

RECONSTRUÇÃO DE FALHAS EM SISTEMAS COM ATRASOS ARBITRÁRIOS DE SAÍDA UTILIZANDO OBSERVADORES POR MODOS DESLIZANTES

HARDY L. C. P. PINTO*, TIAGO ROUX OLIVEIRA†, LIU HSU‡

*PETROBRAS — Centro de Pesquisas Leopoldo Américo Miguez de Mello
Av. Horacio Macedo, 950 — Cidade Universitária — 21941-915
Rio de Janeiro, RJ, Brasil

†Departamento de Engenharia Eletrônica e de Telecomunicações — Faculdade de Engenharia
Universidade do Estado do Rio de Janeiro — Rua São Francisco Xavier 524, sala 5018E — 20550-900

‡Programa de Engenharia Elétrica
COPPE/Universidade Federal do Rio de Janeiro, C.P. 68504
21945-970 - Rio de Janeiro, RJ, Brasil

Emails: hardy@petrobras.com.br, tiagoroux@uerj.br, liu@coep.ufrj.br

Abstract— This paper presents a novel method for actuator fault reconstruction under measurement delays by means of sliding mode observers. The output delay is considered arbitrary, possibly uncertain, being constant or time-varying. The proposed approach computes the observer gains without the necessity of appealing to specific methods for functional differential equations or retarded systems, being totally independent of the duration of the considered delay.

Keywords— Fault diagnostics and identification, Output time-delay, sliding mode observers.

Resumo— Este artigo apresenta um novo método para a reconstrução de sinais de falhas de atuador em sistemas que apresentam atrasos de medição, através do uso de observadores por modos deslizantes. O atraso considerado é arbitrário, podendo conter incertezas, sendo constante ou variante no tempo. A abordagem proposta tem como principal vantagem a possibilidade de se determinar os ganhos do observador sem a necessidade da aplicação de métodos específicos para sistemas com atraso, sendo independente da duração do atraso considerado.

Palavras-chave— Diagnóstico e detecção de falhas, Atraso de medição, Observadores por modos deslizantes.

1 Introdução

Com o aumento da utilização de sistemas remotamente acionados, tem crescido o interesse por métodos de detecção e isolamento de falhas (FDI - *Fault Detection and Isolation*), para permitir o diagnóstico de funcionamento e consequente adoção de medidas de manutenção preditiva (Lafraia, 2001; Isermann, 2006).

Dentre as técnicas de reconstrução de falhas, o uso de observadores por modos deslizantes (Walcott and Zak, 1987; Edwards and Spurgeon, 1994) vem ganhando destaque desde o artigo (Edwards et al., 2000) onde a técnica foi detalhada. Nesta estratégia, o sinal de injeção de entrada descontínuo utilizado para forçar o erro de observação a zero é utilizado para a reconstrução da falha. Em (Tan and Edwards, 2003; Alwi et al., 2011), é mostrado que é possível aumentar a robustez a erros de modelagem através de uma otimização dos ganhos do observador utilizando a condição “*Bounded Real Lemma*” (Chilali and Gahinet, 1996; Boyd et al., 1994).

Observando-se a bibliografia de observadores para sistemas com atraso, é possível verificar que ainda há poucos artigos com foco em reconstrução de falhas em sistemas com atraso de medição (Han et al., 2014). Em geral os artigos são focados em projeto de controle (Ahmed-Ali et al., 2012; Cou-

tinho et al., 2014) ou se dedicam a sistemas com atraso de estado (Seuret et al., 2007).

Este trabalho procura estabelecer um método de reconstrução de falhas de atuadores em sistemas com atrasos de saída com o objetivo de diagnóstico. O atraso considerado poderá ser relativamente grande, ter incertezas, ser constante ou variante no tempo. O método proposto é baseado em observadores por modos deslizantes devidamente modificados em relação às soluções já consideradas clássicas.

2 Formulação do problema

Considere um sistema linear, invariante no tempo apresentando um atraso de medição τ . A entrada $u_0(t)$ é suposta conhecida (mensurável).

$$\begin{cases} \dot{x}_0(t) &= Ax_0(t) + Bu_0(t) + Ff_0(t) \\ y(t) &= Cx_0(t - \tau) \end{cases} \quad (1)$$

onde $u_0(t) \in \mathbb{R}^m$, $x_0(t) \in \mathbb{R}^n$, $y(t) \in \mathbb{R}^p$, $f_0(t) \in \mathbb{R}^p$, $q \leq p < n$.

São feitas as seguintes hipóteses:

(A0) O atraso τ é limitado e existe $\hat{\tau}$ com norma limitada $|\hat{\tau}(t)| \leq d < 1$, $d \in \mathbb{R}^+$.

(A1) As matrizes A, B, C, F são conhecidas.

(A2) O sistema apresenta uma perturbação desconhecida $f_0(t)$, limitada por um escalar $\alpha > 0$

conhecido de forma que:

$$\|f_0(t)\| \leq \alpha \quad (2)$$

(A3) O sistema (A, F, C) é observável e de fase mínima.

(A4) $\text{posto}(CF) = \text{posto}(F) = q$.

(A5) A entrada $u_0(t)$ é conhecida para todo o tempo passado até $t - \tau$ e limitada em norma segundo $\|u_0(t)\| \leq \beta_u/2$, $\beta_u > 0$, com β constante.

Definindo as variáveis atrasadas:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0(t - \tau), & f(t) &= f_0(t - \tau), \\ u(t) &= u_0(t - \tau) \end{aligned} \quad (3)$$

Aplicando a regra da cadeia a $\dot{x}(t)$:

$$\dot{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt} = (1 - \dot{\tau}) \frac{dx_0(t - \tau)}{d(t - \tau)} \quad (4)$$

Podemos escrever então o sistema (1) em função das variáveis atrasadas, na forma abaixo:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= (1 - \dot{\tau}) [Ax(t) + Bu(t) + Ff(t)] \\ y(t) &= Cx(t) \end{cases} \quad (5)$$

Desta forma, considerando a hipótese A0, todas as propriedades de estabilidade das análises que seguem são preservadas.

O *objetivo* é reproduzir a perturbação atrasada $f(t)$ dispondo-se dos sinais de saída $y(t)$ e de entrada $u(t)$. Tal perturbação pode representar o efeito de uma falha de atuador. Para tal será proposto um observador adequado baseado em modos deslizantes (Walcott and Zak, 1987; Edwards and Spurgeon, 1994; Edwards et al., 2000).

3 Sistemas com atrasos constantes

3.1 Atraso conhecido

Inicialmente considere-se que o atraso de medição τ é constante e conhecido de tal forma que, associado a hipótese (A5), é possível trabalhar com a entrada atrasada $u(t) = u_0(t - \tau)$.

Seja o observador por modos deslizantes abaixo:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) &= A\hat{x}(t) + Bu(t) - G_l e_y + G_n \nu \\ \hat{y}(t) &= C\hat{x}(t) \end{cases} \quad (6)$$

onde o erro de saída e_y pode ser definido como $e_y(t) \triangleq \hat{y}(t) - y(t) = C(\hat{x}(t) - x(t)) \triangleq Ce(t)$ e ν é uma parcela descontínua de injeção que leva o observador a um modo deslizante, dada pela expressão:

$$\nu = -\rho \frac{P_0 e_y}{\|P_0 e_y\|} \quad (7)$$

onde a matriz $P_0 > 0$ será definida posteriormente.

O erro de observação de estados segue a dinâmica:

$$\dot{e}(t) = A_o e(t) + G_n \nu - Ff(t) \quad (8)$$

onde $A_o \triangleq A - G_l C$ e $f(t) = f_0(t - \tau)$.

Observando-se as equações (6) e (8), verifica-se que o observador aqui proposto para a reconstrução de falha atrasada foi levado à mesma estrutura utilizada por (Edwards et al., 2000), que será sumarizado a seguir.

A partir da hipótese (A4), é possível supor que o sistema está ou pode ser levado à forma regular (Utkin, 1992; Edwards and Spurgeon, 1998), onde:

$$A = \left[\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{21} \\ \hline A_{211} & A_{22} \end{array} \right], \quad B = \left[\begin{array}{c} B_1 \\ B_2 \end{array} \right], \quad (9)$$

$$\begin{aligned} F &= \left[\begin{array}{c} 0 \\ F_0 \end{array} \right], & F_0 &= \left[\begin{array}{c} 0 \\ F_2 \end{array} \right] \\ C &= [0 \mid T], & T^T T &= I \end{aligned} \quad (10)$$

com o bloco A_{11} possuindo autovalores estáveis. O par (A_{11}, A_{211}) é detectável e seus modos inobserváveis são os zeros invariantes de (A, F, C) .

Para as matrizes de ganhos G_l e G_n serão adotadas as hipóteses abaixo:

(A6) G_l é tal que $A - G_l C$ tem todos os autovalores com parte real negativa.

(A7) G_n possui a estrutura:

$$G_n = \left[\begin{array}{c} -LT^T \\ I_p \end{array} \right], \quad L = [L_0 \mid 0] \quad (11)$$

A proposição 4.1 da referência (Alwi et al., 2011) mostra que se existe uma matriz $P > 0$ que satisfaça $(A_0^T P + P A_0) < 0$ e $\rho \geq \alpha \|CF\| + \eta_0$, $\eta_0 > 0$, o erro de estimação de estados $e(t)$ é assintoticamente estável e que o erro de saída será levado a um modo deslizante ideal na superfície $\mathcal{S} = \{e : Ce = 0\}$, sendo governado pelos autovalores da matriz $\mathcal{A}_{11} = A_{11} + L_0 A_{211}$.

Para a prova da proposição citada, é adotada a transformação não singular $T_L : e \mapsto \bar{e}$ proposta por (Edwards and Spurgeon, 1998) e que terá importância na reconstrução da falha:

$$T_L = \left[\begin{array}{cc} I & L \\ 0 & T \end{array} \right] \quad (12)$$

Nestas novas coordenadas, assuma que a matriz de Lyapunov P possua a forma:

$$\mathcal{P} = (T_L^{-1})^T P (T_L^{-1}) = \left[\begin{array}{cc} P_1 & 0 \\ 0 & P_0 \end{array} \right] \quad (13)$$

A expressão para o erro nas novas coordena-

das se torna:

$$\begin{cases} \dot{\bar{e}}_1(t) &= \mathcal{A}_{11}\bar{e}_1(t) + (\mathcal{A}_{12} - \mathcal{G}_{l,1})\bar{e}_2(t) \\ \dot{\bar{e}}_2(t) &= \mathcal{A}_{21}\bar{e}_1(t) + (\mathcal{A}_{22} - \mathcal{G}_{l,2})\bar{e}_2(t) \\ &\quad + \nu - \mathcal{F}_2 f(t) \\ \bar{e}_y &= \bar{e}_2 \end{cases} \quad (14)$$

onde $(\mathcal{A}, \mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{G}_l)$ correspondem a representação das matrizes (A, C, F, G_l) nas novas coordenadas e $\mathcal{A}_{11} = A_{11} + L_0 A_{211}$.

Proposição 1 *O erro de saída do observador (6) é levado a zero em tempo finito, estabelecendo-se um modo deslizante. Os estados do observador $\hat{x}$ se aproximam exponencialmente dos estados do sistema τ -atrasado (5), $x(t)$, e sua parcela descontínua de injeção de erro de saída permite a reconstrução o sinal de perturbação $f(t) = f_0(t - \tau)$.*

Quando o modo deslizante for atingido, o erro de saída $\bar{e}_2(t)$ e sua derivada $\dot{\bar{e}}_2$ serão levados a zero, na equação (14):

$$\begin{cases} \dot{\bar{e}}_1(t) &= \mathcal{A}_{11}\bar{e}_1(t) \\ 0 &= \mathcal{A}_{21}\bar{e}_1(t) + \nu_{eq} - \mathcal{F}_2 f(t) \end{cases} \quad (15)$$

onde ν_{eq} é o sinal de injeção de erro de saída, que é o análogo em observadores ao controle equivalente (Utkin, 1992), e que representa o controle contínuo necessário para manter o observador na superfície de deslizamento. Como $\bar{e}_1(t) \rightarrow 0$, $t \rightarrow \infty$, vemos que:

$$\nu_{eq} \rightarrow \mathcal{F}_2 f(t) \quad (16)$$

O sinal ν_{eq} pode ser estimado pela aproximação contínua de ν :

$$\nu_\delta = -\rho \frac{P_0 e_y}{\|P_0 e_y\| + \delta} \quad (17)$$

onde o parâmetro $\delta > 0$ é um escalar pequeno e seu valor deve ser calibrado para se obter a exatidão desejada na reconstrução. A partir da hipótese (A4), $\mathcal{F}_2$ possui pseudo-inversa $\mathcal{F}_2^\dagger = (\mathcal{F}_2^T \mathcal{F}_2)^{-1} \mathcal{F}_2^T$. A estimativa do sinal de perturbação atrasado é obtida pela expressão (Edwards et al., 2000):

$$\hat{f}(t) = \mathcal{F}_2^\dagger \nu_\delta \quad (18)$$

Pode-se observar que as dinâmicas do observador e do erro $e(t)$ não dependem de sinais atrasados desconhecidos, permitindo atingir um modo deslizante ideal, sem efeito de *chattering*, possibilitando determinar os ganhos sem a necessidade da aplicação de métodos específicos para sistemas com atraso, como os de *Lyapunov-Krasovskii* ou de *Lyapunov-Razumikhin* (Fridman, 2014; Gu et al., 2003) e de ser independente da duração do atraso. Em outras abordagens para este problema (Han et al., 2014), o observador também é projetado com a saída atrasada. A parcela descontínua é, então, função de um erro atrasado, levando o observador a apresentar um *chattering* dependente da duração do atraso.

3.2 Atraso constante com incerteza

Nem sempre a duração exata do atraso de medição está disponível e tem-se apenas uma estimativa $\hat{\tau}$. Assim, o sinal $u(t)$ não está disponível para aplicação no observador, apenas sua estimativa $\hat{u}(t) = u_0(t - \hat{\tau})$.

Um observador por modos deslizantes similar ao anterior pode ser implementado utilizando a estimativa $\hat{u}(t)$:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) &= A\hat{x}(t) + B\hat{u}(t) - G_l e_y + G_n \nu \\ \hat{y}(t) &= C\hat{x}(t) \end{cases} \quad (19)$$

O erro de observação neste caso segue a dinâmica:

$$\dot{e}(t) = A_o e(t) + B\tilde{u}(t) + G_n \nu - F f(t) \quad (20)$$

onde $A_o \triangleq A - G_l C$ e $\tilde{u}(t) = \hat{u}(t) - u(t)$.

Considere a hipótese:

(A8) Para $|\hat{\tau} - \tau| < \epsilon$, $\|u(t - \hat{\tau}) - u(t - \tau)\| < \beta(\epsilon)$ onde $\beta(\epsilon)$ é uma função classe $\mathcal{K}$, de forma que $\|\tilde{u}(t)\| < \beta(\epsilon)$.

Lema 1 *Se existe uma matriz $P > 0$ que satisfaça $(A_0^T P + P A_0) < 0$, $\|\tilde{u}(t)\| < \beta(\epsilon)$ e $\rho \geq \alpha \|CF\| + \eta_0$, o erro de estimação de estado $e(t)$ tende no limite ao conjunto:*

$$\Omega_\epsilon = \{e : \|e\| < 2\mu_1 \beta(\epsilon) / \mu_0 + \epsilon\} \quad (21)$$

para um $\epsilon > 0$ pequeno.

Prova: A prova deste lema é baseada na apresentada nas referências (Alwi et al., 2011; Tan and Edwards, 2003). Considere uma função de Lyapunov $V(e) = e^T P e$. A derivada desta função ao longo das trajetórias de (20) é dada pela expressão:

$$\begin{aligned} \dot{V}(e) &= e^T (A_0^T P + P A_0) e + 2e^T P B \tilde{u} \\ &\quad - 2e^T P F f + 2e^T P G_n \nu \end{aligned} \quad (22)$$

Utilizando desigualdades de Rayleigh e Cauchy-Schwarz, esta desigualdade pode então ser escrita como:

$$\begin{aligned} \dot{V}(e) &\leq -\mu_0 \|e\|^2 + 2\mu_1 \beta(\epsilon) \|e\| \\ &\quad - 2\|P_0 e_y\|(\rho - \|CF\|\alpha) \\ &\leq \|e\|(-\mu_0 \|e\| + 2\mu_1 \beta(\epsilon)) \end{aligned} \quad (23)$$

o que mostra que o erro de estimação de estado é levado em tempo finito para Ω_ϵ $\square$

Lema 2 *Se a modulação do termo descontínuo ρ satisfizer:*

$$\rho \geq 2\|\mathcal{A}_{21}\| \frac{\mu_1 \beta(\epsilon)}{\mu_0} + \|TB_2\| \beta(\epsilon) + \|\mathcal{F}_2\| \alpha + \eta_0 \quad (24)$$

o erro de observação será levado a um modo deslizante ideal na superfície $\mathcal{S} = \{e : Ce = 0\}$.

Prova: Considerando a mudança de variáveis $T_L : e \mapsto \bar{e}$ apresentada anteriormente, a expressão para o erro nas novas coordenadas se torna:

$$\begin{cases} \dot{\bar{e}}_1(t) &= \mathcal{A}_{11}\bar{e}_1(t) + (\mathcal{A}_{12} - \mathcal{G}_{l,1})\bar{e}_2(t) \\ &\quad + (B_1 + LB_2)\tilde{u}(t) \\ \dot{\bar{e}}_2(t) &= \mathcal{A}_{21}\bar{e}_1(t) + (\mathcal{A}_{22} - \mathcal{G}_{l,2})\bar{e}_2(t) \\ &\quad + \nu - \mathcal{F}_2 f(t) + TB_2\tilde{u}(t) \\ \bar{e}_y &= \bar{e}_2 \end{cases} \quad (25)$$

Utilizando uma função de Lyapunov $V_{\bar{e}_y}(\bar{e}_2) = \bar{e}_2^T P_0 \bar{e}_2$ para a saída do sistema, sua derivada ao longo da trajetória (25) será:

$$\begin{aligned} \dot{V}_{\bar{e}_y}(\bar{e}_2) &= 2\bar{e}_2(t)^T P_0 \mathcal{A}_{21} \bar{e}_1(t) \\ &\quad + \bar{e}_2(t)^T ((\mathcal{A}_{22} - \mathcal{G}_{l,2})^T P_0 + P_0 (\mathcal{A}_{22} - \mathcal{G}_{l,2})) \bar{e}_2(t) \\ &\quad + 2\bar{e}_2(t)^T P_0 \nu - 2\bar{e}_2(t)^T P_0 \mathcal{F}_2 f(t) \\ &\quad + 2\bar{e}_2(t)^T P_0 TB_2 \tilde{u}(t) \end{aligned} \quad (26)$$

Considerando a definição de ρ por (24), temos que:

$$\dot{V}_{\bar{e}_y}(\bar{e}_2) \leq -2\|P_0 \bar{e}_2\| \eta_0 \leq -2\eta_0 \sqrt{\lambda_{\min}(P_0)} \sqrt{V_{\bar{e}_y}} \quad (27)$$

mostrando que o erro de saída ($\bar{e}_2 = Te_2 = Ce$) atinge zero em tempo finito, estabelecendo um modo deslizante. $\square$

Quando o modo deslizante for atingido, o erro de saída $\bar{e}_2(t)$ e sua derivada $\dot{\bar{e}}_2$ serão levados a zero, pelo Lema 2, na equação (25):

$$\begin{cases} \dot{\bar{e}}_1(t) &= \mathcal{A}_{11}\bar{e}_1(t) + (B_1 + LB_2)\tilde{u}(t) \\ 0 &= \mathcal{A}_{21}\bar{e}_1(t) + \nu_{eq} - \mathcal{F}_2 f(t) + TB_2\tilde{u}(t) \end{cases} \quad (28)$$

Neste caso, o erro $\dot{\bar{e}}_1(t)$ não irá a zero. Para a reconstrução do sinal de perturbação, passa a ser necessário considerar a dinâmica do erro durante o modo deslizante.

Pode-se então aplicar o método de reconstrução proposto em (Tan and Edwards, 2003; Alwi et al., 2011), com poucas adaptações. Seja W uma matriz de escala $W \triangleq \begin{bmatrix} W_1 & F_0^{-1} \end{bmatrix}$, onde W_1 é parâmetro de projeto. Esta matriz de escala será utilizada para reconstruir o sinal de perturbação através da expressão:

$$\hat{f}(t) = WT^T \nu_{eq} \quad (29)$$

Aplicando à equação (28):

$$\begin{cases} \dot{\bar{e}}_1(t) &= \mathcal{A}_{11}\bar{e}_1(t) - (B_1 + LB_2)\tilde{u}(t) \\ \hat{f}(t) &= -WT^T \mathcal{A}_{21}\bar{e}_1(t) + WB_2\tilde{u}(t) + f(t) \end{cases} \quad (30)$$

Assim, temos um sistema para a reconstrução:

$$\hat{f}(t) = f(t) + G(s)\tilde{u}(t) \quad (31)$$

onde $G(s) = WT^T \mathcal{A}_{21} [(sI - \mathcal{A}_{11})^{-1}(B_1 + LB_2)] + WB_2$.

O ganho da transferência $G(s)$ entre $\tilde{u}(t)$ e $\hat{f}(t)$ será limitado a $\gamma > 0$, se a desigualdade abaixo (“textitBounded Real Lemma”) for factível (Chilali and Gahinet, 1996; Boyd et al., 1994):

$$\begin{bmatrix} \hat{P}\mathcal{A}_{11} + \mathcal{A}_{11}^T \hat{P} & * & * \\ -(B_1 + LB_2)^T \hat{P} & -\gamma I & * \\ -W\mathcal{A}_{21} & -WB_2 & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (32)$$

A matriz $\hat{P} > 0$, bem como as matrizes L e W devem ser encontradas de forma a minimizar γ , satisfazendo às hipóteses (A6) e (A7) e aos Lemas 1 e 2, para os quais a matriz P deve atender a forma especificada na equação (13).

4 Atraso incerto e variante no tempo

No caso particular em que o atraso é variante no tempo e conhecido é possível utilizar o observador descrito na seção 3.1 com algumas alterações:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) &= (1 - \dot{\tau}) [\hat{A}\hat{x}(t) + Bu(t) - G_l e_y + G_n \nu] \\ \hat{y}(t) &= C\hat{x}(t) \end{cases} \quad (33)$$

A dinâmica do erro de observação passa a ser

$$\dot{e}(t) = (1 - \dot{\tau}) [A_o e(t) + G_n \nu - F f(t)] \quad (34)$$

onde $A_o \triangleq A - G_l C$ e $f(t) = f_0(t - \tau)$. Observe-se que o Lema 1 ainda é aplicável para a equação acima, com $\epsilon = 0$, já que a derivada da função de Lyapunov $V(e) = e^T P e$ será a equação (22) multiplicada pelo escalar $(1 - \dot{\tau})$. Assim, podemos dizer que se existe uma matriz $P > 0$ que satisfaça $(A_o^T P + P A_o) < 0$ e $\rho \geq \alpha \|CF\| + \eta_0$, o erro de estimação de estado $e(t)$ tende no limite ao conjunto $\Omega_\epsilon = \{e : \|e\| < \epsilon\}$ para um ϵ arbitrariamente pequeno.

Da mesma forma, o Lema 2 também pode ser aplicado aqui com a mesma ideia. Assim, se a modulação do termo descontínuo $\rho \geq \alpha \|CF\| + \eta_0$ o erro de observação será levado a um modo deslizante ideal na superfície $\mathcal{S} = \{e : Ce = 0\}$.

Quando o modo deslizante for atingido, o erro de saída $\bar{e}_2(t)$ e sua derivada $\dot{\bar{e}}_2$ serão levados a zero, nas equações de erro já transformadas por $T_L : e \mapsto \bar{e}$:

$$\begin{cases} \dot{\bar{e}}_1(t) &= (1 - \dot{\tau}) [\mathcal{A}_{11}\bar{e}_1(t)] \\ 0 &= (1 - \dot{\tau}) [\mathcal{A}_{21}\bar{e}_1(t) + \nu_{eq} - \mathcal{F}_2 f(t)] \end{cases} \quad (35)$$

Assim, vemos que ainda é válida a expressão:

$$\nu_{eq} \rightarrow \mathcal{F}_2 f(t) \quad (36)$$

e é possível estimar o sinal de perturbação $f(t) = f_0(t - \tau(t))$ pela equação (18).

Caso não se tenha conhecimento pleno do atraso, ainda é possível efetuar a reconstrução do sinal de perturbação. Suponha que o atraso de medição τ no sistema pode ser representado por uma estimativa constante $\hat{\tau}$ conhecida somada a uma parcela incerta variante no tempo $\tau(t) = \hat{\tau} + \tau_v(t)$, de tal forma que a derivada do atraso é contínua e possui norma limitada, $|\dot{\tau}(t)| < d < 1$.

Neste caso em particular, consideraremos a hipótese adicional:

(A9) A matriz A é Hurwitz.

O observador terá forma similar a proposta na seção anterior, utilizando $\hat{u}(t) = u_0(t - \hat{\tau})$:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + B\hat{u}(t) - G_1 e_y + G_n \nu \\ \hat{y}(t) = C\hat{x}(t) \end{cases} \quad (37)$$

O erro de observação de estados apresenta a seguinte dinâmica:

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= A_o e(t) + G_n \nu - Ff(t) + B\tilde{u}(t) \\ &+ \dot{\tau}(t) [Ax(t) + Bu(t) + Ff(t)] \end{aligned} \quad (38)$$

onde $A_o \triangleq A - G_1 C$, $f = f_0(t - \tau(t))$ e $\tilde{u}(t) = \hat{u}(t) - u(t)$.

A partir da hipótese (A8) e considerando $|\hat{\tau} - \tau| = |\tau_v(t)| < \epsilon_v$ tem-se que $\|\tilde{u}(t)\| < \beta_v(\epsilon_v)$ onde $\beta_v(\epsilon_v)$ é uma função classe $\mathcal{K}$.

Utilizando a hipótese (A9), é possível verificar que uma vez que os estados do sistema x atinjam o conjunto $\Omega_x = \{x : \|x\| < \mathcal{K} + \epsilon\}$, para um ϵ arbitrariamente pequeno, eles permanecerão limitados a este. Para tanto, considere-se uma função de Lyapunov $V_x(x) = x^T P_x x$. Derivando ao longo das trajetórias do sistema e utilizando as desigualdades de Rayleigh e Cauchy-Schwarz, e os majo- rantes dos sinais u e f , tem-se:

$$\dot{V}_x(x) \leq \|x\|(-\kappa_0 \|x\| + \kappa_1 \beta_u/2 + \kappa_2 \alpha) \quad (39)$$

mostrando que a proposição é verdadeira para $\mathcal{K} \triangleq (\kappa_1 \beta_v(\epsilon_v) + \kappa_2 \alpha)/\kappa_0$.

Pode-se então definir uma função limitada $\xi(t)$, $\|\xi(t)\| \leq \bar{\xi}(t)$:

$$\xi(t) = B\tilde{u}(t) + \dot{\tau}(t)[Ax(t) + Bu(t) + Ff(t)] \quad (40)$$

$$\begin{aligned} \bar{\xi}(t) &\triangleq \|B\|\beta_v(\epsilon_v) + d\|B\|\beta_u/2 \\ &+ d\|A\|\mathcal{K} + d\|F\|\alpha \end{aligned} \quad (41)$$

de tal forma que o erro de observação pode ser escrito como:

$$\dot{e}(t) = A_o e(t) + G_n \nu - Ff(t) + \xi(t) \quad (42)$$

Lema 3 Se a modulação da parcela descontínua $\rho \geq \alpha\|CF\| + \eta_0$, o erro de estimação de estado $e(t)$ tende no limite ao conjunto:

$$\Omega_\epsilon = \{e : \|e\| < 2\mu_1 \bar{\xi}/\mu_0 + \epsilon\} \quad (43)$$

para um escalar ϵ arbitrariamente pequeno.

Prova: A demonstração segue os mesmos passos da prova do Lema 1, com $\mu_1 = \lambda_{\max}(P)$ $\square$

Lema 4 Se a modulação da parcela descontínua ρ satisfizer:

$$\rho \geq \|A_{21}\| \frac{\mu_1 \bar{\xi}}{\mu_0} + \alpha\|\mathcal{F}_2\| + \|T\bar{\xi}\| + \eta_0 \quad (44)$$

o erro de observação será levado a um modo deslizante ideal na superfície $\mathcal{S} = \{e : Ce = 0\}$.

Prova: Seguindo o mesmo roteiro da prova do Lema 2. Utilizando uma função de Lyapunov $V_{\bar{e}_y}(\bar{e}_2) = \bar{e}_2^T P_0 \bar{e}_2$, sua derivada ao longo da trajetória do erro (42) será majorada por:

$$\begin{aligned} \dot{V}_{\bar{e}_y}(\bar{e}_2) &\leq -2\|P_0 \bar{e}_2\|(\rho - \|A_{21}\| \frac{\mu_1 \bar{\xi}}{\mu_0} - \alpha\|\mathcal{F}_2\| \\ &- \|T\bar{\xi}\|) \end{aligned} \quad (45)$$

Substituindo (44) na expressão acima, é possível ver que $\dot{V}_{\bar{e}_y}(\bar{e}_2) \leq -2\eta_0 \sqrt{\lambda_{\min}(P_0)} \sqrt{V_{\bar{e}_y}}$, ou seja, o erro de saída atingirá zero em tempo finito, estabelecendo um modo deslizante. $\square$

Durante o modo deslizante, novamente será necessário considerar a dinâmica do erro, utilizando a expressão (29) para a reconstrução do sinal de falha. Aplicando (29) à equação do erro durante o modo deslizante, obtemos:

$$\begin{cases} \dot{\bar{e}}_1(t) = \mathcal{A}_{11} \bar{e}_1(t) - (\xi_1 + L\xi_2)\tilde{u}(t) \\ \hat{f}(t) = -WT^T \mathcal{A}_{21} \bar{e}_1(t) + WT^T \xi_2 + f(t) \end{cases} \quad (46)$$

onde ξ_1 e ξ_2 são as partições de ξ conforme a forma regular sendo utilizada.

Assim, temos um sistema para a reconstrução $\hat{f}(t) = f(t) + G(s)\xi(t)$ onde $G(s)\xi = WT^T \mathcal{A}_{21}[(sI - \mathcal{A}_{11})^{-1}(\xi_1(t) + L\xi_2(t)) + WT^T \xi_2(t)]$.

Novamente, para obtenção dos parâmetros que limitam o ganho da função de transferência $G(s)$, é possível usar o método descrito por (Tan and Edwards, 2003).

5 Exemplo

Devido ao pouco espaço restante para os exemplos, vamos focar nos resultados numéricos obtidos a partir do proposto na seção 3.2.

Considere o exemplo proposto por (Edwards et al., 2000) de um modelo linearizado em torno da origem para um pêndulo invertido sobre um carrinho, cujas matrizes do modelo de estados são

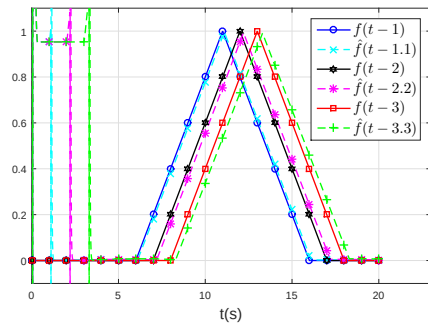


Figura 1: Comparação entre sinais de perturbação e suas reconstruções, para diversos atrasos de medição e com incerteza de 10% no valor do atraso

apresentadas abaixo:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1.9333 & -1.9872 & 0.0091 \\ 0 & 36.9771 & 6.2589 & -0.1738 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.3205 \\ -1.0095 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.3205 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$C = [I_{3 \times 3} \quad 0] \quad (47)$$

O sistema é estabilizado por realimentação de estados que coloca os pólos em $\{-4.2, -4.4, -4.6, -4.8\}$. Os ganhos G_l e G_n foram calculados para que $\mathcal{A}_{11} = [-10]$ e para que os pólos de $\mathcal{A}_{22}$ fossem levados a $\{-15, -16, -17\}$.

Um atraso de monitoração constante foi adicionado ao sistema de exemplo para validar o método proposto neste trabalho. Para simular a incerteza, o atraso aplicado ao sistema era sempre 10% maior que a estimativa sendo usada. Um sinal $u(t) = 5\text{sen}(0.5t)$ foi utilizado como entrada. Foi possível ajustar a matriz de escala W para que o erro de reconstrução do sinal de perturbação ficasse abaixo de 1%. A figura 1 apresenta os resultados da simulação para atrasos de 1.1s, 2.2s e 3.3s, reconstruídos a partir de uma estimativa de atraso de respectivamente 1s, 2s e 3s.

6 Conclusões

Neste trabalho foi possível estabelecer um método para reconstrução de sinais de falha de atuador em sistemas com atraso de monitoração a partir do uso de observadores por modos deslizantes, através da representação do sistema em termos das variáveis de estado atrasadas.

As dinâmicas do observador e do erro de observação são independentes do atraso. Desta forma, abordagem aqui apresentada tem como principal vantagem não necessitar da aplicação de métodos específicos para sistemas com atraso

(Fridman, 2014; Gu et al., 2003) para o projeto do observador.

Uma vez que o erro de observação saía não se apresenta atrasado, foi possível mostrar que é possível ser atingido um modo deslizante ideal evitando que seja necessário lidar com o problema de *chattering*.

Referências

- Ahmed-Ali, T., Cherrier, E. and Lamnabhi-Lagarigue, F. (2012). Cascade high gain predictors for a class of nonlinear systems, *IEEE Transactions on Automatic Control* **57**(1): 224–229.
- Alwi, H., Edwards, C. and Tan, C. P. (2011). *Fault Detection and Fault-Tolerant Control Using Sliding Modes*, Advances in Industrial Control, 1 edn, Springer-Verlag London.
- Boyd, S., El Ghaoui, L., Feron, E. and Balakrishnan, V. (1994). *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, Vol. 15 of *Studies in Applied Mathematics*, SIAM, Philadelphia, PA.
- Chilali, M. and Gahinet, P. (1996). $\mathcal{H}_\infty$ design with pole placement constraints: an lmi approach, *IEEE Transactions on Automatic Control* **41**(3): 358–367.
- Coutinho, C. L., Oliveira, T. R. and Cunha, J. P. V. S. (2014). Output-feedback sliding mode control via cascade observers for global stabilisation of a class of nonlinear systems with output delay, *International Journal of Control* **87**(11): 2327–2337.
- Edwards, C. and Spurgeon, S. (1998). *Sliding Mode Control: Theory And Applications*, Taylor & Francis.
- Edwards, C. and Spurgeon, S. K. (1994). On the development of discontinuous observers, *International Journal of Control* **59**(5): 1211–1229.
- Edwards, C., Spurgeon, S. K. and Patton, R. J. (2000). Sliding mode observers for fault detection and isolation, *Automatica* **36**(4): 541–553.
- Fridman, E. (2014). *Introduction to Time-Delay Systems: Analysis and Control*, Systems & Control: Foundations & Applications, 1 edn, Birkhauser Basel.
- Gu, K., Kharitonov, V. L. and Chen, J. (2003). *Stability of Time-Delay Systems (Control Engineering)*, 1 edn, Birkhauser Boston.
- Han, X., Fridman, E. and Spurgeon, S. (2014). Sampled-data sliding mode observer for robust fault reconstruction: A time-delay approach, *Journal of the Franklin Institute* **351**(4): 2125–2142.
- Isermann, R. (2006). *Fault-Diagnosis Systems: An Introduction from Fault Detection to Fault Tolerance*, 1 edn, Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- Lafraia, J. R. B. (2001). *Manual de Confiabilidade, Manutenibilidade e Disponibilidade*, Qualitymark.
- Seuret, A., Floquet, T., Richard, J. P. and Spurgeon, S. K. (2007). A sliding mode observer for linear systems with unknown time varying delay, *2007 American Control Conference*, pp. 4558–4563.
- Tan, C. and Edwards, C. (2003). Sliding mode observers for robust detection and reconstruction of actuator and sensor faults, *International Journal of Robust and Nonlinear Control* **13**(5): 443–463.
- Utkin, V. I. (1992). *Sliding Modes in Control and Optimization (Communications and Control Engineering)*, Springer.
- Walcott, B. and Zak, S. (1987). State observation of nonlinear uncertain dynamical systems, *IEEE Transactions on Automatic Control* **32**(2): 166–170.