

CARACTERIZAÇÃO DA FRONTEIRA DA REGIÃO DE ESTABILIDADE DE SISTEMAS DINÂMICOS AUTÔNOMOS NÃO LINEARES NA PRESENÇA DE PONTOS DE EQUILÍBRIO HOPF

JOSAPHAT R. R. GOUVEIA JR.^{*}, FABIÓLO MORAES AMARAL^{*}, LUÍS FERNANDO C. ALBERTO[†]

^{*}*Colegiado de Matemática, IFBA
Eunápolis, Bahia, Brasil*

[†]*Departamento de Engenharia Elétrica e de Computação, EESC, USP
Av. Trabalhador Sancarlense, 400, 13566-590, São Carlos, São Paulo, Brasil*

Emails: josaphat@ifba.edu.br, fabiolo@ifba.edu.br, lfcalberto@usp.br

Resumo— A complete characterization of the boundary of the stability region of nonlinear autonomous dynamical systems is developed admitting the existence non-hyperbolic equilibrium points of type Hopf and hyperbolic critical elements on the stability boundary. Under the assumption of transversality, it is shown that the stability boundary is comprised of all stable manifolds of the hyperbolic critical elements lying on the stability boundary union with the stable and/or center-stable manifolds of the type- k , $k \geq 1$, Hopf equilibrium points which belong to the stability boundary.

Palavras-chave— Dynamic System, Nonlinear Systems, Stability Region, Stability Boundary, Hopf equilibrium point, Periodic orbits.

Resumo— Uma caracterização completa da fronteira da região de estabilidade de uma classe de sistemas dinâmicos autônomos não lineares é desenvolvida admitindo a existência de pontos de equilíbrio não-hiperbólicos do tipo Hopf e elementos críticos hiperbólicos na fronteira da região de estabilidade. Sob a condição de transversalidade, mostra-se que a fronteira da região de estabilidade é composta pelas variedades estáveis de todos os elementos críticos presentes na fronteira da região de estabilidade, incluindo as variedades estáveis e/ou centro estáveis dos pontos de equilíbrio Hopf que pertencem à fronteira da região de estabilidade.

Palavras-chave— Sistemas Dinâmicos, Sistemas Não Lineares, Região de Estabilidade, Fronteira da Região de Estabilidade, Ponto de Equilíbrio Hopf, Órbitas Periódicas.

1 Introdução

Na teoria de região de estabilidade, uma caracterização completa da região de estabilidade para uma classe de sistemas dinâmicos não-lineares nos quais os conjuntos limites são compostos por pontos de equilíbrios hiperbólicos e órbitas periódicas hiperbólicas, foi desenvolvida por Chiang et al. (1988).

Neste artigo, estamos interessados em estudar a caracterização da região de estabilidade e de sua fronteira admitindo a existência de pontos de equilíbrio não-hiperbólicos do tipo Hopf e elementos críticos hiperbólicos na fronteira da região de estabilidade. A motivação deste estudo decorre da análise de sistemas dinâmicos sujeitos a variação de parâmetros. Para esses sistemas, bifurcações locais podem ocorrer na fronteira da região de estabilidade e a suposição de hiperbolicidade dos pontos de equilíbrio pode ser violada nos pontos de bifurcações. Logo, estudar a caracterização da fronteira da região de estabilidade em pontos de bifurcações é de fundamental importância e é o primeiro passo para entender como a região de estabilidade se comporta sob variações de parâmetros. O problema de bifurcações da região de estabilidade encontra aplicações importantes, por exemplo, na análise de colapso de tensão de sistemas elétricos de potência, Guedes et al. (2005) e Gao (2004).

Alguns avanços nesta direção já foram obtidos e relatados na literatura. Em Gouveia Jr. et al. (2014), uma caracterização completa da fronteira da região de estabilidade na presença de pontos de equilíbrio não-hiperbólicos do tipo Hopf supercrítico foram desenvolvidas como o primeiro passo para entender o comportamento da região de estabilidade na ocorrência de bifurcações locais do tipo Hopf na fronteira da região de estabilidade. E em Gouveia Jr. et al. (2015), uma caracterização da fronteira da região de estabilidade na presença agora de pontos de equilíbrio não-hiperbólicos do tipo Hopf subcrítico foram apresentadas. As caracterizações desenvolvidas em Gouveia Jr. et al. (2014) e Gouveia Jr. et al. (2015) admitiram apenas a existência de pontos de equilíbrios, hiperbólicos e/ou não-hiperbólicos, na fronteira da região de estabilidade. Neste artigo, pretendemos estender esses resultados acomodando órbitas fechadas na fronteira da região de estabilidade.

Neste artigo, uma caracterização completa da fronteira da região de estabilidade é desenvolvida admitindo a existência de ponto de equilíbrio não-hiperbólico Hopf, do tipo ou supercrítico ou subcrítico, como também na presença de elementos críticos (pontos de equilíbrio ou órbitas periódicas) hiperbólicos na fronteira da região de estabilidade. Condições necessárias e suficientes para um ponto de equilíbrio do tipo Hopf pertencer à fronteira da região de estabilidade são exploradas

tanto para o caso de Hopf supercrítico como subcrítico. Demonstra-se que a fronteira da região de estabilidade é composta pela união de todas as variedades estáveis dos elementos críticos hiperbólicos presentes na fronteira da região de estabilidade com as variedades centro-estáveis e/ou centrais dos pontos de equilíbrios Hopf supercrítico na fronteira de estabilidade. Se o ponto de equilíbrio Hopf for do tipo subcrítico, a fronteira da região de estabilidade é composta da união de todas as variedades estáveis dos elementos críticos hiperbólicos presentes na fronteira da região de estabilidade com as variedades estáveis dos pontos de equilíbrios Hopf subcríticos na fronteira de estabilidade. Esta caracterização nos ajuda a entender os mecanismos da bifurcação de Hopf e suas implicações na região de estabilidade e suas variações com respeito aos parâmetros. Este artigo é organizado como segue. Na seção 3, uma revisão da caracterização da fronteira da região de estabilidade dos sistemas dinâmicos autônomos não lineares é apresentada. Na seção 4, os pontos de equilíbrio Hopf e as dinâmicas locais numa vizinhança destes pontos são estudadas. A principal contribuição deste trabalho é apresentado na Seção 5.

2 Preliminares

Nesta seção, recordaremos alguns conceitos clássicos relacionados com a teoria de sistemas dinâmicos que são essenciais para o desenvolvimento posterior deste trabalho. Mais detalhes sobre os conteúdos explorados nesta seção podem ser encontrados em Kuznetsov (1995) e Smale (1967).

Consideremos o sistema dinâmico autônomo não linear:

$$\dot{x} = f(x) \quad (1)$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$ e $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é um campo vetorial suave. A solução de (1) iniciando em x no tempo $t = 0$ é denotada por $\varphi(t, x)$. Um conjunto $S \subset \mathbb{R}^n$ é dito ser um conjunto invariante de (1) se cada trajetória de (1) começando em S permanece em S para todo t .

O ponto $x^* \in \mathbb{R}^n$ é um ponto de equilíbrio de (1) se $f(x^*) = 0$. Define-se elemento crítico do sistema dinâmico autônomo (1) como sendo ou uma órbita fechada ou um ponto de equilíbrio.

Um ponto de equilíbrio x^* de (1) é dito ser *hiperbólico* se todos os autovalores da matriz Jacobiana $D_x f(x^*)$ não têm parte real nula. Além disso, um ponto de equilíbrio hiperbólico x^* é do *tipo- k* se a matriz Jacobiana possui k autovalores com parte real positiva e $n - k$ autovalores com parte real negativa.

A órbita fechada ϕ do sistema dinâmico autônomo (1) é *hiperbólica*, se para qualquer $x_0 \in \phi$, a matriz Jacobiana da Aplicação de Poincaré associada à órbita fechada ϕ em x_0 possui todos os

multiplicadores característicos com módulo diferente de 1, com exceção apenas de um multiplicador característico que têm módulo igual a 1. A órbita fechada ϕ do sistema dinâmico (1) é do *tipo- k* se a matriz Jacobiana da Aplicação de Poincaré associada à órbita ϕ possui k multiplicadores característicos com módulo maior que 1, com $0 \leq k \leq n - 1$, e $n - k - 1$ multiplicadores característicos com módulo menor que 1.

Seja x^* um ponto de equilíbrio não-hiperbólico do sistema dinâmico autônomo não linear (1). Existem variedades invariantes suaves locais $W^s(x^*)$, $W^{cs}(x^*)$, $W^c(x^*)$, $W^u(x^*)$ e $W^{cu}(x^*)$ em x^* , veja Hirsch et al. (1970) e Perko (1991). Estas variedades são chamadas de variedades estável, centro estável, central, instável e centro instável, respectivamente. As variedades estável e instável são únicas, mas as variedades centro estável, central e centro instável podem não ser.

Transversalidade é um conceito geométrico que trata das interseções das variedades e têm desempenhado um papel muito importante no desenvolvimento da teoria de sistemas dinâmicos.

Definição 1: Sejam Ψ_i e Ψ_j variedades de dimensões n e l . Dizemos que as variedades $W^u(\Psi_i)$ e $W^s(\Psi_j)$ em $\mathbb{R}^n$ de classe C^r ($r \geq 1$) são transversais, se $W^u(\Psi_i) \cap W^s(\Psi_j) = \emptyset$; ou se $x \in W^u(\Psi_i) \cap W^s(\Psi_j) \neq \emptyset$, então $\dim(W^u(\Psi_i) \cap W^s(\Psi_j)) \geq 1 + \max\{n, l\}$ e $T_x(W^u(\Psi_i)) + T_x(W^s(\Psi_j)) = \mathbb{R}^n$, onde $T_x(W^u(\Psi_i))$ e $T_x(W^s(\Psi_j))$ denotam o espaço tangente de $W^u(\Psi_i)$ e $W^s(\Psi_j)$, respectivamente, no ponto x .

A definição de transversalidade acima implica na definição de transversalidade enunciada em Smale (1967). Por exemplo, se Ψ_i e Ψ_j são pontos de equilíbrios hiperbólicos e que satisfazem a condição de transversalidade definida acima, então $W^u(\Psi_i) \cap W^s(\Psi_j) = \emptyset$ ou se $x \in W^u(\Psi_i) \cap W^s(\Psi_j) \neq \emptyset$, então $T_x(W^u(\Psi_i)) + T_x(W^s(\Psi_j)) = \mathbb{R}^n$ e $\dim(W^u(\Psi_i) \cap W^s(\Psi_j)) \geq 1$, pois $\dim(\Psi_i) = \dim(\Psi_j) = 0$.

3 Caracterização da Fronteira da Região de Estabilidade

Nesta seção, apresentaremos uma visão geral da teoria existente sobre a caracterização da fronteira da região de estabilidade de sistemas dinâmicos não-lineares.

Suponha que x^s seja um ponto de equilíbrio assintoticamente estável do sistema (1). A *região de estabilidade* (ou região de atração) de x^s é o conjunto

$$A(x^s) = \{x \in \mathbb{R}^n | \varphi(t, x) \rightarrow x^s \text{ quando } t \rightarrow +\infty\}.$$

A região de estabilidade $A(x^s)$ é um conjunto aberto e invariante. Seu fecho $\overline{A(x^s)}$ é invariante e a *fronteira da região de estabilidade* $\partial A(x^s)$ é um conjunto fechado e invariante, veja Amaral (2010).

Com o intuito de compreender melhor a fronteira da região de estabilidade e obter melhores estimativas da região de estabilidade, foram desenvolvidas caracterizações da fronteira da região de estabilidade.

Uma caracterização completa da fronteira da região de estabilidade de um ponto de equilíbrio assintoticamente estável x^s do sistema (1) foi desenvolvida em Chiang et al. (1987) sob as seguintes hipóteses:

(B1) Todos os elementos críticos em $\partial A(x^s)$ são hiperbólicos;

(B2) As variedades estável e instável dos elementos críticos em $\partial A(x^s)$ satisfazem a condição de transversalidade;

(B3) Trajetórias em $\partial A(x^s)$ aproximam-se de um dos seus elementos crítico quando $t \rightarrow \infty$.

A fronteira da região de estabilidade de um ponto de equilíbrio assintoticamente estável x^s do sistema (1), satisfazendo as hipóteses (B1), (B2) e (B3), é a união das variedades estáveis de todos elementos críticos na fronteira $\partial A(x^s) = \bigcup_i W^s(\psi_i)$, onde ψ_i , $i = 1, 2, \dots$ são os elementos críticos hiperbólicos na fronteira da região de estabilidade $\partial A(x^s)$.

As hipóteses (B1) e (B2) são propriedades genéricas de sistemas dinâmicos na forma de (1), veja Palis (1969). Condições suficientes para a verificação da hipótese (B3) foram dadas em Chiang et al. (1988).

Neste artigo, estudaremos uma generalização da caracterização da fronteira da região de estabilidade quando a suposição (B1) é violada. Em particular, estudaremos a caracterização da fronteira da região de estabilidade quando um ponto de equilíbrio não hiperbólico do tipo Hopf é encontrado na fronteira da região de estabilidade. Embora a suposição (B1) seja genérica, o estudo da caracterização da fronteira da região de estabilidade na presença de pontos de equilíbrio não-hiperbólicos é importante para entender o comportamento da região de estabilidade a variações de parâmetros. Essas mudanças já foram investigadas na ocorrência de bifurcações sela-nó do tipo-zero na fronteira da região de estabilidade Amaral e Alberto (2010) e Amaral e Alberto (2011), e na ocorrência de pontos de equilíbrio Hopf supercríticos do tipo k , com $1 \leq k \leq n - 2$, Gouveia Jr. et al. (2013), e subcríticos do tipo k , com $1 \leq k \leq n - 2$, Gouveia Jr. et al. (2015).

4 Ponto de Equilíbrio Hopf

Nesta seção, um determinado tipo de ponto de equilíbrio não-hiperbólico, ou seja, o ponto de equilíbrio Hopf, é estudado. Em particular, o comportamento dinâmico em uma vizinhança deste equilíbrio é explorada em detalhes e o comportamento assintótico das soluções nas variedades locais invariantes é discutido.

Considere o sistema dinâmico não linear (1). Um ponto de equilíbrio não hiperbólico $p \in \mathbb{R}^n$ de (1) é chamado um ponto de equilíbrio de Hopf se as seguintes condições forem satisfeitas:

(i) $D_x f(p)$ tem um par simples de autovalores imaginários puros, $\pm i\omega$, e nenhum outro autovvalor com parte real nula;

(ii) $l_1 \neq 0$, onde l_1 é o Primeiro Coeficiente de Lyapunov, veja Gouveia Jr. et al. (2014).

Coefficientes de Lyapunov indicam o nível de degeneração do campo vetorial. Se o primeiro coeficiente de Lyapunov é diferente de zero, então o campo vetorial possui uma degeneração de ordem cúbica mostrando que termos cúbicos são os que determinam o tipo de comportamento dinâmico local na vizinhança do ponto de equilíbrio não hiperbólico na variedade central, ver Kuznetsov (1995) para mais detalhes.

Pontos de equilíbrio de Hopf podem ser classificados de acordo com o sinal do primeiro coeficiente de Lyapunov. Um ponto de equilíbrio de Hopf $p \in \mathbb{R}^n$ de (1) é chamado um ponto de equilíbrio Hopf supercrítico se o primeiro coeficiente de Lyapunov $l_1 < 0$ e é chamado um ponto de equilíbrio de Hopf subcrítico se o primeiro coeficiente de Lyapunov $l_1 > 0$.

Pontos de equilíbrio de Hopf podem também ser classificados em tipos de acordo com o número de autovalores de $D_x f(p)$ com parte real positiva. Um ponto de equilíbrio de Hopf p de (1) é chamado um ponto de equilíbrio de Hopf do tipo- k se $D_x f(p)$ tem k ($k \leq n - 2$) autovalores com parte real positiva e $n - k - 2$ com parte real negativa.

Neste artigo, estamos interessados nos dois tipos de pontos de equilíbrio de Hopf, os supercríticos e os subcríticos. Se p é um ponto de equilíbrio de Hopf supercrítico do tipo- k , então as seguintes propriedades são satisfeitas, veja Kuznetsov (1995) e Sotomayor (1973):

(i) A variedade instável k -dimensional $W^u(p)$ de p existe, é única, e se $q \in W^u(p)$ então $\varphi(t, q) \rightarrow p$ quando $t \rightarrow -\infty$.

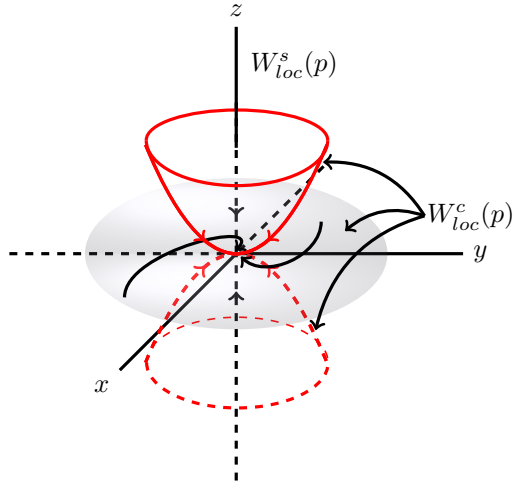
(ii) A variedade estável $(n - k - 2)$ -dimensional $W^s(p)$ de p existe, é única, e se $q \in W^s(p)$ então $\varphi(t, q) \rightarrow p$ quando $t \rightarrow +\infty$.

(iii) A variedade centro estável $(n - k)$ -dimensional $W^{cs}(p)$ de p existe, é única, e se $q \in W^{cs}(p)$ então $\varphi(t, q) \rightarrow p$ quando $t \rightarrow +\infty$.

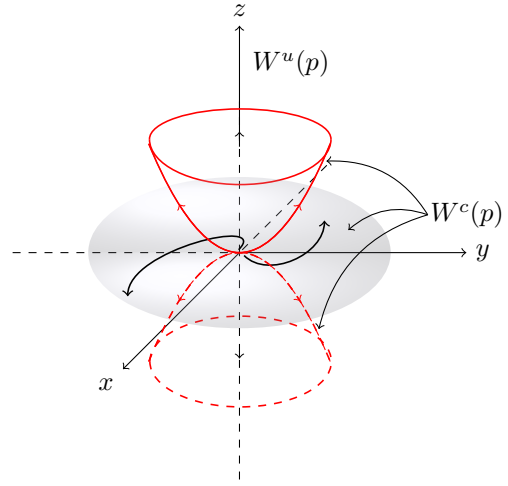
A Figura 1(a) ilustra as variedades invariantes para um ponto de equilíbrio de Hopf supercrítico do tipo-zero em $\mathbb{R}^3$ e a Figura 1(b) ilustra estas variedades invariantes para um ponto de equilíbrio de Hopf supercrítico do tipo-1 em $\mathbb{R}^3$.

Se p é um ponto de equilíbrio de Hopf subcrítico do tipo- k , então as seguintes propriedades são satisfeitas, veja Kuznetsov (1995) e Sotomayor (1973):

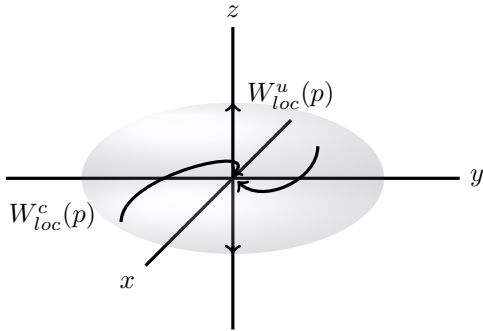
(i) A variedade instável k -dimensional $W^u(p)$ de p existe, é única, e se $q \in W^u(p)$ então $\varphi(t, q) \rightarrow p$ quando $t \rightarrow -\infty$.



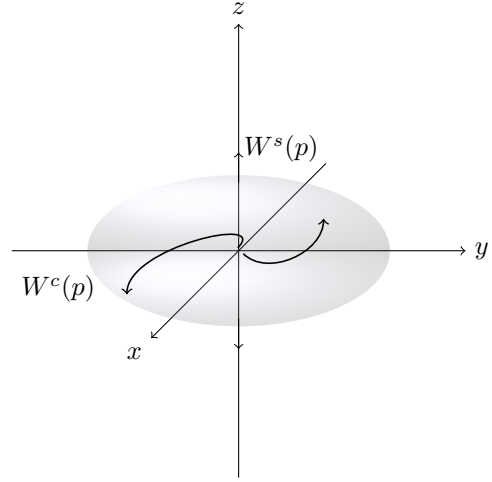
(a) Ponto de equilíbrio Hopf Supercrítico do tipo-zero



(a) Ponto de equilíbrio Hopf Subcrítico do tipo-1



(b) Ponto de equilíbrio Hopf Subcrítico do tipo-0



(b) Ponto de equilíbrio Hopf Subcrítico do tipo-0

Figura 1: 1(a) Variedades $W^c_{loc}(p)$ e $W^s_{loc}(p)$ para um ponto de equilíbrio Hopf supercrítico do tipo-zero p do sistema (1) em $\mathbb{R}^3$. $W^c_{loc}(p)$ não    nica. Tr s possíveis escolhas para $W^c_{loc}(p)$ são mostradas nesta figura. 1(b) Variedades $W^c_{loc}(p)$ e $W^u_{loc}(p)$ para um ponto de equilíbrio Hopf supercrítico do tipo-1 p do sistema (1) em $\mathbb{R}^3$. Neste caso, $W^c_{loc}(p)$    nica.

(ii) A variedade estável $(n - k - 2)$ -dimensional $W^s(p)$ de p existe,    nica, e se $q \in W^s(p)$ então $\varphi(t, q) \rightarrow p$ quando $t \rightarrow +\infty$.

(iii) A variedade centro instável $(k + 2)$ -dimensional $W^{cu}(p)$ de p existe,    nica, e se $q \in W^{cu}(p)$ então $\varphi(t, q) \rightarrow p$ quando $t \rightarrow -\infty$.

A Figura 2(a) ilustra as variedades invariantes para um ponto de equilíbrio de Hopf subcrítico do tipo-1 no $\mathbb{R}^3$ e a Figura 2(b) ilustra estas variedades invariantes para um ponto de equilíbrio de Hopf subcrítico do tipo-0 no $\mathbb{R}^3$.

5 Pontos de Equilíbrio de Hopf na fronteira da região de estabilidade

Nesta seção, resultados inéditos de caracterização de equilíbrios na fronteira da região de estabilidade são apresentados. Generalizaremos a caracterização da fronteira da região de estabilidade na presença de um ponto de equilíbrio Hopf, do tipo supercrítico ou subcrítico, na fronteira da região

Figura 2: 2(a) Variedades $W^c(p)$ e $W^u(p)$ para um ponto de equilíbrio Hopf Subcrítico p do tipo-1 do sistema (1) no $\mathbb{R}^3$. $W^c_{loc}(p)$ não    nica. Tr s possíveis escolhas para $W^c(p)$ são mostradas nesta figura. 2(b) Variedades $W^c(p)$ e $W^s(p)$ para um ponto de equilíbrio Hopf Subcrítico p do tipo-0 do sistema (1) no $\mathbb{R}^3$. Neste caso, $W^c(p)$    nica.

de estabilidade admitindo também na fronteira a existência de órbitas per dicas.

A caracterização da fronteira da região de estabilidade na presença de um ponto de equilíbrio Hopf será desenvolvida em dois passos. Primeiramente, estudaremos uma caracterização dos elementos críticos e os pontos de equilíbrio Hopf Supercríticos que pertencem   fronteira da região de estabilidade, e em seguida, estudaremos esta caracterização para pontos de equilíbrio Hopf Subcríticos.

Seja x^s um ponto de equilíbrio assintoticamente estável e considere as seguintes afirmações: (B1') Todos os elementos críticos em $\partial A(x^s)$ são elementos críticos hiperbólicos ou pontos de equilíbrio Hopf supercríticos; (B2') As variedades estáveis, centro-estáveis e/ou

centrais e as variedades instáveis dos elementos críticos em $\partial A(x^s)$ satisfazem a condição de transversalidade da definição 1.

O próximo teorema mostra a caracterização dos elementos críticos hiperbólicos e pontos de equilíbrio Hopf supercríticos na fronteira da região de estabilidade para tipo- k , com $1 \leq k \leq n-3$.

Teorema 1 (*Elementos críticos do tipo- k na fronteira da região de estabilidade*) Seja $A(x^s)$ a região de estabilidade de um ponto de equilíbrio assintoticamente estável x^s de (1). Sejam p um ponto de equilíbrio Hopf supercrítico do tipo- k , com $1 \leq k \leq n-3$, e ψ um elemento crítico hiperbólico do tipo- k' , com $k' \leq n$, de (1). Se as suposições (B1'), (B2') e (B3) são satisfeitas, então:

(i) Se ψ é um elemento crítico do tipo- k' , com $1 \leq k' \leq n$, então

$$\psi \text{ está na fronteira } \partial A(x^s) \iff W^u(\psi) \cap A(x^s) \neq \emptyset$$

$$\psi \text{ está na fronteira } \partial A(x^s) \iff W^s(\psi) \subset \partial A(x^s)$$

(ii) Se p é um ponto de equilíbrio Hopf supercrítico do tipo- k , com $1 \leq k \leq n-3$, então

$$p \in \partial A(x^s) \iff W^u(p) \cap A(x^s) \neq \emptyset$$

$$p \in \partial A(x^s) \iff W^{cs}(p) \subset \partial A(x^s)$$

(iii) Se p é um ponto de equilíbrio Hopf supercrítico do tipo- $(n-2)$, então

$$p \in \partial A(x^s) \iff W^u(p) \cap A(x^s) \neq \emptyset$$

$$p \in \partial A(x^s) \iff W^c(p) \subset \partial A(x^s)$$

A prova completa do Teorema 1 é longa e será omitida. Em seguida, discutiremos as principais ideias desta prova. A prova deste teorema consiste inicialmente da caracterização dos elementos críticos do tipo-1 na fronteira da região de estabilidade. A caracterização para elementos críticos de tipos superiores a 1 segue por argumentos de indução. A prova de que a interseção não vazia da variedade instável do elemento crítico com a região de estabilidade do ponto de equilíbrio assintoticamente estável é uma condição necessária e suficiente para garantir que o elemento crítico pertença à fronteira da região de estabilidade, resulta como uma consequência do λ -lemma para pontos de equilíbrio não hiperbólicos, veja Palis (1969), e de resultados de dimensão das variedades instáveis dos elementos críticos. A prova de que as variedades estáveis, centro-estáveis e/ou centrais dos elementos críticos em $\partial A(x^s)$ intersectam a região de estabilidade se o elemento crítico pertence a $\partial A(p)$ é muito similar à demonstração da primeira parte.

O próximo teorema oferece uma caracterização completa da fronteira da região de estabilidade quando pontos de equilíbrio Hopf supercrítico encontram-se em $\partial A(x^s)$.

Teorema 2 (*Caracterização da Fronteira de Estabilidade para Elementos Críticos*) Seja x^s um ponto de equilíbrio assintoticamente estável de (1) e $A(x^s)$ sua região de estabilidade. Se as suposições (B1') e (B3) são satisfeitas, então

$$\partial A(x^s) \subset \bigcup_i W^s(x_i) \bigcup_k W^s(\phi_k) \bigcup_j W^{cs}(p_j) \bigcup_l W^c(q_l)$$

onde x_i são os pontos de equilíbrio hiperbólicos, ϕ_k são as órbitas fechadas hiperbólicas, p_j os pontos de equilíbrio Hopf supercríticos do tipo- k , com $1 \leq k \leq n-3$, e q_l os pontos de equilíbrio Hopf supercríticos do tipo- $(n-2)$ em $\partial A(x^s)$, $i, k, j, l = 1, 2, \dots$. Se a suposição (B2') é satisfeita, então

$$\partial A(x^s) = \bigcup_i W^s(x_i) \bigcup_k W^s(\phi_k) \bigcup_j W^{cs}(p_j) \bigcup_l W^c(q_l).$$

Considere agora as seguintes afirmações:

(B1'') Todos os elementos críticos em $\partial A(x^s)$ são elementos críticos hiperbólicos ou pontos de equilíbrio Hopf subcríticos;

(B2'') As variedades estáveis e as variedades instáveis, centro-instáveis e/ou centrais dos elementos críticos em $\partial A(x^s)$ satisfazem a condição de transversalidade da definição 1.

O próximo teorema oferece condições necessárias e suficientes para garantir que elementos críticos hiperbólicos e pontos de equilíbrio Hopf Subcríticos pertençam à fronteira da região de estabilidade em termos das propriedades das suas variedades estável local, centro instável local e centro local.

Teorema 3 (*Elementos críticos tipo- k na fronteira da região de estabilidade*) Seja $A(x^s)$ a região de estabilidade de um ponto de equilíbrio assintoticamente estável x^s de (1) e suponha que as seguintes suposições (B1''), (B2'') e (B3) sejam satisfeitas. Sejam p um ponto de equilíbrio Hopf subcrítico do tipo- k , com $1 \leq k \leq n-3$, e ψ um elemento crítico do tipo- k' , com $k' \leq n$, de (1). Então:

(i) Se ψ é um elemento crítico do tipo- k' , com $1 \leq k' \leq n$, então

$$\psi \in \partial A(x^s) \iff W^u(\psi) \cap A(x^s) \neq \emptyset$$

$$\psi \in \partial A(x^s) \iff W^s(\psi) \subset \partial A(x^s)$$

(ii) Se p é um ponto de equilíbrio Hopf subcrítico do tipo-0, então

$$p \in \partial A(x^s) \iff W^c(p) \cap A(x^s) \neq \emptyset$$

$$p \in \partial A(x^s) \iff W^s(p) \subset \partial A(x^s)$$

(ii) Se p é um ponto de equilíbrio Hopf subcrítico do tipo- k , com $1 \leq k \leq n-3$, então

$$p \in \partial A(x^s) \iff W^{cu}(p) \cap A(x^s) \neq \emptyset$$

$$p \in \partial A(x^s) \iff W^s(p) \subset \partial A(x^s)$$

ii. Se p é um ponto de equilíbrio Hopf subcrítico do tipo- $n-2$, então

$$p \in \partial A(x^s) \iff W^{cu}(p) \cap A(x^s) \neq \emptyset$$

O próximo teorema oferece uma caracterização completa da fronteira da região de estabilidade quando existem pontos de equilíbrio Hopf subcríticos em $\partial A(x^s)$.

Teorema 4 (Caracterização da Fronteira da Região de Estabilidade): *Seja x^s um ponto de equilíbrio assintoticamente estável de (1) e $A(x^s)$ sua região de estabilidade. Se as suposições (B1''), e (B3) são satisfeitas, então*

$$\partial A(x^s) \subset \bigcup_i W^s(\psi_i) \bigcup_j W^s(p_j)$$

onde ψ_i são os elementos críticos hiperbólico e p_j os pontos de equilíbrio Hopf subcríticos em $\partial A(x^s)$, $i, j = 1, 2, \dots$. Se a suposição (B2'') é satisfeita, então

$$\partial A(x^s) = \bigcup_i W^s(\psi_i) \bigcup_j W^s(p_j).$$

6 Conclusão

Neste artigo estudamos a caracterização da fronteira da região de estabilidade de sistemas dinâmicos não lineares autônomos na presença de pontos de equilíbrio Hopf tanto para caso supercrítico quanto para o caso subcrítico. Foram oferecidas condições necessárias e suficientes para que um ponto de equilíbrio hiperbólico e um ponto de equilíbrio Hopf, supercrítico ou subcrítico, pertençam à fronteira da região de estabilidade. A caracterização da fronteira da região de estabilidade proposta neste trabalho é uma generalização das caracterizações encontradas na literatura permitindo a presença de pontos de equilíbrio não-hiperbólicos do tipo Hopf na fronteira da região de estabilidade. Explorando as caracterizações desenvolvidas neste trabalho, esperamos, no futuro próximo, entender como a região de estabilidade se comporta quando bifurcações locais do tipo Hopf ocorrem na fronteira da região de estabilidade.

Referências

- Amaral, F. M. (2010). *Caracterização, estimativas e bifurcações da região de estabilidade de sistemas dinâmicos não lineares*, PhD thesis, Universidade de São Paulo.
- Amaral, F. M. e Alberto, L. F. C. (2010). Stability boundary characterization of nonlinear autonomous dynamical systems in the presence of a type-zero saddle-node equilibrium point, *TEMA - Tendências em Matemática Aplicada e Computacional* **11**: p. 110–120.
- Amaral, F. M. e Alberto, L. F. C. (2011). Stability region bifurcations of nonlinear autonomous dynamical systems: Type-zero saddle-node bifurcations, *International Journal of Robust and Nonlinear Control* **21**(6): p. 591–612.
- Chiang, H. D., Hirsch, M. W. e Wu, F. F. (1988). Stability region of nonlinear autonomous dynamical systems, *IEEE Transactions on Automatic Control* **33**(1): p. 16–27.
- Chiang, H. D., Wu, F. F. e Varaiya, P. P. (1987). Foundations of direct methods for power system transient stability analysis, *IEEE Transactions on Circuits and Systems-I* **34**(2): p. 160–173.
- Gao, Y. H. (2004). Bifurcations and stability boundary of a power system, *Acta Mathematicae Applicatae Sinica (English Series)* **20**(3): p. 513–532.
- Gouveia Jr., J. R. R., Amaral, F. M. e Alberto, L. F. C. (2013). Supercritical hopf equilibrium points on the boundary of the stability region, *52nd IEEE Conference on Decision and Control* pp. p. 5252–5257.
- Gouveia Jr., J. R. R., Amaral, F. M. e Alberto, L. F. C. (2014). Stability boundary characterization of nonlinear autonomous dynamical systems in the presence of a supercritical hopf equilibrium point, *International Journal of Bifurcation and Chaos in Applied Sciences and Engineering* **23**(12): 1350196–1.
- Gouveia Jr., J. R. R., Amaral, F. M. e Alberto, L. F. C. (2015). Pontos de equilíbrio hopf subcríticos na fronteira da região de estabilidade, *III CMAC-SE* **3**(2).
- Guedes, R. B. L., Alberto, L. F. C. e Bretas, N. G. (2005). Power system low-voltage solutions using an auxiliary gradient system for voltage collapse purposes, *Power Systems, IEEE Transactions on* **20**(3): p. 1528–1537.
- Hirsch, M. W., Pugh, C. C. e Shub, M. (1970). Invariant manifolds, **76**(5): p. 1015–1019.
- Kuznetsov, Y. A. (1995). *Elements of Applied Bifurcation Theory*, Springer-Verlag, New York.
- Palis, J. (1969). *On Morse-Smale dynamical systems*, Vol. 8, Topology.
- Perko, L. (1991). *Differential Equations and Dynamical Systems*, Springer-Verlag, New York.
- Smale, S. (1967). Differentiable dynamical systems, **73**: p. 747–817.
- Sotomayor, J. (1973). *Generic bifurcations of dynamical systems*, *Dynamical Systems*, New York: Academic Press.