

CONTROLE $\mathcal{H}_\infty$ CHAVEADO PARA SISTEMAS NÃO LINEARES FUZZY TAKAGI-SUGENO COM SATURAÇÃO DO SINAL DE CONTROLE

DIOGO RAMALHO DE OLIVEIRA*, MARCELO C. M. TEIXEIRA*, UÍLIAM N. L. T. ALVES*,
WALLYSONN A. DE SOUZA†, EDVALDO ASSUNÇÃO*, RODRIGO CARDIM*

*UNESP - Univ Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira
Departamento de Engenharia Elétrica, Lab. de Pesquisa em Controle
Av. José Carlos Rossi, 1370, 15385-000, Ilha Solteira, São Paulo, Brasil

†IFTO - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Tocantins
Coordenação de Ciências Matemáticas e Naturais, 77.021-090, Palmas, Tocantins, Brasil

Emails: diogo_oliveira6@hotmail.com, marcelo@dee.feis.unesp.br,
uiliamlendzionalves@gmail.com, wallysonn@yahoo.com.br, edvaldo@dee.feis.unesp.br,
rcardim@dee.feis.unesp.br

Abstract— An $\mathcal{H}_\infty$ switched control design, for a class of nonlinear systems described by the Takagi-Sugeno fuzzy model, is proposed in this paper. It is used a switched control law, subject to actuator saturation, which selects a state feedback gain at every instant of time. The control design provides an invariant ellipsoid, within the operation region, such that the closed-loop system is locally asymptotically stable. An example using an inverted pendulum confirms the effectiveness of the proposed method by simulations.

Keywords— Switched Control, $\mathcal{H}_\infty$ Control, Actuator Saturation, Takagi-Sugeno fuzzy models, Linear Matrix Inequality (LMI).

Resumo— Um projeto de controle $\mathcal{H}_\infty$ chaveado, para uma classe de sistemas não lineares descritos através do modelo fuzzy Takagi-Sugeno, é proposto neste artigo. É utilizada uma lei de controle chaveada, com sinal de controle sujeito à saturação, que seleciona um ganho de realimentação do vetor de estado a cada instante de tempo. O projeto de controle fornece um elipsoide invariante, dentro da região de operação, tal que o sistema realimentado é localmente assintoticamente estável. Um exemplo utilizando um pêndulo invertido confirma a eficácia do método proposto através de simulações.

Palavras-chave— Controle Chaveado, Controle $\mathcal{H}_\infty$, Saturação do Sinal de Controle, Sistemas Fuzzy Takagi-Sugeno, Desigualdade Matricial Linear (LMI).

1 Introdução

Leis de controle, baseados na compensação paralela distribuída (PDC), para sistemas não lineares descritos através de modelos fuzzy Takagi-Sugeno (T-S), têm sido estudadas nas últimas décadas. Esse interesse resultou em um grande número de artigos relacionados ao assunto (Taniguchi et al., 2001; Tanaka and Wang, 2001; Klug et al., 2013; Souza et al., 2014). Em (Klug et al., 2013) é enfatizado que o modelo fuzzy T-S apenas descreve com precisão a dinâmica original do sistema não linear em uma região limitada do espaço de estados, denominada região de operação ou de validade. Então, a razão de um mau desempenho, ou até mesmo da instabilidade, do sistema de malha fechada, pode ser atribuída à imprecisão ao utilizar um modelo fuzzy T-S. Dessa forma, diversos trabalhos, por exemplo (Lee et al., 2012; Klug et al., 2013; Klug et al., 2015), propõem métodos que garantem que o vetor de estado do sistema não linear permaneça dentro da região de operação. Tais métodos são baseados em desigualdades matriciais lineares (do inglês, *Linear Matrix Inequalities* - LMIs). Além disso, as condições operacionais práticas, como a região de segurança e as limitações do atuador, muitas vezes implicam que o sistema realimentado opere em uma região limitada do espaço de estados, que pode ser incorporada na região de operação (Klug et al., 2013).

Os projetos de controle propostos em (Cao and Lin, 2003; Tseng and Chen, 2006; Chiu, 2014) ilustram esse fato, pois consideram que o atuador está sujeito à saturação.

Semelhante ao método apresentado em (Souza et al., 2014), nesse trabalho é proposto um projeto de controle chaveado, para uma classe de plantas não lineares, cuja a metodologia elimina a necessidade de encontrar as expressões das funções de pertinência para implementar a lei de controle. Além disso, a técnica de controle $\mathcal{H}_\infty$ é utilizada com o propósito de mitigar a influência de uma entrada exógena na dinâmica do sistema. Os controladores obtidos através do projeto de controle $\mathcal{H}_\infty$ geralmente apresentam ganhos elevados, então considerou-se que o sinal de controle está sujeito à saturação. O método proposto apresenta condições que garantem que o vetor de estado permanece dentro da região de operação.

Para realizar o projeto de controle via LMIs, foram utilizados o *software* MatLab®, a linguagem Yalmip e o *solver* LMILab. Ao longo desse trabalho foram utilizadas as seguintes notações: $(\cdot)^T$ indica a transposição de um vetor ou matriz. O símbolo $(*)$ denota genericamente cada bloco simétrico. O conjunto $\mathcal{L}_2$ representa o conjunto de todas as trajetórias $\xi = \xi(t)$, tais que $\|\xi\|_2^2 = \int_0^\infty \xi(t)^T \xi(t) dt < \infty$. Por fim,

$$\begin{aligned}\mathbb{K}_r &= \{1, \dots, r\}, \quad r \in \mathbb{N}, \quad x(t) = x, \quad \alpha_i(z(t)) = \alpha_i, \\ F_z &= \sum_{i=1}^r \alpha_i F_i, \quad \alpha = [\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_r]^T \in \Lambda_r \quad \text{e} \\ \Lambda_r &= \left\{ \alpha \in \mathbb{R}^r : \alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^r \alpha_i = 1, i \in \mathbb{K}_r \right\}. \quad (1)\end{aligned}$$

2 Modelo Fuzzy Takagi-Sugeno e Região de Operação

O modelo fuzzy Takagi-Sugeno é descrito por regras SE-ENTÃO que representam localmente as relações de entrada e saída de um sistema não linear. Considere o modelo fuzzy T-S como descrito por (Tanaka and Wang, 2001) e (Tseng and Chen, 2006):

Regra i: Se $z_1(t)$ é μ_{i1} e ... e $z_p(t)$ é μ_{ip} ,
Então $\dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i \bar{u}(t) + E_i w(t)$,
(2)

sendo $i \in \mathbb{K}_r$, μ_{ij} , $j \in \mathbb{K}_p$, é o conjunto fuzzy da regra i correspondente à função $z_j(t)$, $x(t) \in \mathbb{R}^{n_x}$ é o vetor de estado, $\bar{u}(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$ é o vetor de entrada sujeito à saturação, $w(t) \in \mathbb{R}^{n_w}$ é a entrada exógena com energia limitada tal que $w(t) \in \mathcal{L}_2$, $A_i \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, $B_i \in \mathbb{R}^{n_x \times n_u}$, $E_i \in \mathbb{R}^{n_x \times n_w}$ e $z(t) = [z_1(t), \dots, z_p(t)]$ são as variáveis premissas, que dependem do vetor de estado $x(t)$.

A partir de (Tanaka and Wang, 2001), (Tseng and Chen, 2006) e das definições de (1), $\dot{x}(t)$ dado em (2) pode ser reescrito como segue:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \sum_{i=1}^r \alpha_i(x(t)) (A_i x(t) + B_i \bar{u}(t) + E_i w(t)) \\ &= A_z x(t) + B_z \bar{u}(t) + E_z w(t), \quad (3)\end{aligned}$$

sendo $\alpha_i(z(t)) = \frac{\mu_{i1}(z_1(t)) \times \dots \times \mu_{ip}(z_p(t))}{\sum_{i=1}^r (\mu_{i1}(z_1(t)) \times \dots \times \mu_{ip}(z_p(t)))}$ e $\mu_{ij}(z_j(t))$ é a função de pertinência, correspondente ao conjunto fuzzy μ_{ij} , $i \in \mathbb{K}_r$ e $j \in \mathbb{K}_p$. O elemento α_i do vetor $\alpha = [\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_r]^T \in \Lambda_r$, definido em (1), é o peso normalizado de cada modelo local do sistema (A_i, B_i, E_i) definido em (2), para $i \in \mathbb{K}_r$.

Baseado em (Taniguchi et al., 2001), a representação do sistema é realizada considerando os limites inferiores e superiores das não linearidades do sistema. Os limites são calculados considerando uma região de operação conhecida do vetor de estado.

2.1 Região de Operação

O modelo fuzzy T-S (3) apenas descreve com precisão a dinâmica original do sistema não linear em uma região limitada do espaço de estados, denominada região de operação, que é dada por

$$\mathcal{X} := \{x(t) \in \mathbb{R}^{n_x} : |N_{(h)}(x(t))| \leq \phi_{(h)}, h \in \mathbb{K}_p\}, \quad (4)$$

sendo que $N = [N_{(1)}^T \dots N_{(p)}^T]^T \in \mathbb{R}^{p \times n_x}$ e $\phi = [\phi_{(1)} \dots \phi_{(p)}]^T \in \mathbb{R}^p$ são parâmetros conhecidos.

Considere a candidata a função de Lyapunov do tipo

$$V(x(t)) = x(t)^T P x(t), \quad (5)$$

e um elipsoide dado por

$$\mathcal{E}(V, 1) := \{x(t) \in \mathbb{R}^{n_x} : x(t)^T P x(t) \leq 1\}, \quad (6)$$

tal que o elipsoide $\mathcal{E}(V, 1)$ é dito ser um conjunto invariante se $\dot{V}(x(t)) < 0$, para $x(t) \in \mathcal{E}(V, 1)$ e $x(t) \neq 0$ (Cao and Lin, 2003).

3 Formulação do Problema

Considere que a entrada de controle $\bar{u}(t) = [\bar{u}_1 \bar{u}_2 \dots \bar{u}_{n_u}]^T \in \mathbb{R}^{n_u}$ está sujeita à saturação, tal que

$$\bar{u}_k(t) = \text{sat}(u_k) = \begin{cases} u_{kL} & \text{se } \epsilon u_k < u_{kL} \\ \epsilon u_k & \text{se } u_{kL} \leq \epsilon u_k \leq u_{kH} \\ u_{kH} & \text{se } u_{kH} < \epsilon u_k \end{cases} \quad (7)$$

sendo que $0 < \epsilon < 1$, $u(t) = [u_1 u_2 \dots u_{n_u}]^T \in \mathbb{R}^{n_u}$, $u_{kL} < 0 < u_{kH}$ e $k \in \mathbb{K}_{n_u}$. Em (Chen and Wang, 1988) é apresentada uma figura que ilustra a entrada de controle $\bar{u}_k(t)$ com mais detalhes.

Observação 1 Nesse trabalho, assim como em (Tseng and Chen, 2006), não são abordados os dois casos críticos $\epsilon = 0$ e $\epsilon = 1$ e, por simplicidade de projeto, considera-se que $u_{kL} = -u_{kH}$. Então, a partir de (7), note que

$$|u_k| \leq \frac{u_{kH}}{\epsilon}, \quad k \in \mathbb{K}_{n_u}. \quad (8)$$

Em diversos trabalhos que consideram saturação do sinal de controle, como por exemplo em (Tseng and Chen, 2006), é comum utilizar que

$$\left\| \bar{u}(t) - \frac{1+\epsilon}{2} u(t) \right\| \leq \left\| \frac{1-\epsilon}{2} u(t) \right\|, \quad (9)$$

observando que a desigualdade (9) é equivalente a

$$\begin{aligned} \left[\bar{u}(t) - \frac{1+\epsilon}{2} u(t) \right]^T \left[\bar{u}(t) - \frac{1+\epsilon}{2} u(t) \right] \\ \leq \left(\frac{1-\epsilon}{2} \right)^2 u(t)^T u(t). \quad (10) \end{aligned}$$

A prova da desigualdade (10) segue considerando que de (7), $\|\bar{u}(t)\| \leq \|u(t)\|$ e $\bar{u}(t)^T u(t) \leq u(t)^T u(t)$.

3.1 Controlador Chaveado

Considere a lei de controle chaveada dada por:

$$u(t) = K_\sigma x(t), \quad \sigma = \arg^* \min_{j \in \mathbb{K}_r} (x^T \bar{R}_j x), \quad (11)$$

sendo que $\arg^* \min_{j \in \mathbb{K}_r} (x^T \bar{R}_j x)$ representa o menor  ndice $\sigma \in \mathbb{K}_r$, tal que $x^T R_\sigma x = \min_{j \in \mathbb{K}_r} (x^T \bar{R}_j x)$.

Observe que o sistema (3) e (11) pode ser re-escrito como

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_z x(t) + B_z \bar{u}(t) + E_z w(t), \\ &= A_z x(t) + B_z \left(\frac{1+\epsilon}{2} u(t) \right) \\ &\quad + B_z \left(\bar{u}(t) - \frac{1+\epsilon}{2} u(t) \right) + E_z w(t), \\ &= \left(A_z + \frac{1+\epsilon}{2} B_z K_\sigma \right) x(t) \\ &\quad + B_z \left(\bar{u}(t) - \frac{1+\epsilon}{2} u(t) \right) + E_z w(t). \end{aligned} \quad (12)$$

Observação 2 A partir de (11), observe que a desigualdade $|u_k| \leq \frac{u_{kH}}{\epsilon}$, dada em (8), é equivalente a

$$\left| K_j^{(k)} x(t) \right| \leq \frac{u_{kH}}{\epsilon} \quad (13)$$

sendo que $j \in \mathbb{K}_r$, $k \in \mathbb{K}_{n_u}$ e $K_j^{(k)}$ representa a k -ésima linha de K_j . Então é definida a região Ω , dada por

$$\Omega := \left\{ x(t) \in \mathbb{R}^{n_x} : x(t)^T \left(K_j^{(k)} \right)^T \left(K_j^{(k)} \right) x(t) \leq \left(\frac{u_{kH}}{\epsilon} \right)^2 \right\}. \quad (14)$$

Assim como em (Tseng and Chen, 2006), uma condição necessária para que $x(t) \in \mathcal{E}(V, 1) \subset \Omega$ é dada por

$$\left(K_j^{(k)} \right) P^{-1} \left(K_j^{(k)} \right)^T \leq \left(\frac{u_{kH}}{\epsilon} \right)^2, \quad k \in \mathbb{K}_{n_u}, j \in \mathbb{K}_r. \quad (15)$$

3.2  ndice de Desempenho $\mathcal{H}_\infty$

Tendo em vista que além de estabilidade, um controlador deve assegurar um bom desempenho do sistema de malha fechada, um  ndice muito importante é a norma $\mathcal{H}_\infty$, que está relacionada com a capacidade do sistema realimentado de rejeitar perturbações de energia limitada. Sendo Q uma matriz de ponderação definida positiva, o sistema fuzzy T-S de malha fechada (12) tem um nível garantido $\mathcal{H}_\infty$ de atenuação $\gamma > 0$ se, além de ser assintoticamente estável, a seguinte desigualdade for satisfeita, para $x(0) = 0$ (Tseng and Chen, 2006):

$$\int_0^{t_f} x(t)^T Q x(t) dt \leq \gamma^2 \int_0^{t_f} w(t)^T w(t) dt. \quad (16)$$

4 Projeto de Controle $\mathcal{H}_\infty$ Chaveado com Saturação do Sinal de Controle

Teorema 1 Considere uma matriz definida positiva $Q \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ dada. Suponha a existência de uma matriz simétrica definida positiva $X \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, matrizes simétricas $Z_i, R_i \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ e

matrizes $M_j \in \mathbb{R}^{n_u \times n_x}$, para todo $i, j \in \mathbb{K}_r$, tais que, para $\mu > 0$, ocorra a factibilidade do seguinte problema de otimização:

$$\begin{aligned} \min \mu \\ \text{s.a. } X = X^T > 0, \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{bmatrix} B_i M_j + M_j^T B_i^T - Z_i - R_j & M_j^T & B_i \\ * & -\eta_1 I & 0 \\ * & * & -I \end{bmatrix} \prec 0, \quad (18)$$

$$\begin{bmatrix} A_i X + X A_i^T + Z_i + R_i & E_i & X \\ * & -\mu I & 0 \\ * & * & -Q^{-1} \end{bmatrix} \prec 0, \quad (19)$$

$$\begin{bmatrix} \eta_2 & M_j^{(k)} \\ * & X \end{bmatrix} \succeq 0, \quad (20)$$

$$\begin{bmatrix} \phi_{(h)}^2 & N_{(h)} X \\ * & X \end{bmatrix} \succeq 0, \quad (21)$$

$$\begin{bmatrix} -\beta^{-1} I & I \\ * & -X \end{bmatrix} \preceq 0. \quad (22)$$

Então, o sistema não linear (3), realimentado com a lei de controle chaveada sujeita à saturação (7) e (11), sendo que $K_j = \frac{2}{1+\epsilon} M_j X^{-1}$ e $\bar{R}_j = X^{-1} R_j X^{-1}$ para $j \in \mathbb{K}_r$, possui as seguintes propriedades:

1. se $w(t) = 0$ e $x(0) \in \mathcal{E}(V, 1)$, então $x(t) \in \mathcal{E}(V, 1) \subset \Omega$ e $x(t) \in \mathcal{E}(V, 1) \subset \mathcal{X}$, $\forall t \geq 0$ e o sistema realimentado (12)   localmente assintoticamente estável;
2. se $w(t) \neq 0$ e $x(0) = 0$, o custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ é igual a $\gamma = \sqrt{\mu} > 0$;
3. $\{x(t) \in \mathbb{R}^{n_x} : x^T(t) x(t) \leq \beta\} \subset \mathcal{E}(V, 1)$,

sendo que $\beta, \phi, N, \epsilon, u_{kH}, \eta_1$ e η_2 são parâmetros conhecidos e $\eta_1 = \frac{(1+\epsilon)^2}{(1-\epsilon)^2}$, $\eta_2 = \left(\frac{1+\epsilon}{2} \right)^2 \left(\frac{u_{kH}}{\epsilon} \right)^2$.

Prova: A partir de (1), lembrando que $\alpha_i \geq 0$, $\sum_i \alpha_i = 1$ e $\mu = \gamma^2$, multiplicando (18)-(20) por α_i e realizando a soma ria de $i = 1$ at  $i = r$, para $j = \sigma$ obt m-se as desigualdades

$$\begin{bmatrix} B_\sigma M_\sigma + M_\sigma^T B_\sigma^T - Z_\sigma - R_\sigma & M_\sigma^T & B_\sigma \\ * & -\eta_1 I & 0 \\ * & * & -I \end{bmatrix} \prec 0, \quad (23)$$

$$\begin{bmatrix} A_\sigma X + X A_\sigma^T + Z_\sigma + R_\sigma & E_\sigma & X \\ * & -\gamma^2 I & 0 \\ * & * & -Q^{-1} \end{bmatrix} \prec 0, \quad (24)$$

$$\begin{bmatrix} \eta_2 & M_\sigma^{(k)} \\ * & X \end{bmatrix} \succeq 0. \quad (25)$$

Primeiramente são apresentadas duas desigualdades úteis para o desenvolvimento das demonstrações dos Itens 1 e 2 do teorema. Aplicando o complemento de Schur duas vezes na desigualdade (23) tem-se

$$B_\sigma M_\sigma + M_\sigma^T B_\sigma^T - Z_\sigma - R_\sigma + \frac{1}{\eta_1} M_\sigma^T M_\sigma + B_\sigma B_\sigma^T \prec 0,$$

sendo que $M_\sigma = \left(\frac{1+\epsilon}{2}\right) K_\sigma X$, $Z_z = X \bar{Z}_z X$, $R_\sigma = X \bar{R}_\sigma X$ e $\eta_1 = \frac{(1+\epsilon)^2}{(1-\epsilon)^2}$, obtém-se

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1+\epsilon}{2}\right) B_z K_\sigma X + \left(\frac{1+\epsilon}{2}\right) X K_\sigma^T B_z^T - X \bar{Z}_z X \\ & - X \bar{R}_\sigma X + \left(\frac{1-\epsilon}{2}\right)^2 X K_\sigma^T K_\sigma X + B_z B_z^T < 0. \end{aligned} \quad (26)$$

Pré e pós-multiplicando (26) por X^{-1} , sendo que $X^{-1} = P$, para $x \neq 0$ tem-se

$$\begin{aligned} & x^T \bar{Z}_z x + x^T \bar{R}_\sigma x \\ & > \frac{1+\epsilon}{2} x^T P B_z K_\sigma x + \frac{1+\epsilon}{2} x^T K_\sigma^T B_z^T P x \\ & + \left(\frac{1-\epsilon}{2}\right)^2 x^T K_\sigma^T K_\sigma x + x^T P B_z B_z^T P x \\ & \geq \frac{1+\epsilon}{2} x^T P B_z K_\sigma x + \frac{1+\epsilon}{2} x^T K_\sigma^T B_z^T P x \\ & + \left(\bar{u} - \frac{1+\epsilon}{2} K_\sigma x\right)^T \left(\bar{u} - \frac{1+\epsilon}{2} K_\sigma x\right) \\ & + x^T P B_z B_z^T P x \\ & \geq \left(\frac{1+\epsilon}{2} B_z u - \frac{1+\epsilon}{2} B_z u + B_z \bar{u}\right)^T P x \\ & + x^T P \left(\frac{1+\epsilon}{2} B_z u - \frac{1+\epsilon}{2} B_z u + B_z \bar{u}\right) \\ & = x^T P B_z \bar{u} + \bar{u}^T B_z^T P x, \end{aligned} \quad (27)$$

sendo que (10) foi utilizada para obter a segunda desigualdade e a propriedade $U^T U + V^T V \geq U^T V + V^T U$ foi utilizada para obter terceira desigualdade, sendo $U = B_z^T P x$ e $V = \left(\bar{u} - \frac{1+\epsilon}{2} u\right)$.

A partir de (1) e (11), note que

$$x^T \bar{R}_\sigma x = \min_{j \in \mathbb{K}_r} (x^T \bar{R}_j x) \leq \sum_{i=1}^r \alpha_i x^T \bar{R}_i x = x^T \bar{R}_z x. \quad (28)$$

• Demonstração do Item 1

A partir de (24), tem-se que

$$A_z X + X A_z^T + Z_z + R_z < 0. \quad (29)$$

Pré e pós-multiplicando (29) por X^{-1} , sendo que $X^{-1} = P$, $Z_z = X \bar{Z}_z X$ e $R_z = X \bar{R}_z X$, obtém-se

$$P A_z + A_z^T P + \bar{Z}_z + \bar{R}_z < 0. \quad (30)$$

Para $x \neq 0$, note que (30) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} & 0 > x^T P A_z x + x^T A_z^T P x + x^T \bar{Z}_z x + x^T \bar{R}_z x \\ & \geq x^T P A_z x + x^T A_z^T P x + x^T \bar{Z}_z x + x^T \bar{R}_\sigma x \\ & \geq x^T P A_z x + x^T A_z^T P x + x^T P B_z \bar{u} + \bar{u}^T B_z^T P x \end{aligned} \quad (31)$$

sendo que utilizou-se (28) e (27) para obter a segunda e a terceira desigualdade, respectivamente.

A partir de (5), (12) e (31), para $w = 0$, observe que $\dot{V}(x) < 0$. Ou seja, o sistema não linear (3) realimentado com a lei de controle (11) é assintoticamente estável. Por fim, deve-se analisar a restrição da estabilidade local. Então, observe que aplicando o complemento de Schur em (25) obtém-se (15) e de acordo com a Observação 2 a condição (15) garante que $x(t) \in \mathcal{E}(V, 1) \subset \Omega$ para $t \geq 0$.

A partir de (21), tem-se que $\mathcal{E}(V, 1) \in \mathcal{X}$ (Klug et al., 2015). Logo, para $w = 0$, qualquer trajetória do vetor de estado $x(t)$, com condição inicial $x(0) \in \mathcal{E}(V, 1)$, estará dentro do elipsoide $\mathcal{E}(V, 1)$ e consequentemente $x(t) \in \mathcal{X}$ para $t \geq 0$.

• Demonstração do Item 2

Agora, aplicando o complemento de Schur em (24), tem-se

$$\begin{bmatrix} A_z X + X A_z^T + Z_z + R_z + X Q X & E_z \\ * & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0, \quad (32)$$

Pré e pós-multiplicando (32) por $\begin{bmatrix} X^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$, sendo que $Z_z = X \bar{Z}_z X$, $R_\sigma = X \bar{R}_\sigma X$ e $X^{-1} = P$, obtém-se

$$\begin{bmatrix} P A_z + A_z^T P + \bar{Z}_z + \bar{R}_z + Q & P E_z \\ * & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0, \quad (33)$$

Para $x \neq 0$ e $w \neq 0$, tem-se

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P A_z + A_z^T P + \bar{Z}_z + \bar{R}_z + Q & P E_z \\ * & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix} \\ & = x^T P A_z x + x^T A_z^T P x + x^T \bar{Z}_z x + x^T \bar{R}_z x \\ & + x^T P E_z w + w^T E_z^T P x + x^T Q x - \gamma^2 w^T w < 0. \end{aligned} \quad (34)$$

Note que a desigualdade (34) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} & 0 > x^T P A_z x + x^T A_z^T P x + x^T \bar{Z}_z x + x^T \bar{R}_z x \\ & + x^T P E_z w + w^T E_z^T P x + x^T Q x - \gamma^2 w^T w \\ & \geq x^T P A_z x + x^T A_z^T P x + x^T \bar{Z}_z x + x^T \bar{R}_\sigma x \\ & + x^T P E_z w + w^T E_z^T P x + x^T Q x - \gamma^2 w^T w \\ & \geq x^T P A_z x + x^T A_z^T P x + \bar{u}^T B_z^T P x + x^T P B_z \bar{u} \\ & + x^T P E_z w + w^T E_z^T P x + x^T Q x - \gamma^2 w^T w \end{aligned} \quad (35)$$

sendo que utilizou-se (28) e (27) para obter a segunda e a terceira desigualdade, respectivamente.

A partir de (5) e (12), para $w \neq 0$, observe que (35) é equivalente a

$$\dot{V}(x) + x^T Q x - \gamma^2 w^T w < 0, \quad (36)$$

e integrando (36) de 0 até t_f , tem-se

$$\begin{aligned} & \int_0^{t_f} x(t)^T Q x(t) dt - \int_0^{t_f} \gamma^2 w(t)^T w(t) dt \\ & < V(x(0)) - V(x(t_f)) \leq V(x(0)) = 0, \end{aligned} \quad (37)$$

obtendo-se

$$\int_0^{t_f} x(t)^T Q x(t) dt = \gamma^2 \int_0^{t_f} w(t)^T w(t) dt, \quad (38)$$

ou seja, se $w \neq 0$ e $x(0) = 0$, o custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ é igual a $\gamma > 0$.

• Demonstração do Item 3

Aplicando o complemento de Schur em (22) e pré e pós-multiplicando o resultado por x^T e x , respectivamente, obtém-se:

$$V(x) \leq \beta^{-1} x^T x \Leftrightarrow V(x) - 1 \leq \beta^{-1} (x^T x - \beta)$$

que implica em $\{x(t) \in \mathbb{R}^n : x^T(t)x(t) \leq \beta\} \subset \mathcal{E}(V, 1)$. Logo, aumentando o valor de β , o elipsoide será ampliado (Lee et al., 2012). Concluindo a prova de todos os itens do Teorema 1. $\square$

5 Exemplo Numérico

Para exemplificar o método proposto, considere um pêndulo invertido com a dinâmica dada por (Tseng and Chen, 2006; Chiu, 2014):

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ f(z) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ g(z) \end{bmatrix} \bar{u}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} w(t), \quad (39)$$

com

$$z = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad f(z) = \frac{\text{sinc}(\frac{x_1}{\pi})(g - \theta_1 x_2^2 \cos(x_1))}{\frac{4l}{3} - \theta_1 \cos^2(x_1)},$$

$$g(z) = \frac{-\theta_0 \cos(x_1)}{\frac{4l}{3} - \theta_1 \cos^2(x_1)}, \quad \text{sinc}\left(\frac{x_1}{\pi}\right) = \frac{\text{sen}(\frac{x_1}{\pi})}{\frac{x_1}{\pi}}$$

sendo que x_1 representa o ângulo (*rad*) que a haste do pêndulo forma com a vertical, x_2 é a velocidade angular (*rad/s*), $\bar{u}(t)$ é o sinal de controle sujeito à saturação (N), $g = 9,8m/s^2$ é a aceleração da gravidade, $\theta_0 = 1/(m + M)$, $\theta_1 = ml\theta_0$, $m = 0,3kg$ é a massa do pêndulo, $M = 0,6kg$ é a massa do carro e $l = 0,5m$ é a distância entre o centro de massa da haste do pêndulo até sua extremidade.

Para utilizar a metodologia proposta em (Taniguchi et al., 2001) é necessário calcular os valores máximos e mínimos das funções não lineares $f(z)$ e $g(z)$. Logo, considerando que as funções não lineares pertencem ao domínio D , tal que

$$D = \left\{ z \in \mathbb{R}^2 : -\frac{\pi}{3} \leq x_1 \leq \frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{2} \leq x_2 \leq \frac{\pi}{2} \right\},$$

os valores máximos e mínimos das não linearidades são dados por $15,0683 \leq f(z) \leq 19,6000$ e $-2,2222 \leq g(z) \leq -0,8889$. Então, utilizando a metodologia proposta em (Taniguchi et al., 2001), o sistema dado em (39) pode ser representado através do modelo fuzzy T-S dado em (3), sendo que

$$A_1 = A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 15,0683 & 0 \end{bmatrix}, B_1 = B_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -2,2222 \end{bmatrix},$$

$$A_3 = A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 19,6000 & 0 \end{bmatrix}, B_2 = B_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ -0,8889 \end{bmatrix},$$

$$E_1 = E_2 = E_3 = E_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^T, \quad (40)$$

A região de operação $\mathcal{X}$, na qual o modelo fuzzy T-S é válido, é dada em (4), sendo que $p = 2$, $N = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $\phi = \begin{bmatrix} \frac{\pi}{3} & \frac{\pi}{2} \end{bmatrix}^T$. A região Ω , na qual do sinal de controle não possui saturação, é dada em (14), sendo que $u_{kH} = 5$ e $\epsilon = 0,6$.

Considere $Q = I$, $\beta = 0,014$, os modelos locais (A_i, B_i, E_i) , $i \in \mathbb{K}_4$, dados em (40) e os parâmetros mencionados anteriormente que limitam as regiões $\mathcal{X}$ e Ω . A solução do problema de otimização, proposto no Teorema 1, apresenta $\gamma = 2,9925$. A matriz simétrica definida positiva P , os controladores K_j e as matrizes simétricas $\bar{R}_j$, $j \in \mathbb{K}_4$, são dados por:

$$P = \begin{bmatrix} 67,72 & 15,75 \\ 15,75 & 4,07 \end{bmatrix}, \quad K_1 = \begin{bmatrix} 61,35 & 15,51 \\ 66,76 & 16,03 \end{bmatrix},$$

$$K_3 = \begin{bmatrix} 62,72 & 15,32 \end{bmatrix}, \quad K_4 = \begin{bmatrix} 67,77 & 14,95 \end{bmatrix},$$

$$\bar{R}_1 = \begin{bmatrix} 4084588086,91 & 969438321,88 \\ 969438321,88 & 229973139,40 \end{bmatrix},$$

$$\bar{R}_2 = \begin{bmatrix} 4084587501,81 & 969438190,19 \\ 969438190,19 & 229973110,39 \end{bmatrix},$$

$$\bar{R}_3 = \begin{bmatrix} 4084587987,36 & 969438308,92 \\ 969438308,92 & 229973139,33 \end{bmatrix},$$

$$\bar{R}_4 = \begin{bmatrix} 4084587437,84 & 969438189,18 \\ 969438189,18 & 229973114,47 \end{bmatrix}. \quad (41)$$

Utilizando a lei de controle chaveada (11), com os controladores K_j e as matrizes simétricas $\bar{R}_j$ dados em (41), para $j \in \mathbb{K}_r$, foi realizada uma simulação do sistema (39). A entrada exógena $w(t)$ é igual a uma onda quadrada, com amplitude de 1,4 e frequência de 1Hz, para $0 \leq t < 4$ e $w(t)$ é igual a zero para $4 \leq t \leq 6$.

A resposta temporal do vetor de estado $x(t)$, a lei de controle chaveada $\bar{u}(t)$ e as regiões $\mathcal{X}$ e Ω são apresentadas nas Figuras 1, 2 e 3, respectivamente. Adicionalmente, além dos resultados apresentados nessas figuras, a simulação permitiu calcular que $\frac{\int_0^6 x(t)^T Q x(t) dt}{\int_0^6 w(t)^T w(t) dt} = 0,2865$.

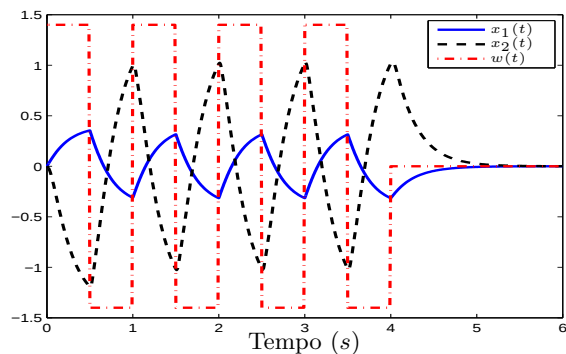


Figura 1: Trajetórias da posição angular (*rad*), velocidade angular (*rad/s*) e da entrada exógena $w(t)$.

Analisando os resultados da simulação, observa-se que as propriedades do Teorema 1 são válidas. Ou seja, para $w \neq 0$ o custo garantido

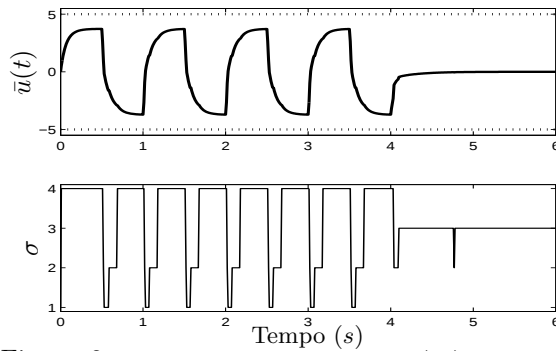


Figura 2: Lei de controle chaveada (11): sinal de controle $\bar{u}(t)$ e lei de chaveamento σ .

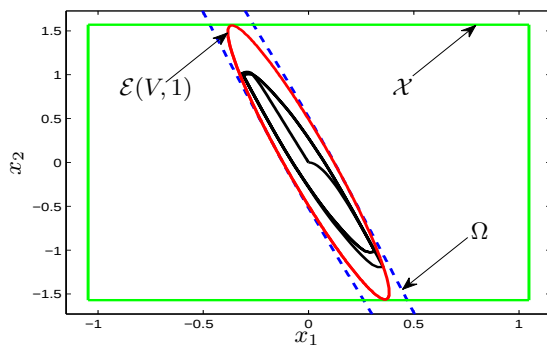


Figura 3: Plano de fase do vetor de estado $x(t)$ (em preto) e regiões $\mathcal{E}(V,1)$, $\mathcal{X}$ e Ω .

$\mathcal{H}_\infty$ foi respeitado, pois $\frac{\int_0^6 x(t)^T Q x(t)}{\int_0^6 w(t)^T w(t)} = 0,2865 \leq \gamma = 2,9925$. Além disso, tem-se que $\mathcal{E}(V,1) \subset \mathcal{X}$ e $\mathcal{E}(V,1) \subset \Omega$, tal que para uma condição inicial $x(0) \in \mathcal{E}(V,1)$ o vetor de estado $x(t)$ permaneceu dentro do elipsoide invariante $\mathcal{E}(V,1)$ e consequentemente dentro das regiões Ω e $\mathcal{X}$. Ao projetar os controladores considerando saturação do sinal de controle, o método proposto reduziu a norma dos controladores, que geralmente são grandes em projetos de controle $\mathcal{H}_\infty$.

6 Conclusões

Este artigo propôs um projeto de controle $\mathcal{H}_\infty$ chaveado, para uma classe de sistemas não lineares descritos por modelo fuzzy T-S, com sinal de controle sujeito   saturação. O método proposto assegura a permanência do vetor de estado dentro de um elipsoide invariante que está contido na região de operação, na qual o modelo fuzzy T-S   válido, considerando uma entrada exógena nula. Já para uma entrada exógena não nula, o custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ foi respeitado. Ao restringir o elipsoide invariante dentro de uma região de saturação, observou-se que os controladores apresentaram ganhos compatíveis com as restrições do atuador do sistema, tornando factível uma possível implementação prática.

Agradecimentos

Os autores agradecem a CAPES, ao CNPq e a FAPESP (Processo: 2011/17610-0) pelo apoio financeiro.

Referências

- Cao, Y.-Y. and Lin, Z. (2003). Robust stability analysis and fuzzy-scheduling control for nonlinear systems subject to actuator saturation, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* **11**(1): 57–67.
- Chen, B. S. and Wang, S. S. (1988). The stability of feedback control with nonlinear saturating actuator: time domain approach, *IEEE Transactions on Automatic Control* **33**(5): 483–487.
- Chiu, C.-S. (2014). Dynamic decoupling approach to robust T-S fuzzy model-based control, *Fuzzy Systems, IEEE Transactions on* **22**(5): 1088–1100.
- Klug, M., Castelan, E. B. and Coutinho, D. (2015). A T-S fuzzy approach to the local stabilization of nonlinear discrete-time systems subject to energy-bounded disturbances, *Journal of Control, Automation and Electrical Systems* **26**(3): 191–200.
- Klug, M., Castelan, E. and Coutinho, D. (2013). Control of nonlinear discrete-time systems subject to energy bounded disturbances using local t-s fuzzy models, *Decision and Control (CDC), 2013 IEEE 52nd Annual Conference on*, pp. 7426–7431.
- Lee, D. H., Park, J. B. and Joo, Y. H. (2012). A fuzzy lyapunov function approach to estimating the domain of attraction for continuous-time Takagi-Sugeno fuzzy systems, *Information Sciences* **185**(1): 230 – 248.
- Souza, W., Teixeira, M., Cardim, R. and Assun  o, E. (2014). On switched regulator design of uncertain nonlinear systems using Takagi–Sugeno fuzzy models, *Fuzzy Systems, IEEE Transactions on* **22**(6): 1720–1727.
- Tanaka, K. and Wang, H. O. (2001). *Fuzzy Control Systems Design and Analysis: A Linear Matrix Inequality Approach*.
- Taniguchi, T., K., Ohatake, H. and Wang, H. O. (2001). Model construction, rule reduction, and robust compensation for generalized form of Takagi-Sugeno fuzzy systems, *IEEE Trans. Fuzzy Syst.* **9**(4): 525–537.
- Tseng, C.-S. and Chen, B.-S. (2006). $\mathcal{H}_\infty$ fuzzy control design for nonlinear systems subject to actuator saturation, *2006 IEEE International Conference on Fuzzy Systems*, pp. 783–788.