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $P_L \in \mathbb{R}^{n \times n}$, tal que:

$$\begin{bmatrix} A_i'P_0 - B_iN_i + (*) + C'C & P_0B_iK_i \\ * & A_i'P_L - G_iC + (*) \end{bmatrix} < \begin{bmatrix} Q_0 + C'Q_iC & 0_n \\ 0_n & 0_n \end{bmatrix}, \quad (32)$$

e que as condições (23) - (24) são factíveis para todo $i \in \mathbb{K}_N$, então a regra de chaveamento (6), considerando $\hat{\sigma}(t) = \sigma(t)$, juntamente com os ganhos $K_i = (M_i')^{-1}N_i$, $i \in \mathbb{K}_N$, tornam a origem ($x = 0$) do sistema (21) globalmente assintoticamente estável e o custo (7) é mantido para $x(0) = x_0 \neq 0$.

Prova: A demonstração segue os mesmos passos mostrados na prova do Teorema 5. $\square$

4 Exemplos Ilustrativos

Nesta seção apresenta-se um exemplo ilustrativo visando demonstrar a eficácia da técnica de controle proposta neste artigo. Inicialmente, compara-se a resposta temporal dos Teoremas 1, 3 e 5 apresentados neste artigo. Em seguida, compara-se a minimização do custo garantido obtido. Considere o sistema linear chaveado (1) e (2) e as seguintes matrizes (Sun, 2006):

$$A_1 = \begin{bmatrix} -2,1 & 1,4 & 5,9 \\ -8,0 & -5,7 & -0,2 \\ 0,6 & 5,8 & 1,6 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1,0 & -0,5 & -2,8 \\ 4,8 & -5,0 & 1,1 \\ -1,0 & -6,6 & -2,1 \end{bmatrix}, \quad (33)$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (34)$$

As condições iniciais são $x(0) = [1,5 \quad -0,5 \quad 0,7]$ e note que A_1 e A_2 não são Hurwitz. As LMIs foram modeladas utilizando o pacote YALMIP (Lofberg, 2004) e o solver utilizado foi o SeDuMi (Sturm, 1999).

Na Figura 1 apresentam-se as respostas temporais para o sistema linear chaveado descrito pelas expressões (33) e (34). Observe que, a realimentação através da estimação das variáveis de estado ($u = K_\sigma \hat{x}$), obtida no Teorema 5, apresentou menor tempo de assentamento se comparado com a realimentação estática de saída ($u = K_\sigma y$), proveniente do Teorema 3 e com os resultados do Teorema 1 ($u(t) = 0$). Com relação ao cômputo do custo garantido, a partir da Tabela 1 é possível verificar que a metodologia de controle proposta neste artigo reduziu significativamente o custo garantido.

Tabela 1: Cálculo do custo garantido

Teorema	Custo Garantido
2	35,4
4	3,17
6	0,63

5 Conclusões

Neste artigo foram propostas condições para o projeto de controladores através da realimentação das variáveis de estado estimadas utilizando uma regra de chaveamento dependente de saída controlada da planta. Tal contribuição destaca-se pelo fato de que, em sistemas físicos, as variáveis de estado podem não estar completamente disponíveis. Deste modo, é importante projetar leis de chaveamento que dependam, exclusivamente, da saída

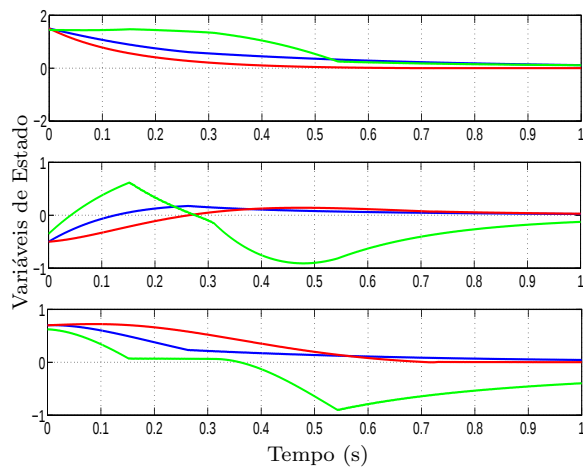


Figura 1: Resposta Temporal do Exemplo Ilustrativo I, sendo que, a linha verde representa o Teorema 1, linha azul Teorema 3 e linha vermelha Teorema 5.

da planta. Um exemplo ilustrativo mostra que, quando as condições dos teoremas apresentados são factíveis, a metodologia proposta neste artigo apresenta melhor desempenho, se comparada com os resultados apresentados na literatura.

Agradecimentos

Os autores agradecem a CAPES, ao CNPq e a FAPESP (2011/17610-0) pelo apoio financeiro.

Referências

- Brezinski, C. (2013). *Computational aspects of linear control*, Vol. 1, Springer Science & Business Media.
- Cardim, R., Teixeira, M. C., Assunção, E., Covacic, M. R., De Seixas, F. J., Faria, F. A. and Júnior, E. I. M. (2011). Design and implementation of a dc-dc converter based on variable structure control of switched systems, *IFAC Proceedings Volumes* **44**(1): 11048–11054.
- Carniato, A. A., Mainardi Júnior, E. I., Teixeira, M. C. M., Assunção, E., Alves, U. N. L. T. and Pereyra, H. E. (2015). Controle de sistemas chaveados incertos com realimentação da saída da planta, *Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente (SBAI), 2015 Brazilian, SBA*.
- Chen, C.-T. (1995). *Linear system theory and design*, Oxford University Press, Inc.
- Deaecto, G. S., Geromel, J. C., Garcia, F. and Pomilio, J. (2010). Switched affine systems control design with application to DC-DC

converters, *IET control theory & applications* **4**(7): 1201–1210.

- Geromel, J. C. and Colaneri, P. (2006). Stability and stabilization of continuous-time switched linear systems, *SIAM Journal on Control and Optimization* **45**(5): 1915–1930.
- Hespanha, J. P. (2009). *Linear systems theory*, Princeton university press.
- Liberzon, D. (2003). *Switching in systems and control*, Springer Science & Business Media.
- Lin, H. and Antsaklis, P. J. (2009). Stability and stabilizability of switched linear systems: A survey of recent results, *IEEE Transactions on Automatic Control* **54**(2): 308–322.
- Lofberg, J. (2004). Yalmip : a toolbox for modeling and optimization in matlab, *Computer Aided Control Systems Design, 2004 IEEE International Symposium on*, pp. 284–289.
- Luenberger, D. (1966). Observers for multivariable systems, *IEEE Transactions on Automatic Control* **11**(2): 190–197.
- Mainardi Júnior, E. I., Assunção, E., Teixeira, M., Moreira, M., Cardim, R. and Yoshimura, V. L. (2012). *On Control Design of Switched Affine Systems with Application to DC-DC Converters*, INTECH Open Access Publisher.
- Mainardi Júnior, E. I., Teixeira, M., Cardim, R., Assunção, E., Moreira, M. and de Oliveira, D. R. (2014). Robust control of switched linear systems with output switching strategy, *Congresso Brasileiro de Automática (CBA), 2014 Brazilian, SBA*, pp. 1069–1075.
- Papageorgiou, M., Diakaki, C., Dinopoulou, V., Kotsialos, A. and Wang, Y. (2003). Review of road traffic control strategies, *Proceedings of the IEEE* **91**(12): 2043–2067.
- Sturm, J. F. (1999). Using sedumi 1.02, a matlab toolbox for optimization over symmetric cones, *Optimization methods and software* **11**(1-4): 625–653.
- Sun, Z. (2006). *Switched linear systems: Control and design*, Springer Science & Business Media.
- Witsenhausen, H. S. (1971). Separation of estimation and control for discrete time systems, *Proceedings of the IEEE* **59**(11): 1557–1566.
- Yoshimura, V. L., Assunção, E., da Silva, E. R. P., Teixeira, M. C. M. and Mainardi Júnior, E. I. (2012). Observação de estados em sistemas chaveados afins e projeto de observadores em conversores cc-cc, *Congresso Brasileiro de Automática (CBA), 2012 Brazilian, SBA*.