

REPROJETO DIGITAL BASEADO EM $\mathcal{D}$ -ESTABILIDADE ROBUSTA USANDO LMIS E UM PARÂMETRO ESCALAR.

MARCO A.C.LEANDRO*, KARL HEINZ KIENITZ*

*Instituto Tecnológico de Aeronáutica, DCTA-ITA-Div. Eletrônica, São José dos Campos, SP, 12228-900, Brasil

Emails: marcoacleandro@gmail.com, kienitz@ita.br

Abstract— This work involves the digital redesign of LTI (Linear time-invariant) systems with polytopic uncertainty, from a continuous-time controller, which allocates the closed-loop poles in a given region of the left semi-plane. The uncertainty comes from the continuous time system's matrices and from the sampling time considered uncertain. The proposed condition involves homogeneous polynomially parameter-dependent Lyapunov functions taken in a multi-simplex and becomes a LMI (Linear Matrix Inequality) for fixed values of a scalar parameter. The discretization of continuous-time matrices is based on Taylor series expansion with sufficiently large degree g , augmented by a term that represents the discretization residual. A numerical example illustrates the proposed.

Keywords— Robust Control, Digital Redesign, Polytopic Uncertainty, Linear Matrices Inequalities.

Resumo— Este trabalho envolve o reprojeto digital (RD) de sistemas lineares e invariantes no tempo (do inglês, LTI - *Linear Time-invariant*) com incerteza politópica, a partir de um controlador a tempo contínuo, que aloca os polos de malha fechada em uma determinada região do semiplano esquerdo. A incerteza é oriunda das matrizes do sistema a tempo contínuo e do tempo de amostragem considerado incerto. A condição proposta envolve funções de Lyapunov homogêneas polinomialmente dependentes de parâmetros, os quais pertencem a um domínio multi-simplex, e torna-se uma LMI (do inglês, *Linear Matrix Inequalities*) para valores fixos de parâmetros escalares. A discretização das matrizes a tempo contínuo está baseada na expansão em séries de Taylor com um grau g suficientemente grande, adicionada de um termo que representa o resíduo da discretização. Um exemplo numérico ilustra o exposto.

Palavras-chave— Controle Robusto, Reprojeto Digital, Incerteza Politópica, Desigualdades Matriciais Lineares.

1 Introdução

Buscando levar em consideração as incertezas presentes em sistemas físicos, bem como incertezas oriundas do controle digital, este artigo propõe uma estratégia de reprojeto digital (RD) (Chang et al. (2002), Lee et al. (2006), Kim et al. (2010) e referências) baseada em desigualdades matriciais lineares (LMIs) para sistemas lineares invariantes no tempo na presença de incerteza politópica. As incertezas abordadas aqui são oriundas das matrizes do sistema e do tempo de amostragem, considerado incerto, porém limitado em um intervalo (Kobayashi and Hiraishi (2013), Velasco et al. (2005)). Dessa forma, o sistema contínuo incerto original é convertido em um sistema a tempo discreto com parâmetros pertencentes a um domínio multi-simplex (Oliveira et al., 2008). A discretização das matrizes a tempo contínuo está baseada na expansão em séries de Taylor com um grau g suficientemente grande, adicionada do resíduo dessa discretização (Braga et al., 2014). A condição a tempo discreto proposta neste artigo objetiva a minimização da norma da distância entre os polos de malha fechada do sistema discretizado e os polos de malha fechada do sistema a tempo contínuo com um controlador previamente projetado. Adicionalmente, o controlador a tempo discreto obtido garante, a partir de uma região arbitrária S (Chilali and Gahinet, 1996) do semiplano esquerdo e para um grau g de discretização suficientemente grande, a alocação dos polos de malha fechada do sistema original a tempo contínuo e do sistema discretizado. Foram usadas funções de Lyapunov homogêneas polinomialmente dependentes de parâmetros (Oliveira and Peres, 2007).

O restante do trabalho está dividido da seguinte forma: Seção 2 introduz definições e lemas preliminares. Seção 3 traz definições para a discretização sistemática via expansão em séries de Taylor com parâmetros pertencentes a um domínio multi-simplex. Seção 4 apresenta os principais resultados do trabalho. Seção 5 traz um exemplo numérico. Seção 6 encerra o trabalho com comentários finais.

1.1 Notação

$He\{M\}$: denota $M^T + M$; $\star$: denota os elementos ou blocos simétricos em relação à diagonal de uma matriz simétrica; $t = kT$: onde T é o tempo de amostragem e k é uma constante, tal que $k \in \mathbb{Z}$; N : denota o número de vértices do politopo.

2 Preliminares

Sejam m simplexes unitários Λ_{N_j} , $j = 1 \dots m$:

$$\Lambda_{N_j} = \left\{ \alpha_i \in \mathbb{R}^{N_j} : \sum_{i=1}^{N_j} \alpha_i = 1, \alpha_i \geq 0, \forall i \in (1, \dots, N_j) \right\}, \quad (1)$$

e a definição

Definição 1 (Multi-simplex) Um multi-simplex Λ é o produto cartesiano $\Lambda_{N_1} \times \dots \times \Lambda_{N_m} \in \mathbb{R}^{(N_1 + \dots + N_m)}$ de um número m de simplexes unitários.

Com objetivo de simplificar a notação, define-se $\alpha \triangleq (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$, $N \triangleq N_1 + \dots + N_m$ e $\Lambda \triangleq \Lambda_{N_1} \times \dots \times \Lambda_{N_m}$. Cada elemento do vetor de parâmetros $(\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in$

A representa os vetores de parâmetros dos m simples unitários. Dessa forma, $\alpha_i = (\alpha_{i1}, \dots, \alpha_{iN_i})$, $i = 1 \dots m$. Para maiores detalhes sobre polinômios homogêneos com parâmetros pertencentes a um domínio multi-simplex ver Oliveira et al. (2008)

Considere um sistema linear incerto a tempo contínuo descrito por:

$$\dot{x}(t) = E(\alpha_1)x(t) + F(\alpha_1)u(t), \quad (2)$$

em que $E(\alpha_1) \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ e $F(\alpha_1) \in \mathbb{R}^{n_x \times n_u}$. Suponha que as matrizes incertas $E(\alpha_1)$ e $F(\alpha_1)$ pertençam ao politopo Ω dado por:

$$\Omega = \left\{ (E, F)(\alpha_1) \mid (E, F)(\alpha_1) = \sum_{i=1}^{N_1} \alpha_{1i} (E, F)_i \right\}, \quad (3)$$

onde $\alpha_1 = (\alpha_{11}, \dots, \alpha_{1N_1})$ é um vetor de parâmetros invariantes no tempo, que toma valores no simplex unitário Λ_{N_1} .

Adicionalmente, considere que o sinal de entrada de (2) seja amostrado com período $T(\alpha_2)$ desconhecido, porém limitado pelo intervalo $[T_1 \ T_2]$, tal que

$$T(\alpha_2) = \sum_{i=1}^{N_2} \alpha_{2i} T_i, \quad \alpha_2 = (\alpha_{21}, \alpha_{22}) \in \Lambda_{N_2=2}. \quad (4)$$

Supondo um ZOH (do inglês, *Zero Order Holder*), a evolução de x nos instantes $kT(\alpha_2)$ é dada por:

$$x((k+1)T(\alpha_2)) = A(\alpha)x(kT(\alpha_2)) + B(\alpha)u(kT(\alpha_2)), \quad (5)$$

em que as matrizes incertas $A(\alpha)$ e $B(\alpha)$ são

$$A(\alpha) = e^{E(\alpha_1)T(\alpha_2)}, \quad B(\alpha) = \left(\int_0^{T(\alpha_2)} e^{E(\alpha_1)v} dv \right) F(\alpha_1). \quad (6)$$

A partir da realimentação de estados $u(t) = Lx(t)$, em que L é um ganho contínuo robusto que estabiliza (2), considerando o sistema em malha fechada

$$\dot{x}(t) = (E(\alpha_1) + F(\alpha_1)L)x(t), \quad (7)$$

pode-se definir a seguinte matriz de malha fechada a tempo discreto

$$A_{cl}(\alpha) = e^{(E(\alpha_1) + F(\alpha_1)L)T(\alpha_2)}. \quad (8)$$

O objetivo deste artigo é, a partir de um ganho robusto L a tempo contínuo, o qual aloca os polos de (7) em uma região $S(\tau, \varepsilon, \theta)$, conforme as LMIs descritas em Chilali and Gahinet (1996), propor, com base na lei de controle constante por partes $u(kT(\alpha_2)) = Kx(kT(\alpha_2))$, um ganho robusto K a tempo discreto, que estabiliza (2) e (5), preservando limites ao máximo sobressinal, ao tempo de subida e ao tempo de acomodação. A proposição do ganho K foi baseada nos resultados envolvendo reprojeto digital apresentados em Chang et al. (2002) e Braga et al. (2015).

O lema a seguir foi usado para a elaboração das condições baseadas em LMIs propostas neste artigo.

Lema 1 (Lema da Projeção) (Gahinet and Apkarian, 1994) Dada uma matriz $H = H^T \in \mathbb{R}^{m \times m}$, e duas matrizes V e U com m colunas, considere o problema de encontrar uma matriz X de dimensões compatíveis, tal que:

$$H + V^T X^T U + U^T X V < 0. \quad (9)$$

Denotam-se por N_U e N_V as matrizes cujas colunas formam as bases do espaço nulo de U e V , respectivamente. Então (9) é factível em termos de X se e somente se

$$N_V^T H N_V < 0 \text{ e } N_U^T H N_U < 0. \quad (10)$$

3 Sistemas LTI discretizados via expansão em séries de Taylor com tempo de amostragem incerto

As matrizes incertas $A(\alpha)$, $B(\alpha)$ e $A_{cl}(\alpha)$, descritas em (6) e (8), foram reescritas de acordo com os polinômios matriciais homogêneos $A^{[g]}(\alpha)$, $B^{[g]}(\alpha)$ e $A_{cl}^{[g]}(\alpha)$, formados pela aproximação em séries de Taylor de ordem g , $g \in \mathbb{N}^2$, adicionados do resíduo dessa aproximação (Braga et al., 2014), conforme a seguir:

$$A(\alpha) = A^{[g]}(\alpha) + \Delta A^{[g]}(\alpha), \quad B(\alpha) = B^{[g]}(\alpha) + \Delta B^{[g]}(\alpha), \quad (11)$$

$$A_{cl}(\alpha) = A_{cl}^{[g]}(\alpha) + \Delta A_{cl}^{[g]}(\alpha), \quad (12)$$

onde

$$A^{[g]}(\alpha) = \sum_{n=0}^g \pi(\alpha) \frac{E(\alpha_1)^n}{n!} T(\alpha_2)^n, \quad (13)$$

$$B^{[g]}(\alpha) = \sum_{n=1}^g \pi(\alpha) \frac{E(\alpha_1)^{n-1}}{n!} T(\alpha_2)^n F(\alpha_1),$$

$$A_{cl}^{[g]}(\alpha) = \sum_{n=0}^g \pi(\alpha) \frac{(E(\alpha_1) + F(\alpha_1)L)^n}{n!} T(\alpha_2)^n,$$

para $\pi(\alpha) = \left(\sum_{i=1}^{N_1} \alpha_{1i} \right)^{g-n} \left(\sum_{i=1}^2 \alpha_{2i} \right)^{g-n}$. Os erros da aproximação são, portanto:

$$\begin{aligned} \Delta A^{[g]}(\alpha) &= e^{E(\alpha_1)T(\alpha_2)} - A^{[g]}(\alpha), \\ \Delta B^{[g]}(\alpha) &= \left(\int_0^{T(\alpha_2)} e^{E(\alpha_1)s} ds \right) F(\alpha_1) - B^{[g]}(\alpha), \\ \Delta A_{cl}^{[g]}(\alpha) &= e^{(E(\alpha_1) + F(\alpha_1)L)T(\alpha_2)} - A_{cl}^{[g]}(\alpha). \end{aligned} \quad (14)$$

A partir de (5) e das matrizes definidas em (13) e (14), tem-se o modelo:

$$x((k+1)T(\alpha_2)) = (A^{[g]}(\alpha) + \Delta A^{[g]}(\alpha))x(kT(\alpha_2)) + (B^{[g]}(\alpha) + \Delta B^{[g]}(\alpha))u(kT(\alpha_2)). \quad (15)$$

Haja vista que o produto de matrizes não é comutativo, os cálculos a partir de (13) podem ser sistematizados a partir das seguintes definições:

- Conjunto $\mathcal{K}_m(N, g)$: formado em ordem lexicográfica pelo produto cartesiano das N -uplas $(k_{11} \dots k_{1N_1})_{j_1}, \dots, (k_{m1} \dots k_{mN_m})_{j_m}$, $j_i = 1 \dots N_{N_i}$, $i = 1, \dots, m$, dos m simplexos unitários, sujeitos a restrição $k_{i1} + \dots + k_{iN_i} = g_i$, dado o grau $g = (g_1, \dots, g_m)$, $g \in \mathbb{N}^m$. A cardinalidade de

$\mathcal{K}_m(N, g)$ é o produto da cardinalidade dos m simplexos, $\mathbb{J} = J_{N_1} \times, \dots, \times J_{N_m}$, onde:

$$J_{N_i} = \frac{(N_i + g_i - 1)!}{g_i!(N_i - 1)!}, \quad i = 1, \dots, m. \quad (16)$$

Define-se $\mathbb{k} \triangleq (k_{11} \dots k_{1N_1} \dots k_{m1} \dots k_{mN_m}) \in \mathcal{K}_m(N, g)$.

- Conjunto $\mathcal{R}(k_{i1} \dots k_{iN_i})$: formado a partir das N -uplas dos simplexos unitários Λ_i , $i = 1, \dots, m$. Dessa forma, seus elementos são os conjuntos (com cardinalidade maior ou igual a 1) de todas as g -uplas possíveis, $(r_{i1} \dots r_{ig})_{(q_j)}$, $q_j = 1 \dots Q_j$, $\forall j = 1 \dots J_{N_i}$, $i = 1, \dots, m$,

$$Q_j = \frac{g_i!}{(k_{i1}! \dots k_{iN_i}!)} \quad (17)$$

correspondentes às permutações com repetição de cada N -upla $(k_{i1} \dots k_{iN_i})_j$, $j = 1 \dots J_{N_i}$, $i = 1, \dots, m$.

Da mesma forma que $\mathcal{K}_m(N, g)$, considere o conjunto $\mathcal{K}'_m(N, d)$, formado pelas N -uplas, $(k'_{11} \dots k'_{1N_1} \dots k'_{m1} \dots k'_{mN_m})_{j'}$, $j' = 1, \dots, \mathbb{J}'$, tal que $d \in \mathbb{N}^m$, $d \leq g$. Serão definidos a seguir os conjuntos $\mathcal{L}$ e $\mathcal{T}$ e o coeficiente escalar $\mathcal{E}$.

- Conjunto $\mathcal{L}(d)$: É obtido a partir do resultado da seguinte operação: $(l_{11} \dots l_{1N_1} \dots l_{m1} \dots l_{mN_m}) = (k_{11} \dots k_{1N_1} \dots k_{m1} \dots k_{mN_m})_j - (k'_{11} \dots k'_{1N_1} \dots k'_{m1} \dots k'_{mN_m})_{j'}$, onde, para cada $j = 1 \dots \mathbb{J}$, faz-se $j' = 1 \dots \mathbb{J}'$. A subtração é realizada elemento a elemento e as N -uplas com elementos negativos são descartadas. Definindo L_j como o número de elementos de cada subconjunto formado para cada $j = 1 \dots \mathbb{J}$, então a cardinalidade do conjunto $\mathcal{L}(d)$  

$$\bar{L} = \sum_{j=1}^{\mathbb{J}} L_j, \quad (18)$$

Define-se $\mathbb{L} \triangleq (l_{11} \dots l_{1N_1} \dots l_{m1} \dots l_{mN_m})$, $\mathbb{L} \in \mathcal{L}(d)$.

- Conjunto $\mathcal{T}(l_{i1} \dots l_{iN_i})$:   constituído pelas N -uplas $(\bar{r}_{i1} \dots \bar{r}_{iN_i})$, $\bar{r}_{ij}$, $j = 1 \dots N_i$, $i = 1 \dots m$, as quais são resultado da seguinte operação, para $l_{ij} > 0$:

$$\bar{r}_{ij} = 1, \quad \bar{r}_{iN_i-j} = 0, \quad (19)$$

de forma que o subíndice $iN_i - j$ indica todos os N_i componentes de $(\bar{r}_{i1} \dots \bar{r}_{iN_i})$, exceto j . A cardinalidade do conjunto $\mathcal{T}(l_{i1} \dots l_{iN_i})$   R_i , com $R_i \in [0 N_i]$.

- Coeficiente $\mathcal{E}_d$: A partir das N -uplas $(l_{11} \dots l_{1N_1} \dots l_{m1} \dots l_{mN_m}) \in \mathcal{L}(d)$, o coeficiente $\mathcal{E}_d$ é definido por:

$$\mathcal{E}_d = \frac{(d!)^m}{\mathbb{k}'!}, \quad (20)$$

onde $d \in \mathbb{N}$, $d \leq g$, $\mathbb{k}' \in \mathcal{K}'_m(N, d)$, $\mathbb{k}'! = k'_{11}! \dots k'_{1N_1}! \dots k'_{m1}! \dots k'_{mN_m}!$.

Definições complementares acerca do exposto acima podem ser obtidas em Braga et al. (2014).

- Conjunto $\mathcal{H}(r_{11} \dots r_{1g})$: formado a partir das g -uplas do conjunto $\mathcal{R}(\cdot)$, conforme as matrizes $E(\alpha 1), F(\alpha 1)L$ são associadas aos índices $(r_{11} \dots r_{1g})$ a partir de arranjos com repetição. Dessa forma, define-se como elemento de $\mathcal{H}$, as g -uplas $(h_{r_{11}} \dots h_{r_{1g}})_y$, $y = 1 \dots Y_q$, onde $Y_q = 2^g$.

Para exemplificar, considere a g -upla (221), então em ordem lexicográfica:

$$\mathcal{H}(221) = \{(E_2E_2E_1), (E_2E_2F_1L), (E_2F_2LE_1), (E_2F_2LF_1L), (F_2LE_2E_1), (F_2LE_2F_1L), (F_2LF_2LE_1), (F_2LF_2LF_1L)\},$$

onde $Y = 2^3$.

Com base nas definições acima, os pol n mios matriciais homogêneos em (13) podem então ser reescritos. Para $m = 2$ e dado que $T \in [T_1, T_2]$ é um escalar e, portanto, comuta, tem-se:

$$A^{[g]}(\alpha) = \sum_{\mathbb{k}_1}^{\mathbb{k}, \mathbb{J}} \alpha_{11}^{k_{11}} \dots \alpha_{1N_1}^{k_{1N_1}} \alpha_{21}^{k_{21}} \alpha_{22}^{k_{22}} \left(\sum_{n=(0,0)}^g \sum_{\mathbb{L}_1}^{\mathbb{L}_L} \frac{1}{l_{21}! l_{22}!} \sum_{(r_{11} \dots r_{1g})_1}^{(r_{11} \dots r_{1g})_Q} \mathcal{E}_{(g-n)} T_1^{l_{21}} T_2^{l_{22}} E_{r_{11}} \dots E_{r_{1g}} \right),$$

onde $g \in \mathbb{N}^m$, $n \in \mathbb{N}^m$, $(l_{11} \dots l_{1N_1} l_{21} l_{22}) \in \mathcal{K}_m(N, g) - \mathcal{K}'_m(N, g - n)$ e $(r_{11} \dots r_{1g}) \in \mathcal{R}(l_{11} \dots l_{1N_1})$, $(r_{21} \dots r_{2g}) \in \mathcal{R}(l_{21} l_{22})$. Substituindo a expressão no interior do parênteses por $\mathcal{A}_{\mathbb{k}}$, obtém-se

$$A^{[g]}(\alpha) = \sum_{\mathbb{k}_1}^{\mathbb{k}, \mathbb{J}} \alpha^{\mathbb{k}} \mathcal{A}_{\mathbb{k}}. \quad (21)$$

Da mesma forma para a matriz de controle, tem-se:

$$B^{[g]}(\alpha) = \sum_{\mathbb{k}_1}^{\mathbb{k}, \mathbb{J}} \alpha^{\mathbb{k}} \left(\sum_{n=(1,1)}^g \sum_{\mathbb{L}_1}^{\mathbb{L}_L} \frac{1}{l_{21}! l_{22}!} \sum_{(\bar{r}_{11} \dots \bar{r}_{1N_1})_1}^{(\bar{r}_{11} \dots \bar{r}_{1N_1})_R} \sum_{(r_{11} \dots r_{1g})_1}^{(r_{11} \dots r_{1g})_Q} \mathcal{E}_{(g-n)} T_1^{l_{21}} T_2^{l_{22}} E_{r_{11}} \dots E_{r_{1g}} F_i \right),$$

onde $(l_{11} \dots l_{1N_1} l_{21} l_{22}) \in \mathcal{K}_m(N, g) - \mathcal{K}'_m(N, g - n)$, $(r_{11} \dots r_{1g}) \in \mathcal{R}((l_{11} \dots l_{1N_1}) - (\bar{r}_{11} \dots \bar{r}_{1N_1}))$, $(r_{21} \dots r_{2g}) \in \mathcal{R}(l_{21} l_{22})$. O subíndice i representa o termo na N -upla $(\bar{r}_{11}, \dots, \bar{r}_{1N_1})$ para o qual $\bar{r}_{1i} = 1$, $i = 1 \dots N_1$ (19). Substituindo a expressão no interior do parênteses por $\mathcal{B}_{\mathbb{k}}$, tem se:

$$B^{[g]}(\alpha) = \sum_{\mathbb{k}_1}^{\mathbb{k}, \mathbb{J}} \alpha^{\mathbb{k}} \mathcal{B}_{\mathbb{k}}. \quad (22)$$

Para a matriz de malha fechada a tempo contínuo

$$A_{cl}^{[g]}(\alpha) = \sum_{\mathbb{k}_1}^{\mathbb{k}, \mathbb{J}} \alpha_{11}^{k_{11}} \dots \alpha_{1N_1}^{k_{1N_1}} \alpha_{21}^{k_{21}} \alpha_{22}^{k_{22}} \left(\sum_{n=(0,0)}^g \sum_{\mathbb{L}_1}^{\mathbb{L}_L} \frac{1}{l_{21}! l_{22}!} \sum_{(r_{11} \dots r_{1g})_1}^{(r_{11} \dots r_{1g})_Q} \sum_{y=1}^Y \mathcal{E}_{(g-n)} (h_{r_{11}} \dots h_{r_{1g}})_y T_1^{l_{21}} T_2^{l_{22}} \right),$$

onde $\mathbb{L} \in \mathcal{K}(N, g) - \mathcal{K}'(N, g - n)$, $(r_{11} \dots r_{1g}) \in \mathcal{R}(l_{11} \dots l_{1N_1})$ e $(h_{r_{11}} \dots h_{r_{1g}}) \in \mathcal{H}(r_{11} \dots r_{1g})$. Substituindo a expressão no interior dos parênteses por $\mathcal{A}_{cl\mathbb{K}}$

$$A_{cl}^{[g]}(\alpha) = \sum_{\mathbb{K}_1}^{\mathbb{K}_J} \alpha^{\mathbb{K}} \mathcal{A}_{cl\mathbb{K}}. \quad (23)$$

Finalmente, a partir de (14) os limites para os erros de discretização são dados pelo vetor $(\theta_A, \theta_B, \theta_{cl})$, tal que $\theta_A \geq \|\Delta A^{[g]}(\alpha)\|_2$, $\theta_B \geq \|\Delta B^{[g]}(\alpha)\|_2$ e $\theta_{cl} \geq \|\Delta A_{cl}^{[g]}(\alpha)\|_2$, $\forall \alpha \in \Lambda$, e podem ser obtidos pela solução dos seguintes problemas de otimização:

$$\theta_A \triangleq \max_{\alpha \in \Lambda} \|\Delta A^{[g]}(\alpha)\|_2, \quad \theta_B \triangleq \max_{\alpha \in \Lambda} \|\Delta B^{[g]}(\alpha)\|_2, \quad (24)$$

$$\theta_{cl} \triangleq \max_{\alpha \in \Lambda} \|\Delta A_{cl}^{[g]}(\alpha)\|_2. \quad (25)$$

Uma aproximação para $(\theta_A, \theta_B, \theta_{cl})$ pode ser obtida por uma busca $(N+2)$ -dimensional no espaço de parâmetros do multi-simplex Λ , feita offline.

4 Resultados principais

Nesta seção são apresentadas condições LMIs para a síntese de um controlador robusto a tempo discreto, via RD.

Teorema 1 Considere a dupla de graus idênticos $q \in \mathbb{N}^2$, as matrizes simétricas definidas positivas $P_{\mathbb{K}} \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, $W_{\mathbb{K}} \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, $\mathbb{K} \in \mathcal{K}_2(N, q)$, uma matriz $G \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ e uma matriz $Z \in \mathbb{R}^{n_u \times n_x}$, escalares positivos $\lambda_1, \dots, \lambda_5$, $\Xi \triangleq (\lambda_1 \theta_A^2 + \lambda_2 \theta_B^2)I$, $\Psi \triangleq (\lambda_3 \theta_A^2 + \lambda_4 \theta_B^2 + \lambda_5 \theta_{cl}^2)I$, a dupla de graus de relação de Pólya idênticos $p \in \mathbb{N}^2$, a dupla de graus de discretização idênticos $g \in \mathbb{N}^2$, $m \triangleq \max\{q + p, g + p\}$, um disco arbitrário $\mathcal{D}(c, r)$ centrado em $c + j0$ e com raio r , onde $|c| + r < 1$, um dado parâmetro escalar $\xi \in (-r, r)$, e as condições LMIs em (26), (27) e (28)

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\mathbb{K}} &= \sum_{\mathbb{L}_1}^{\mathbb{L}_J} \mathcal{E}_p P_{\mathbb{L}} > 0, \quad \mathcal{W}_{\mathbb{K}} = \sum_{\mathbb{L}_1}^{\mathbb{L}_J} \mathcal{E}_p W_{\mathbb{L}} > 0 \\ \mathbb{L} \in \mathcal{K}_2(N, p+q) - \mathcal{K}'_2(N, p) \quad \mathbb{L} \in \mathcal{K}_2(N, p+q) - \mathcal{K}'_2(N, p) \\ \forall \mathbb{K} \in \mathcal{K}_2(N, p+q), \quad (26) \\ \mathcal{M}_{\mathbb{K}} &= \frac{(m!)^2}{\mathbb{K}!} M + \sum_{\mathbb{L}_1}^{\mathbb{L}_J} \frac{((m-g)!)^2}{\mathbb{L}_1!} \hat{M} + \sum_{\mathbb{L}_1}^{\mathbb{L}_J} \frac{((m-q)!)^2}{\mathbb{L}_1!} \check{M} < 0 \\ \mathbb{L} \in \mathcal{K}_2(N, m) - \mathcal{K}_2(N, m-g) \quad \mathbb{L} \in \mathcal{K}_2(N, m) - \mathcal{K}_2(N, m-q) \\ \forall \mathbb{K} \in \mathcal{K}_2(N, m), \quad (27) \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} M &= \begin{bmatrix} \Xi & -\xi G^T & \xi Z^T & \xi G^T \\ \star & -G - G^T & Z & G \\ \star & \star & -\lambda_2 I & 0 \\ \star & \star & \star & -\lambda_1 I \end{bmatrix}, \\ \hat{M} &= \begin{bmatrix} \left(\begin{array}{c} \xi He\{\mathcal{A}_{\mathbb{L}} G - \\ cG + B_{\mathbb{L}} Z\} \end{array} \right) & \left(\begin{array}{c} \mathcal{A}_{\mathbb{L}} G - \\ cG + B_{\mathbb{L}} Z \end{array} \right) & 0 & 0 \\ \star & 0 & 0 & 0 \\ \star & \star & 0 & 0 \\ \star & \star & \star & 0 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$\check{M} = \text{diag}(-r^2 \mathcal{P}_{\mathbb{L}}, \mathcal{P}_{\mathbb{L}}, 0, 0),$$

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_{\mathbb{K}} &= \frac{(m!)^2}{\mathbb{K}!} Q + \sum_{\mathbb{L}_1}^{\mathbb{L}_J} \frac{((m-g)!)^2}{\mathbb{L}_1!} \hat{Q} + \sum_{\mathbb{L}_1}^{\mathbb{L}_J} \frac{((m-q)!)^2}{\mathbb{L}_1!} \check{Q} < 0 \\ \mathbb{L} \in \mathcal{K}_2(N, m) - \mathcal{K}_2(N, m-g) \quad \mathbb{L} \in \mathcal{K}_2(N, m) - \mathcal{K}_2(N, m-q) \\ \forall \mathbb{K} \in \mathcal{K}_2(N, m), \quad (28) \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} Q &= \begin{bmatrix} -He\{G\} & 0 & Z^T & G^T & G^T \\ \star & (-\gamma^2 + \Psi)I & 0 & 0 & 0 \\ \star & \star & -\lambda_4 I & 0 & 0 \\ \star & \star & \star & -\lambda_3 I & 0 \\ \star & \star & \star & \star & -\lambda_5 I \end{bmatrix}, \\ \hat{Q} &= \begin{bmatrix} 0 & \left(\begin{array}{c} \mathcal{A}_{cl\mathbb{L}} G - \\ \mathcal{A}_{\mathbb{L}} G - \mathcal{B}_{\mathbb{L}} Z \end{array} \right)^T & 0 & 0 & 0 \\ \star & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \star & \star & 0 & 0 & 0 \\ \star & \star & \star & 0 & 0 \\ \star & \star & \star & \star & 0 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$\check{Q} = \text{diag}(\mathcal{W}_{\mathbb{L}}, 0, 0, 0, 0).$$

Com base nas definições acima e adotando $\rho = \gamma^2$, tem-se o seguinte problema de otimização

$$\begin{cases} \min_{\mathcal{W}_{\mathbb{K}}, \mathcal{P}_{\mathbb{K}}, G, Z, \lambda_1 \dots \lambda_5} \{\rho\} \\ \text{sa: (26), } \forall \mathbb{K} \in \mathcal{K}_2(N, q+p) \\ \quad (27), (28), \forall \mathbb{K} \in \mathcal{K}_2(N, m), \end{cases} \quad (29)$$

Dessa forma, para c e r arbitrários, o ganho robusto $K = ZG^{-1}$ assegura que a trajetória dos estados do sistema incerto discreto (15) seja tão próxima quanto possível da trajetória do sistema contínuo (7). Adicionalmente, para um grau g suficientemente grande, assegura a alocação robusta dos polos de malha fechada de (15) no interior do disco $\mathcal{D}$ e a alocação dos polos de malha fechada de (2) em uma região $S(\tau, \varepsilon, \theta)$ definida previamente.

Prova: Reescreve-se (26) como

$$\left(\sum_{i=1}^{N_1} \alpha_{1i} \right)^p \left(\sum_{i=1}^2 \alpha_{2i} \right)^p P^{[q]}(\alpha) = \sum_{\mathbb{K}_1}^{\mathbb{K}_J} \alpha_{11}^{k_{11}} \dots \alpha_{1N_1}^{k_{1N_1}} \alpha_{21}^{k_{21}} \alpha_{22}^{k_{22}} \mathcal{P}_{\mathbb{K}},$$

onde $\mathbb{K} \in \mathcal{K}_2(N, p+q)$ e uma vez que $\mathcal{P}_{\mathbb{K}} > 0 \forall \mathbb{K} \in \mathcal{K}_2(N, p+q)$, então $P^{[q]}(\alpha) > 0 \forall \alpha \in \Lambda$.

Multiplicando-se (27) por $\alpha^{\mathbb{K}}$, somando-se $\forall \mathbb{K} \in \mathcal{K}_2(N, m)$ obtém-se uma LMI robusta, ou seja, dependente de parâmetros. Em seguida, a partir das expressões de $A^{[g]}(\alpha)$, $B^{[g]}(\alpha)$ em (21) e (22), define-se a matriz de malha fechada $A(\alpha) \triangleq A^{[g]}(\alpha) - cI + B^{[g]}(\alpha)ZG^{-1}$ e escolhem-se as matrizes:

$$H = \text{diag}((\Xi - r^2 P^{[q]}(\alpha)), P^{[q]}(\alpha), -\lambda_2, -\lambda_1), \quad (30)$$

$$U = \begin{bmatrix} A(\alpha) \\ -I \\ K \\ I \end{bmatrix}^T, \quad N_U = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ A^T(\alpha) & K^T & I \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}, \quad (31)$$

e

$$V = \begin{bmatrix} \xi I \\ I \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T, N_V = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ -\xi I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}, \quad (32)$$

então, (27) pode ser reescrita em termos de (9). A prova da suficiência de (27) segue abaixo via o Lema 1. Dessa forma, para a primeira condição em (10), tem-se

$$\begin{bmatrix} \left(\begin{array}{c} \Xi - r^2 P^{[q]}(\alpha) \\ + \xi^2 P^{[q]}(\alpha) \end{array} \right) & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda_2 I & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda_1 I \end{bmatrix} < 0. \quad (33)$$

Dado que $P^{[q]}(\alpha) > 0$ e $\Xi > 0$ e a partir do termo na posição (1,1), onde $P^{[q]}(\alpha)(r^2 I - \xi^2 I) - \Xi I > 0$, então $|\xi| < r$.

A partir da segunda condição em (10), a prova segue o exposto em Braga et al. (2014). Seguindo a referência, chega-se à:

$$\begin{bmatrix} r^2 P^{[q]}(\alpha) & (A(\alpha) - cI + B(\alpha)K) P^{[q]}(\alpha) \\ \star & P^{[q]}(\alpha) \end{bmatrix} > 0, \quad (34)$$

a qual assegura, $\forall \alpha \in \Lambda$, a $\mathcal{D}(c, r)$ -estabilidade de (5) e (15).

Para a prova da suficiência de (28), considera-se $U = I$ e multiplica-se (28) por α^k e soma-se $\forall k \in \mathcal{K}_2(N, m)$. Em seguida, a partir das expressões de $A^{[g]}(\alpha)$, $B^{[g]}(\alpha)$ e $A_{cl}^{[g]}(\alpha)$ em (21), (22) e (23), define-se a matriz de malha fechada $A(\alpha) \triangleq A^{[g]}(\alpha) + B^{[g]}(\alpha)ZG^{-1}$ e escolhem-se as matrizes:

$$H = \text{diag}(W^{[q]}(\alpha), -\gamma^2 + \Psi, -\lambda_4, -\lambda_3, -\lambda_5), \quad (35)$$

$$V = \begin{bmatrix} -I \\ (A_{cl}^{[g]}(\alpha) - A(\alpha)) \\ K \\ I \\ I \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} G^T \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (36)$$

$$N_V = \begin{bmatrix} (A_{cl}^{[g]}(\alpha) - A(\alpha))^T & K^T & I & I \\ I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix}. \quad (37)$$

Dessa forma, (28) pode ser reescrita como $H + V^T X^T + XV < 0$. A partir da condição $N_V^T H N_V < 0$ e seguindo as manipulações descritas em Braga et al. (2015), chega-se a

$$\begin{bmatrix} W^{[q]}(\alpha) & \star \\ (A_{cl}(\alpha) - A(\alpha) - B(\alpha)K)W^{[q]}(\alpha) & \gamma^2 I \end{bmatrix} > 0. \quad (38)$$

A minimização de γ sujeita a (38) assegura que a diferença entre a dinâmica de (7) e (15) seja minimizada (Chang et al., 2002). □

Observação 1: Para valores de Ξ muito elevados, é improvável achar $P^{[q]}(\alpha)$ que satisfaça (33).

Observação 2: Para $c = 0$ e $r = 1$, (34) retorna a condição proposta em Braga et al. (2014).

5 Experimentos Numéricos

Considere uma versão adaptada do modelo apresentado em Leandro et al. (2015), o qual representa dois carros unidos por uma mola:

$$E(\eta) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\eta/1,15 & \eta/1,15 & -11,41 & 0 \\ \eta/0,54 & -\eta/0,54 & 0 & -4,07 \end{bmatrix}, \quad (39)$$

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1,72 & 0 \end{bmatrix}, \quad (40)$$

onde $\eta = [135 \ 270]$. Os quatro estados do modelo são a posição e velocidade do carro ativo e do carro passivo.

Suponha um tempo de amostragem incerto, porém pertencente ao intervalo $T = [0,01 \ 0,03]$. Projeta-se um ganho a tempo contínuo L , alocando os polos de malha fechada de (2) na região $S(\tau, \varepsilon, \theta) = S(0, 2, 60^\circ)$. Dessa forma, obtém-se:

$$L = [-756,55 \ 700,51 \ -34,13 \ 25,02].$$

Em seguida, são determinados os resíduos para um grau $g = (5,5)$ de discretização, de acordo com (24) e (25): $\theta_A = 7,9 \times 10^{-3}$, $\theta_B = 1,4789 \times 10^{-5}$ e $\theta_{cl} = 0,1933$.

Buscando relacionar ξ e o máximo erro $\sigma_{\max}$, $\forall \alpha \in \Lambda$, entre a trajetória de x em (7), definida como x_c , e a trajetória de x em (15), definida como x_d , define-se:

$$\sigma_{\max} \triangleq \max_{\alpha \in \Lambda} \left[\sum_{i=1}^{n_x} \left(\int_0^\infty |x_{c_i}(t) - x_{d_i}(t)| dt \right) \right]. \quad (41)$$

A partir da condição em (29) e de (41), observa-se que valores de c e r convenientemente escolhidos resultam em menores valores para $\sigma_{\max}$ e a condição é factível para um maior número de valores do parâmetro ξ . Como exemplo, para $p = (0,0)$, $q = (1,1)$, $\xi = -0,9$, $c = 0$ e $r = 1$ obtém-se $\sigma_{\max} = 0,0136$. Para os mesmos valores de p , q , c , r e considerando $\xi = -0,8$, a condição não é factível. Considerando agora $p = (0,0)$, $q = (1,1)$, $\xi = -0,9$, $c = 0,04$ e $r = 0,96$, obtém-se $\sigma_{\max} = 0,0115$. Para os mesmos valores de p , q , c , r e considerando $\xi = -0,8$, obtém-se $\sigma_{\max} = 0,0076$.

As Figuras 1, 2 e 3 ilustram o exposto até aqui para $p = (0,0)$, $q = (1,1)$, $\xi = -0,8$, $c = 0,04$ e $r = 0,96$ e o ganho obtido:

$$K = [-389,43 \ 345,26 \ -21,20 \ 13,01],$$

o qual assegura a alocação dos polos de malha fechada de (2) e (15), bem como assegura que a trajetória dos estados de (15) seja tão próxima quanto possível da trajetória dos estados de (7).

Menores valores de $\sigma_{\max}$ também são obtidos quando aumenta-se o grau de discretização $g \in \mathbb{N}^m$. A Tabela 1 ilustra o exposto conforme os graus de discretização (5,5) e (6,6). Cabe mencionar que incrementos no grau g requerem a realização de nova busca

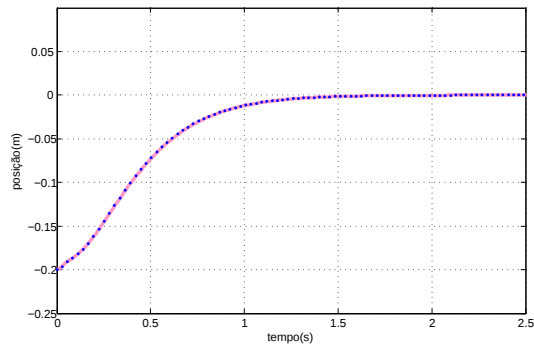


Figura 1 Condição inicial: $[-0,2 \ -0,2 \ 0 \ 0]$ e $\alpha_{11} = 0,7$; $\alpha_{12} = 0,3$, $\alpha_{21} = 0,1$; $\alpha_{22} = 0,9$. •: trajetória do primeiro estado de (15); -: trajetória do primeiro estado de (7).

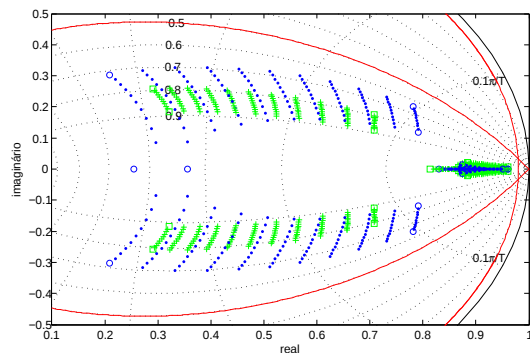


Figura 2 Seção do círculo unitário. •: polos de malha fechada de (15). •: vértices do politopo; +: polos de malha fechada de (8). □: vértices do politopo; -: limites da região interna ao círculo unitário formada pelo mapeamento $z = e^{sT_1}$ a partir da região $S(0,2,60^\circ)$.

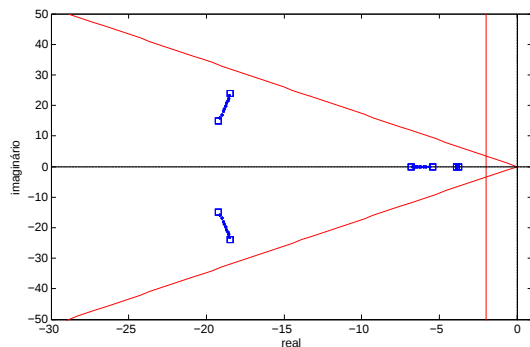


Figura 3 Seção do semiplano esquerdo. •: polos de malha fechada de (2); □: vértices do politopo; -: limites da região $S(0,2,60^\circ)$.

Tabela 1 Valores de σ_{max} para ξ arbitrários, onde $p = (0,0)$, $q = (1,1)$, $c = 0,04$ e $r = 0,96$.

	$\xi = -0,9$	$\xi = -0,8$	$\xi = -0,7$
$\sigma_{maxg=(5,5)}$	0,0115	0,0076	0,0207
$\sigma_{maxg=(6,6)}$	0,0069	0,0173	0,0214

$(N+2)$ -dimensional, conforme descrito em (24) e (25).

Adicionalmente e da mesma forma, a relaxação p e o grau q permitem maior flexibilidade combinados com valores de ξ . Como exemplo, para $g = (6,6)$, $q = (1,1)$, $p = (0,0)$, $\xi = 0$, $c = 0$, e $r = 1$, (29) não é factível considerando a região $S(0,2,55^\circ)$. Entretanto, é factível para $g = (6,6)$, $q = (2,2)$, $p = (2,2)$, $\xi = 0$, $c = 0$, e $r = 1$. Nesse caso o erro máximo é $\sigma_{max} = 0,202$. Após uma busca nos valores de ξ , obtem-se o erro máximo $\sigma_{max} = 0,0145$ para $\xi = -0,7$.

6 Conclusões

Neste artigo foi proposta uma condição baseada em reprojeção digital, que garante a estabilidade e alocação robusta dos polos do sistema a tempo contínuo e a tempo discreto diante de incerteza nas matrizes a tempo contínuo e no tempo de amostragem. Os escalares c e r são parâmetros de projeto e sua escolha no contexto dos parâmetros p , q , g , e ξ precisa ser melhor estudada. Os resultados mostraram que o ganho obtido para um grau de discretização suficientemente grande, aliado à escolha adequada daqueles parâmetros, permite a alocação dos polos de malha fechada a tempo contínuo e a tempo discreto em uma região S arbitrária. Adicionalmente, os resultados sugerem a possibilidade de obter respostas transitórias a tempo discreto mais próximas do sistema contínuo original com graus de liberdade extras.

Agradecimentos

Este Trabalho foi financiado pelo Projeto 2011/17610 – 0 da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo - FAPESP.

Referências

- Braga, M. F., Morais, C. F., Tognetti, E. S., Oliveira, R. C. L. F. and Peres, P. L. D. (2015). Condições LMIs para controle de sistemas politópicos via reprojeção digital., *XII Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente*, Natal, RN, Brasil, pp. 386–391.
- Braga, M. F., Morais, C. F., Tognetti, E. S., Oliveira, R. C. and Peres, P. L. (2014). Discretisation and control of polytopic systems with uncertain sampling rates and network-induced delays, *International Journal of Control* **87**(11): 2398–2411.
- Chang, W., Park, J., Lee, H. and Joo, Y. (2002). Lmi approach to digital redesign of linear time-invariant systems, *IEEE Proceedings-Control Theory and Applications*, Vol. 149, pp. 297–302.
- Chilali, M. and Gahinet, P. (1996). $\mathcal{H}_\infty$ design with pole placement constraints: An LMI approach, *IEEE Trans. Autom. Control* **41**(3): 358–367.

- Gahinet, P. and Apkarian, P. (1994). A linear matrix inequality approach to $\mathcal{H}_\infty$ control, *International journal of robust and nonlinear control* **4**(4): 421–448.
- Kim, D. W., Park, J. B. and Joo, Y. H. (2010). Asymptotic stability of digitally redesigned control systems, *International Journal of Control* **83**(12): 2463–2470.
- Kobayashi, K. and Hiraishi, K. (2013). Controller design of networked control systems with multiple delays using interval methods, *Industrial Electronics Society, IECON 2013-39th Annual Conference of the IEEE*, IEEE, pp. 5632–5637.
- Leandro, M. A., Junior, J. R. C. and Kienitz, K. H. (2015). Robust d-stability via discrete controllers for continuous time uncertain systems using lmis with a scalar parameter, *Proc. 23th IEEE Mediterranean Conference on Control and Automation*, IEEE, Torremolinos, Malaga, Spain, pp. 644–649.
- Lee, H. J., Park, J. B. and Joo, Y. H. (2006). Further refinement on lmi-based digital redesign: delta-operator approach, *Circuits and Systems II: Express Briefs, IEEE Transactions on* **53**(6): 473–477.
- Oliveira, R. C., Bliman, P.-A. and Peres, P. L. (2008). Robust LMIs with parameters in multi-simplex: Existence of solutions and applications, *Proc. 47th IEEE Conf. Decision and Contr.*, Cancun, Mexico, pp. 2226–2231.
- Oliveira, R. C. L. F. and Peres, P. L. D. (2007). Parameter-dependent LMIs in robust analysis: characterization of homogeneous polynomially parameter-dependent solutions via LMI relaxations, *IEEE Trans. Autom. Control*, **52**(7): 1334–1340.
- Velasco, M., Martí, P., Villa, R. and Fuertes, J. M. (2005). Stability of networked control systems with bounded sampling rates and time delays, *Industrial Electronics Society, 2005. IECON 2005. 31st Annual Conference of IEEE*, IEEE, pp. 6–pp.