

UM MODELO HÍBRIDO DE BUSCA HARMÔNICA E OTIMIZAÇÃO POR ENXAME DE PARTÍCULAS APLICADO NO PROJETO DO CONTROLADOR LQR

LUIS B. P. NASCIMENTO, VANDILBERTO P. PINTO, MÁRCIO A. B. AMORA, RÔMULO N. C. ALMEIDA

*Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica e de Computação, Universidade Federal do Ceará,
Campus de Sobral*

Rua Coronel Estanislau Frota, s/n, Sobral – Ceará. 620010-560

E-mails: luisbrunu@gmail.com, vandilberto@yahoo.com.br, marcio@dee.ufc.br, rnunes@dee.ufc.br

Abstract— This article presents the application of the Harmony Search Algorithm and a hybrid version of Harmonica Search Algorithm with Particle Swarm Optimization to the automatic weighting of matrices of Linear Quadratic Regulator. This controller has excellent properties of robust stability, however, the implementation this one has a related difficulty defining two weighting matrices Q and R . A Harmony Search Algorithm was implemented and applied in the search of the weighting matrices. In order to obtain a better performance, a implementation of Particle Swarm Optimization was used to provide a self-adaptation in one of the Harmonic Search parameters. When applying the search, both the standard version and the hybrid version showed good results, however, the hybrid version produced better results in two aspects: convergence time and minimizing the evaluation function value.

Keywords— Harmony Search Algorithm, Particle Swarm Optimization, Optimal Control, Linear Quadratic Regulator, Intelligent Control

Resumo— O presente artigo apresenta a aplicação do Algoritmo de Busca Harmônica e de uma versão híbrida de Busca Harmônica e Otimização por Enxame de Partículas na determinação otimizada das matrizes de ponderação do Regulador Linear Quadrático. Esse controlador possui excelentes propriedades de estabilidade robusta, entretanto, seu projeto possui uma dificuldade relacionada à definição de duas matrizes, Q e R . Um algoritmo de Busca Harmônica padrão foi implementado e aplicado na busca das matrizes. A fim de obter uma melhor performance, foi utilizada a técnica Otimização por Enxame de Partículas para prover uma auto-adaptação em um dos parâmetros da Busca Harmônica. Ao aplicar no problema, tanto a versão padrão quanto a versão híbrida apresentaram bons resultados, contudo, a versão híbrida obteve melhores resultados em três aspectos: Tempo de convergência, minimização do valor da função de avaliação e número de iterações.

Palavras-chave— Busca Harmônica, Otimização por Enxame de Partículas, Controle Ótimo, Regulador Linear Quadrático, Controle Inteligente

1 Introdução

O Regulador Linear Quadrático (*Linear Quadratic Regulator* - LQR) é uma importante técnica de controle ótimo que possui um papel primordial na teoria do controle moderno. O controlador LQR possui excelentes propriedades de estabilidade robusta, apresenta margens de ganho infinito e margens de fase com 60° , e minimiza um determinado índice de desempenho, o que garante um sistema otimizado com o menor gasto possível de energia (Maciejowski, 1989).

São constantes as pesquisas envolvendo o LQR, principalmente aplicado a complexos sistemas de controle (Bayani e Hajipour, 2013; Inumoh et al., 2014; Wei e Yao, 2015; Mazumdar et al., 2015; Rui et al., 2015; Brasel, 2015; Cheema et al., 2016; Singh e Pal, 2016).

Mesmo com inúmeras vantagens, o desempenho do LQR depende fortemente de dois componentes essenciais, suas matrizes de ponderação Q e R . Elas permitem que o controlador atenda as especificações do projeto, entretanto, tratam-se de valores com um grande espaço de busca, e definir essas matrizes pode se tornar um desafio tedioso e complexo, comprometendo os prazos definidos no projeto por conta da paralisia gerada (Gbaupé, 1972; Stein, 1979; Medanic, Tharp e Perkins, 1988). Visando minimizar os percal-

ços causados por essa problemática, vem se consolidando o uso de diversos algoritmos de Inteligência Computacional (IC) para otimizar essa busca, tais como Algoritmo Genético (Gupta e Tripathi, 2014), Recozimento Simulado (Jaleel e Francis, 2013), entre outros.

A técnica Otimização por Enxame de Partículas (*Particle Swarm Optimization* – PSO) tem sido aplicada em diversos trabalhos, entretanto, sua forma padrão apresenta problemas de convergência prematura (Nezami, Bahrampour e Jamshidlou, 2013), o que não é favorável a um problema com variáveis de decisão fortemente acopladas.

Um método de busca que vem ganhando destaque nos últimos anos devido a sua facilidade de implementação e capacidade de identificar regiões de alto desempenho dentro do espaço de busca em um tempo razoável é o Algoritmo de Busca Harmônica (*Harmony Search* - HS), uma nova meta-heurística baseada em conceitos musicais de improvisação (Geem, Kim e Loganathan, 2001), que tem sido aplicada nos mais diversos problemas (Manjarres et al., 2013), inclusive na determinação das matrizes Q e R , proposta apresentada por (Nascimento et al., 2015a; 2015b).

O presente trabalho apresenta a aplicação do algoritmo de Busca Harmônica na determinação das melhores matrizes Q e R do controlador LQR. A fim de impulsionar o poder de otimização do HS, o PSO

foi aplicado na adaptação automática de um de seus parâmetros.

As próximas seções deste artigo estarão organizadas da seguinte maneira: na seção 2 serão abordados os conceitos que envolvem o algoritmo HS. A seção 3 abordará uma introdução ao PSO. Na seção 4 será apresentado o Regulador Linear Quadrático e na seção 5 será apresentado o como foi projetado o algoritmo HS+PSO aplicados ao LQR. A seção 6 mostrará os resultados das simulações, assim como a planta utilizada como teste e por fim, na seção 7, serão expostas as conclusões acerca do trabalho desenvolvido.

2 Algoritmo de Busca Harmônica

A Busca Harmônica (Geem, Kim e Loganathan, 2001), é uma meta-heurística de otimização baseada em população que foi inspirada no processo de improvisação musical onde os músicos tentam buscar as notas que melhor compõem uma harmonia perfeita.

Uma comparação entre o processo de improvisação musical e um problema de otimização é feito em (Geem, 2010), onde um trio de Jazz procura realizar uma composição através de um improviso. O saxofonista, o baixista e o guitarrista compõem as variáveis de decisão do problema; as notas tocadas nos instrumentos representam os intervalos de valores de cada variável; as combinações das notas representam as possíveis soluções e o ato de apreciação dos ouvintes representa a função de avaliação ou função objetivo do problema, como é mostrado na Figura 1.



Figura 1 – Comparação entre o processo de improvisação musical e otimização

O HS padrão pode ser descrito em cinco passos:

1. Inicialização dos parâmetros.
2. Inicialização da Memória Harmônica
3. Improviso de uma nova harmonia;
4. Atualização da Memória Harmônica;
5. Verificação do critério de parada.

Os parâmetros são o tamanho da memória harmônica (*Harmony Memory Size* - HMS), taxa de consideração da memória harmônica (*Harmony Memory Consideration Rate* - HMCR), taxa de ajuste dos valores (*Pitch Adjustment Rate* - PAR), largura de banda (*Bandwidth* - BW) e número de máximo de improvisações (*Number of improvisations* - NI).

O HS possui o mesmo conceito dos algoritmos evolucionários sobre geração randômica de população. A Memória Harmônica (HM) possui um conjunto de HMS harmonias,

$$HM = \begin{bmatrix} x_1^1 & \cdots & x_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{HMS} & \cdots & x_n^{HMS} \end{bmatrix} \quad (1)$$

onde, x é uma variável de decisão do vetor de harmonia, n é o número de variáveis utilizadas para encontrar o valor da função de avaliação f do problema.

A cada iteração do algoritmo é gerada um novo vetor de harmonia, $x' = (x'_1, x'_2, \dots, x'_N)$, que corresponde a uma solução candidata. Cada elemento x é obtido a partir de harmonias contidas na HM, selecionadas por uma probabilidade de HMCR:

$$x'_i = \begin{cases} x'_i \in \{x_1^1, \dots, x_i^{HMS}\} & P = \text{HMCR} \\ x'_i \in X_i & P = (1 - \text{HMCR}) \end{cases} \quad (2)$$

tal que X_i é um conjunto com a faixa de valores possíveis para cada variável de decisão e “ $P = \text{HMCR}$ ”, lê-se probabilidade de HMCR.

Cada componente obtido é testado para determinar se deve ser ajustado. Esse ajuste é dado com base em BW e com probabilidade de PAR:

$$x'_i = x'_i \pm r \times BW, \quad r \in (0,1) \quad (3)$$

Se o vetor gerado for melhor que a pior harmonia da HM, a pior é substituída. O algoritmo encerra de acordo com um critério, que pode ser o número de iterações ou se a harmonia gerada atende aos critérios do problema.

3 Otimização por Enxame de Partículas

O PSO (Kennedy e Eberhart, 1995) é uma técnica de otimização estocástica baseada em população e inspirada no comportamento de animais como voo de pássaros, abelhas, nado de cardume de peixes, entre outros.

Nesse método é criado um conjunto de partículas que correspondem às possíveis soluções. Cada partícula possui seu vetor de velocidade, ambos inicializados aleatoriamente. Após inicializadas, as partículas são avaliadas.

O algoritmo considera a melhor posição de cada partícula e uma melhor posição global. A cada iteração do algoritmo, é calculada a velocidade das partículas (4) e suas novas posições (5).

$$v_i(t+1) = v_i(t) + c_1(p_i - x_i(t))r_1 + c_2(g - x_i(t))r_2 \quad (4)$$

$$x_i(t+1) = x_i(t) + v_i(t+1) \quad (5)$$

Nas equações da velocidade (4) e do movimento (5), t e $t+1$ representam duas sucessivas iterações, v_i é o vetor de velocidade da partícula x_i . p_i é chamado de *personal best* de uma partícula, que corresponde à melhor posição de uma determinada partícula, enquanto g , *global best*, é a melhor posição que já foi ocupada por alguma partícula. As constantes c_1 e c_2 são valores reais, usualmente $0 \leq c_1, c_2 \leq 4$ e $r_1, r_2 \in (0,1)$.

4 Regulador Linear Quadrático

O LQR é um controlador ótimo com excelentes características de desempenho e de implementação, que garante a estabilidade frente a pequenas perturbações. Considere a equação linear invariante no tempo:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned} \quad (6)$$

Esse controlador objetiva encontrar o vetor de controle ótimo que minimize a função de custo (7), representado pelo índice de desempenho quadrático J , que harmoniza a eficácia da regulação com o uso do vetor de controle.

$$J = \int_0^{\infty} [x^T(t)Q(t)x(t) + u^T(t)R(t)u(t)]dt \quad (7)$$

Em (6) tem-se A , B , C e D , matrizes relacionadas ao modelo do sistema para a variável de estado $x(t)$, e a variável de controle $u(t)$, respectivamente. Em (7), Q , uma matriz semidefinida positiva ($Q \geq 0$) e R , uma matriz positiva definida ($R > 0$). O LQR permite determinar uma matriz K de ganho ótimo através da lei de controle:

$$u(t) = -Kx(t) \quad (8)$$

sendo

$$K = R^{-1}B^TP \quad (9)$$

A matriz P é determinada a partir da resolução da Equação Algébrica de Riccati:

$$A^TP + PA - PBR^{-1}B^TP + Q = 0 \quad (10)$$

A partir dos ganhos obtidos com a matriz aumentada (Ogata, 2011), pode-se obter o ganho integral (K_i), definido por $K = [K_r \ K_i]$. Os ganhos K_r e K_i podem ser aplicados ao sistema linear de controle, por meio do modelo matricial dado por:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{e}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK_r & BK_i \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ e(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} r(t) \quad (11)$$

5 Modelagem do LQR Otimizado

5.1 Busca Harmônica

5.1.1 Codificação da Harmonia

A fim de simplificar a implementação do algoritmo, utilizou-se a abordagem empregada por (Bryson e Ho, 1975), onde considerou-se os valores diagonais das matrizes Q e R , ou seja, $Q = \text{diag}([Q_1, Q_2, \dots, Q_{n_A}])$ e $R = \text{diag}([R_1, \dots, R_{n_B}])$, sendo n_A ordem do sistema e n_B o número de entradas.

Dessa forma, o vetor de harmonia é dado por:

$$QR_i = [Q_1, Q_2, \dots, Q_{n_A}, R_1, \dots, R_{n_B}] \quad (12)$$

5.1.2 Função de Avaliação

Para esse problema, o HS deve minimizar o erro correspondente ao somatório do módulo dos resíduos gerados entre os valores dos parâmetros definidos nos critérios de projeto, dessa forma, cada harmonia receberá um valor de erro correspondente, definido por:

$$f(QR_i) = |Tr - Tr_i| + |Ts - Ts_i| + |Mp - Mp_i| + |Es - Es_i| \quad (13)$$

Os parâmetros da função (13) representam o tempo de subida (*Rise Time* – Tr), tempo de regime estacionário (*Settling Time* – Ts), sobressinal (*Maximum Peak* – Mp) e erro em regime estacionário (Es).

5.1.3 Tratamento do Parâmetro PAR

Para o propósito do LQR, considerou-se um vetor PAR, contendo os parâmetros para cada variável de decisão.

$$PAR_i = [PAR_1, PAR_2, \dots, PAR_{QR_n}] \quad (14)$$

5.2 Otimização por Enxame de Partículas

Foi implementado um algoritmo PSO para determinar os melhores parâmetros de ajuste para o Algoritmo HS. As partículas do PSO são definidas na Equação (14), e a função de avaliação das partículas é a mesma do HS, Equação (13).

6 Resultados das Simulações

A fim de testar a eficácia dos algoritmos, foi considerado o modelo linear do helicóptero Chinook CH-47 (Doyle e Stein, 1981), buscando controlar duas medidas: velocidade vertical (V_z) e ângulo de arfagem (θ).

$$A = \begin{bmatrix} -0,02 & 0,005 & 2,4 & -32 \\ -0,14 & 0,44 & -1,3 & -30 \\ 0 & 0,018 & -1,6 & 1,2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x \quad B = \begin{bmatrix} 0,14 & -0,12 \\ 0,36 & -8,6 \\ 0,35 & 0,009 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} u$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0,3048 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 57,3 \end{bmatrix} x$$

Os polos do sistema em malha aberta são $\{-2,2279 \ 0,0652 \ 0,4913 \pm 0,4151j\}$. De acordo com os critérios adotados em (Hartmann, Stein e Pratt, 1979), os valores tomados como base para os parâmetros de resposta transitória estão descritos na Tabela 1.

Tabela 1. Especificações do projeto CH-47.

Saída	Tr	Ts	Mp
Θ	1,5	4,0	1,05
Vz	2,0	4,0	0

Foi aplicado no problema um algoritmo de Busca Harmônica padrão e a Busca Harmônica híbrida com Otimização por Enxame de Partículas (HSPSO) para fins de comparação. Os parâmetros utilizados nos algoritmos são apresentados nas Tabelas 2 e 3.

Tabela 2. Parâmetros do HS.

HMCR	BW	HMS	NI	PAR
0,9	30	50	1000	0,8

Tabela 3. Parâmetros do PSO.

Nº Partículas	C1	C2
20	2	2

O critério de parada utilizado no algoritmo foi o número de iterações = 1000, assim foi possível avaliar o algoritmo pela velocidade da convergência.

6.1 Resultados com Busca Harmônica

O HS obteve bons resultados, e com uma performance razoavelmente eficaz, foi capaz de otimizar a busca das matrizes Q e R , obtendo $Q = \text{diag}([0,0045 \ 0,5066 \ 1,6449 \ 0,6632 \ 4,2762 \ 1,2132])$ e $R = \text{diag}([7,2699 \ 0,0512])$.

A Figura 2 apresenta uma simulação com a aplicação do HS e a Figura 3 apresenta o gráfico de convergência dessa simulação.

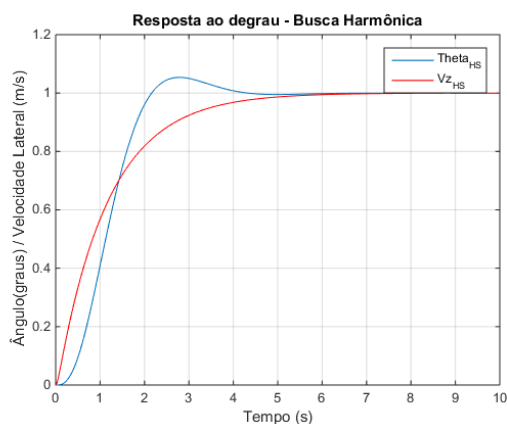


Figura 2 – Resposta do sistema ao degrau unitário.

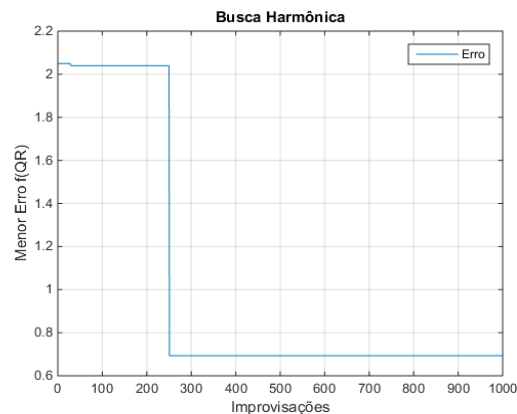


Figura 3 – Gráfico da convergência do algoritmo. Decaimento da função de avaliação do HS.

A Tabela 4 apresenta os valores obtidos na simulação com o algoritmo HS.

Tabela 4. Análise da Convergência com HS.

Menor Erro $f(QR)$	Tempo (s)	Nº de Iterações
0,6934	34,3587	1000

Pode ser observado na Figura 2 que, na simulação obtida com o algoritmo HS, o sistema foi controlado, com poucos segundos para estabilização em ambas as saídas. O resultado do controle foi satisfatório, tendo em vista que o esperado para esse sistema é um comportamento próximo ao apresentado.

A Figura 3 e a Tabela 4 apresentam informações relacionadas à convergência do algoritmo HS na busca das matrizes Q e R . O algoritmo, embora atendendo as necessidades do problema, não apresentou uma convergência com um custo baixo.

6.2 Resultados com Busca Harmônica e PSO

O HSPSO obteve ótimos resultados, e com uma performance eficaz, sendo capaz de otimizar a busca das matrizes Q e R , obtendo $Q = \text{diag}([0,0003 \ 0,0948 \ 8,5310 \ 2,0605 \ 1,4284 \ 0,8196])$ e $R = \text{diag}([0,7130 \ 1,6954])$. A Figura 4 mostra uma simulação com a aplicação do HSPSO e a Figura 5 apresenta o gráfico de convergência dessa simulação.

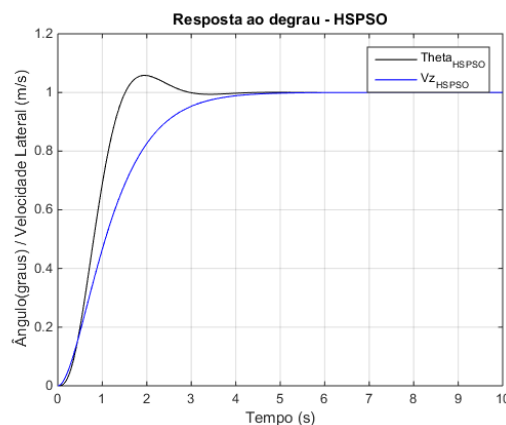


Figura 4 – Resposta do sistema ao degrau unitário.

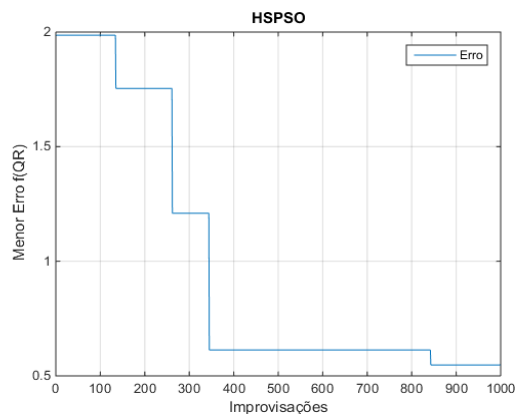


Figura 5 – Gráfico da convergência do algoritmo. Decaimento da função de avaliação do HSPSO.

Na Tabela 5 são mostrados os valores referentes ao gráfico de convergência da simulação com HSPSO.

Tabela 5. Análise da Convergência com HSPSO

Menor Erro $f(QR)$	Tempo (s)	Nº de Iterações
0,5474	26,2188	1000

Pode ser observado na Figura 4 que, na simulação obtida com o algoritmo HSPSO, o resultado do controle foi satisfatório, tendo em vista que o esperado para esse sistema era um comportamento próximo ao apresentado. O algoritmo, além de ter atendido aos critérios do projeto de controle, obteve convergência em cerca de 30 segundos e com um erro aceitável para esse problema. A Tabela 6 mostra as variáveis relacionadas à resposta transitória das simulações. Esses parâmetros estão presentes na equação (13).

Tabela 6. Análise da Saída em Regime Transitório

	Saída	Tr	Ts	Mp
HS	Θ	1,3061	3,6913	1,0537
	Vz	2,5284	4,5280	0,9998
HSPSO	Θ	0,9163	2,5841	1,0583
	Vz	2,0952	3,6075	1,0000

As Figuras 6 e 7 apresentam uma comparação entre as respostas em regime transitório. As imagens foram plotadas, separadas por saídas.

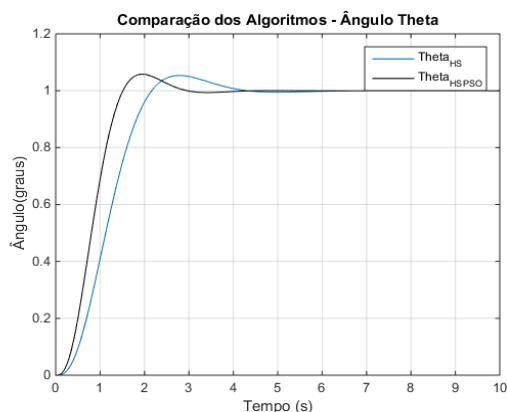


Figura 6 – Resposta dos sistemas ao degrau do Ângulo Theta.

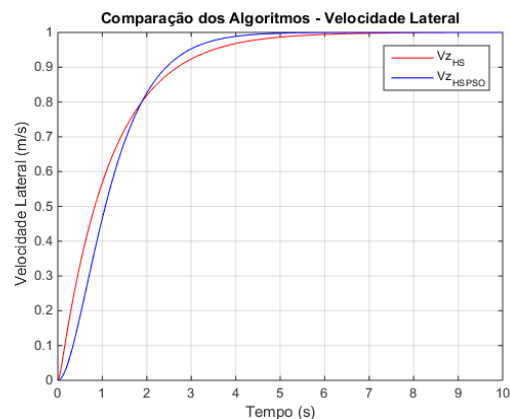


Figura 7 – Resposta dos sistemas ao degrau para a Velocidade Vertical.

Através dos dados apresentados na Tabela 6, é possível afirmar que a simulação realizada com o HSPSO apresentou melhor desempenho em comparação com a simulação através de HS. Embora possuam valores aproximados, a simulação com a técnica híbrida claramente se mostrou superior, uma vez que os resultados do HSPSO se aproximam mais dos valores apresentados na Tabela 1.

Devido à natureza estocástica do algoritmo de HS, principalmente pela Memória Harmônica gerada de maneira aleatória, cada execução apresenta resultados distintos. Dessa forma, os algoritmos foram submetidos a uma série de 30 execuções. Os valores médios estão presentes na Tabela 7.

Tabela 7. Análise da Convergência com HSPSO

Algoritmo	Erro Médio $f(QR)$	Desvio Padrão $f(QR)$	Tempo Médio (s)
HS	0,6068	0,0557	34,6843
HSPSO	0,4030	0,0192	23,0780

Pode-se observar na sumarização de resultados apresentados na Tabela 7, que os algoritmos obtiveram valores aproximados. Embora aceitável, o HS apresentou pior um resultado, provavelmente por conta da definição empírica dos parâmetros. Já com a versão híbrida apresentada neste trabalho, houve uma melhora considerável nos resultados, em comparação com o HS.

Devido ao número de iterações do algoritmo, o tempo médio excedeu 20 segundos, entretanto, é importante considerar que a cada passo do algoritmo o sistema é simulado HMS vezes, para a obtenção dos parâmetros de resposta transitória e do erro em regime permanente.

7 Conclusão

A presente pesquisa apresentou uma implementação do Algoritmo de Busca Harmônica com o parâmetro PAR definido de maneira adaptativa por meio de Oti-

mização por Enxame de Partículas, aplicado na determinação das matrizes de ponderação do Regulador Linear Quadrático.

Pôde-se confirmar que a busca das matrizes Q e R pode ser tratado como um problema de otimização, por conta da minimização do erro gerado entre os índices de desempenho do sistema. Foi testada a versão padrão do HS e o HSPSO, versão híbrida proposta. Constatou-se que, embora ambos algoritmos apresentaram bons resultados, o HSPSO se mostrou melhor em tempo de execução e convergência.

Com base no exposto, é possível afirmar que a hibridização dos algoritmos HS e PSO se tornou uma alternativa à busca automática das matrizes Q e R do LQR, e para problemas em geral, com a minimização dos esforços na definição de parâmetros por meios empíricos.

Pretende-se como trabalho futuro implementar a abordagem robusta do controlador LQR, utilizando o Algoritmo de Busca Harmônica como meio de otimização dos processos empíricos de determinação de matrizes.

Agradecimentos

Os autores agradecem à Fundação Cearense de Apoio ao Desenvolvimento Científico e Tecnológico (FUNCAP) pelo fomento à pesquisa de mestrado.

Referências Bibliográficas

- Bayani, H. and Hajipour, J. (2013). On the design of an autopilot for roll motion in an airplane using LQR and flexible dynamic model. The 3rd International Conference on Control, Instrumentation, and Automation.
- Brasel, M. (2015). A gain-scheduled multivariable LQR controller for hybrid excitation synchronous machine. 20th International Conference on Methods and Models in Automation and Robotics.
- Bryson, A. and Ho, Y. (1975). *Applied optimal control*. Washington: Hemisphere Pub. Corp.
- Cheema, M., Fletcher, J., Xiao, D. e Rahman, M. (2016). A Linear Quadratic Regulator-Based Optimal Direct Thrust Force Control of Linear Permanent-Magnet Synchronous Motor. IEEE
- Doyle, J. e Stein, G. (1981). Multivariable feedback design: Concepts for a classical/modern synthesis. IEEE Transactions on Automatic Control, 26(1), pp.4-16.
- Gbaupé, D. (1972). Derivation of weighting matrices towards satisfying eigenvalue requirements. International Journal of Control, 16(5), pp.881-888.
- Geem, Z. (2010). Recent advances in harmony search algorithm. Berlin: Springer-Verlag.
- Geem, Z., Kim, J. e Loganathan, G. (2001). A New Heuristic Optimization Algorithm: Harmony Search. SIMULATION, 76(2), pp.60-68.
- Gupta, S. e Tripathi, R. (2014). Improved performance of LQR controller in CSC based STATCOM using genetic optimization. 2014 6th IEEE Power India International Conference (PIICON).
- Hartmann, G., Stein, G. e Pratt, S. (1979). Digital adaptive controllers for VTOL vehicles. NASA Contractor Report., 1.
- Inumoh, L., Horri, N., Forshaw, J. e Pechev, A. (2014). Bounded gain-scheduled LQR satellite control using a tilted wheel. IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst., 50(3), pp.1726-1738.
- Jaleel, J. e Francis, R. (2013). Simulated annealing based control of an Inverted Pendulum System. 2013 International Conference on Control Communication and Computing (ICCC).
- Kennedy, J. e Eberhart, R. (1995). Particle swarm optimization. Proceedings of ICNN'95 - International Conference on Neural Networks.
- Maciejowski, J. (1989). Multivariable feedback design. Wokingham, Engle: Addison-Wesley.
- Manjarres, D., et.al. (2013). A survey on applications of the harmony search algorithm. Engineering Applications of Artificial Intelligence, 26(8), pp.1818-1831.
- Mazumdar, D., Sinha, D., Panja, S. e Dhak, D. (2015). Design of LQR controller for solar tracking system. 2015 IEEE International Conference on Electrical, Computer e Communication Technologies (ICECCT).
- Medanic, J., Tharp, H. e Perkins, W. (1988). Pole placement by performance criterion modification. IEEE Transactions on Automatic Control, 33(5), pp.469-472.
- Nascimento, L., Pinto, V., Amora, M. e Souza, D. (2015a). Aplicação do Algoritmo de Busca Harmônica No Projeto de um Regulador Linear Quadrático Com Ação Integral. XII Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente (SBAI).
- Nascimento, L., Pinto, V., Amora, M. e Souza, D. (2015b). Busca Harmônica com ajuste adaptativo de parâmetro por meio de Algoritmo Genético aplicada na otimização do projeto LQR. XII Congresso Brasileiro de Inteligência Computacional – CBIC.
- Nezami, O., Bahrampour, A. e Jamshidlou, P. (2013). Dynamic Diversity Enhancement in Particle Swarm Optimization (DDEPSO) Algorithm for Preventing from Premature Convergence. Procedia Computer Science, 24, pp.54-65.
- Ogata, K. (2011). Engenharia de controle moderno. São Paulo (SP): Pearson Prentice Hall.
- Rui, W., Yi-Ming, S., Mei-Tong, L. e Hao, Z. (2015). Research on Bus Roll Stability Control Based on LQR. 2015 International Conference on Intelligent Transportation, Big Data and Smart City.
- Singh, A. e Pal, B. (2016). Decentralized Control of Oscillatory Dynamics in Power Systems Using an Extended LQR. IEEE Trans. Power Syst., 31(3), pp.1715-1728.
- Stein, G. (1979). Generalized quadratic weights for asymptotic regulator properties. IEEE Transactions on Automatic Control, 24(4), pp.559-566.
- Wei, L. e Yao, W. (2015). Design and implement of LQR controller for a self-balancing unicycle robot. 2015 IEEE International Conference on Information and Automation.