

ALGORITMO DIRETO DE CALIBRAÇÃO DE MAGNETÔMETROS TRIAXIAIS POR AJUSTE DE ELIPSOIDE UTILIZANDO DISTÂNCIA ALGÉBRICA

SÉRGIO MUCCIACCIA, ANSELMO FRIZERA, EVANDRO SALLES

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica (PPGEE), Universidade Federal do Espírito Santo
Av. Fernando Ferrari, 514, Goiabeiras, CEP 29075-910, Vitória - ES
E-mails: smucciaccia@gmail.com, anselmo@ele.ufes.br, evandro@ele.ufes.br

Abstract— The measurements from magnetometers are sensitive to disturbances and errors, requiring a calibration method than can considerably improve accuracy. The ellipsoid fitting is one of the most used methods for magnetometer calibration, but the majority of the algorithms uses iterative methods, causing stability and time execution problems. As an alternative, a direct algorithm based on minimum squares and algebraic distance is proposed. Computer simulations and tests with real data show that the algorithm eliminates almost all the linear errors while performing much faster than traditional algorithms.

Keywords— magnetometer, calibration, ellipsoid fitting, algebraic distance.

Resumo— As medidas obtidas de sensores de campo magnético são sensíveis a perturbações e erros, sendo necessário um método de calibração que pode melhorar consideravelmente sua precisão. O ajuste de elipsoides é um dos métodos mais utilizados para calibração de magnetômetros, porém a maioria dos algoritmos utiliza métodos iterativos, causando problemas de tempo de execução e convergência. Como alternativa, propõe-se um algoritmo direto de cálculo dos parâmetros de calibração utilizando o método dos mínimos quadrados com a métrica de distância algébrica. As simulações computacionais e testes com dados reais mostram que o algoritmo elimina quase a totalidade dos erros lineares, enquanto executa muito mais rápido que os algoritmos tradicionais.

Palavras-chave— magnetômetro, calibração, ajuste de elipsoide, distância algébrica.

1 Introdução

Os magnetômetros são largamente utilizados em sistemas para determinação de atitude. Por medirem o campo magnético da Terra, eles fornecem uma informação de direção que não deriva com o tempo. Essa informação é útil para diversos sistemas, como navios, aeronaves e veículos em geral que necessitem de uma referência de orientação.

Historicamente, o campo magnético da terra vem sendo utilizado para prover a direção do norte magnético e contribuir para os métodos de navegação (Hemerly, 2008). Essa utilização cresceu até a atualidade, onde um grande número de dispositivos embarcados possui magnetômetros triaxiais, como celulares, tablets e controladores de jogos.

Entretanto, medições com sensores magnéticos de baixo custo são corrompidas por vários erros, incluindo problemas na fabricação e desvios magnéticos induzidos na plataforma do sensor (Renaudin, 2010). Uma parte substancial desses erros é linear e invariante no tempo, permitindo que seja filtrada por um algoritmo, melhorando as medições do sensor.

Os algoritmos de calibração de sensores inerciais têm recebido grande atenção na comunidade científica (Renaudin, 2010). Assim sendo, este artigo apresenta um método novo para calibração de magnetômetros, de solução direta, utilizando mínimos quadrados e distância algébrica.

Diferentes métricas e métodos de otimização são utilizados na literatura. Vasconcelos (2011) propõe um estimador de máxima verossimilhança utilizando o método de Newton para encontrar o ponto ótimo. Em (Camps, 2009) uma métrica simples que usa o módulo de todas as medições é aplicada com uma versão

modificada do método de Levenberg-Marquardt para encontrar os parâmetros de calibração.

Por utilizar a métrica de distância algébrica, o algoritmo proposto neste trabalho é mais rápido que os empregados atualmente e pode executar com uma quantidade maior de pontos de entrada. Cada ponto consiste nas coordenadas de um espaço de 3 dimensões representando uma medição feita pelo magnetômetro de três eixos. Esses pontos são utilizados no processo de calibração por ajuste de elipsoide e podem ser obtidos em uma etapa separada de calibração ou mesmo durante a utilização do sensor.

O método aqui proposto, por ser um algoritmo direto, tem a vantagem de ser executado sempre no mesmo tempo, dependendo apenas do número de pontos de medição. A maioria dos algoritmos na literatura atual são baseados em métodos iterativos que, em geral, dependem de um critério de parada e tem tempo de execução variável. O objetivo deste trabalho é propor um algoritmo com maior desempenho que os atuais e que sua complexidade cresce linearmente com a quantidade de pontos.

Este artigo está organizado da seguinte maneira: após a breve introdução apresentada nesta seção, a seção 2 apresenta uma descrição dos erros que afetam os magnetômetros e sua formulação, a seção 3 expõe a base teórica utilizada para este trabalho, as seções 4 e 5 explicam a implementação do algoritmo, a seção 6 mostra os resultados das simulações e testes e a seção 7 apresenta as conclusões.

2 Erros nas medidas com magnetômetros

Se um magnetômetro ideal, sem nenhum erro interno ou perturbação externa, for girado em diversas

orientações, o que se espera é que suas medições formem uma esfera centrada na origem. No entanto, esses sensores estão sujeitos a fatores que distorcem esta forma esférica, fazendo com que a superfície obtida em condições reais seja um elipsoide deslocado da origem.

Nesta seção, alguns erros presentes nas medidas efetuadas com magnetômetros são apresentados na perspectiva do método do elipsoide. Os principais erros são o *offset*, o erro de sensibilidade, as distorções *soft-iron* e *hard-iron* e a não ortogonalidade (Vasconcelos, 2011).

O *offset* é um desvio constate em todos os valores do magnetômetro, que se caracteriza por transladar os pontos das medições que deveriam formar uma esfera centrada na origem, deslocando a posição de seu centro.

O erro de sensibilidade ocorre devido às diferenças de sensibilidade de cada eixo do magnetômetro. Esse erro tende a escalar uma das coordenadas das medidas e transformar a esfera em um elipsoide.

A distorção *hard-iron* ocorre quando algum objeto na mesma plataforma que o sensor, ou seja, que sempre gira junto com ele, gera um campo magnético constante que se soma às suas leituras. Com esse erro a esfera das medições aparece transladada, com o centro fora da origem.

A distorção *soft-iron* acontece com a interação de materiais ferromagnéticos na plataforma do sensor com campos externos. Ela adiciona valores que variam com a orientação do sensor escalando e girando a esfera em um elipsoide inclinado.

Um magnetômetro triaxial é composto por três sensores unidirecionais alinhados em eixos perpendiculares entre si. Assim, a não ortogonalidade se dá devido ao desalinhamento desses eixos, que não ficam perfeitamente perpendiculares. Alternativamente erros na estrutura do material transdutor o fazem ter uma sensibilidade a campos de outros eixos gerando o mesmo efeito nas medições. Como na distorção *soft-iron* este efeito transforma a esfera em um elipsoide inclinado.

Também é importante mencionar que as medições estão sujeitas a ruído aleatório. Este pode ser provocado por diversos fatores, dentre eles ondas eletromagnéticas que se propagam no ar, as variações de temperatura que ocorrem no material (ruído térmico), vibrações mecânicas que influenciam a medição, entre outros (Fraden, 2010). O ruído aleatório não é tratado no algoritmo aqui proposto.

Todos os erros mencionados têm o efeito de escalar, girar ou transladar os vetores de medições. Portanto a expressão do campo magnético medido $\hat{h}$ pode ser dada em relação ao campo magnético real h seguindo

$$\hat{h} = Ah + b + n, \quad (1)$$

onde A é uma matriz que aplica uma rotação e escala no vetor h , b translada o vetor resultante e n é um

ruído aleatório. Logo para cancelar os erros, as matrizes A e b devem ser calculadas. Essa formulação é utilizada em diversos métodos de calibração de magnetômetro propostos na literatura (Hermerly, 2014; Renaudin, 2010; Vasconcelos, 2011).

3 Método do elipsoide e distância algébrica

No sistema de coordenadas cartesianas 3D a equação geral de uma superfície quádrlica é descrita por

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz + gx + hy + iz + j = 0. \quad (2)$$

Com um conjunto de pontos representando as medições com o sensor em várias orientações é possível estimar os coeficientes da equação quádrlica formada pela nuvem de pontos. A equação 2 contém todas as informações necessárias para se inferir os parâmetros da calibração, portanto o processo de calibração pode ser feito estimando-se os coeficientes da equação do elipsoide (Harker, 2008).

Diversos métodos são usados para se determinar o elipsoide em questão (Camps, 2009; Vasconcelos, 2011; Fang, 2011). Como os pontos contém ruído, em geral tenta-se minimizar alguma função de custo, para obter o elipsoide mais próximo possível da nuvem de pontos.

A distância algébrica possui algumas propriedades interessantes. Ela é invariante a rotação, ou seja, se um elipsoide e um ponto sofrerem uma rotação qualquer, a distância algébrica entre eles continua a mesma.

Também é invariante a translação, o mesmo resultado é obtido para qualquer translação envolvendo o ponto e o elipsoide ao mesmo tempo. Portanto as propriedades básicas da distância algébrica podem ser analisadas com o caso mais simples: um elipsoide centrado na origem e alinhado com os eixos. A equação da distância algébrica d para um elipsoide nessas condições é dada por

$$d = \frac{x^2}{r_x^2} + \frac{y^2}{r_y^2} + \frac{z^2}{r_z^2} - 1, \quad (3)$$

onde r_x , r_y e r_z são os raios do elipsoide nos respectivos eixos. Desta forma, o conjunto dos pontos com uma distância algébrica d do elipsoide formam outro elipsoide como mostrado na equação 4.

$$\frac{x^2}{(d+1)r_x^2} + \frac{y^2}{(d+1)r_y^2} + \frac{z^2}{(d+1)r_z^2} = 1 \quad (4)$$

Na Figura 1 é possível observar os pontos de mesma distância algébrica de uma seção do elipsoide, mostrada em 2 dimensões para facilitar a visualização.

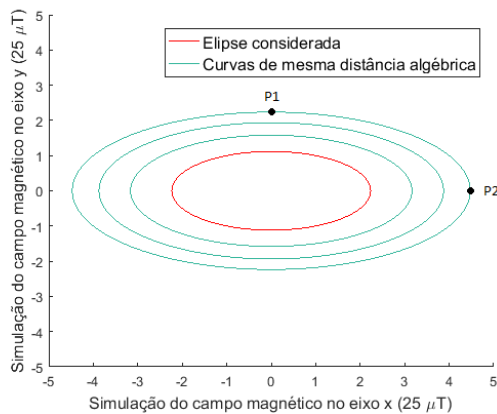


Figura 1. Curvas de mesma distância algébrica

Os pontos P1 e P2 possuem a mesma distância algébrica, mas o ponto P2 possui duas vezes a distância euclidiana do ponto P1 até a elipse. Isso ilustra uma propriedade da distância algébrica: a componente do ponto que está na direção do eixo maior tende a contribuir com proporcionalmente menos valor na distância.

Um eixo maior do elipsoide representa uma direção em que as medidas estão escaladas e, portanto, os erros também terão valores maiores nessa direção. Uma parte do erro não é aumentada de acordo com a direção, como por exemplo o erro de quantificação do campo magnético, mas em geral os pontos tendem a apresentar uma maior variância na direção onde o elipsoide é maior.

Assim sendo, a distância algébrica é menos afetada pelos pontos com maior erro em um fator bem próximo a uma proporcionalidade do erro. Além disso, quando as dimensões do elipsoide são muito grandes em relação à distância dos pontos, a distância algébrica se torna aproximadamente proporcional à distância euclidiana (considerando o aumento nos eixos).

Quando a distância dos pontos é muito maior que as dimensões do elipsoide a distância algébrica tende a ser proporcional ao quadrado da distância euclidiana.

Na prática os ruídos tendem a ser pequenos em relação ao campo magnético medido, o que faz com que a distância algébrica se aproxime muito da distância euclidiana escalada nos eixos de acordo com a proporção do elipsoide.

Essas características e a formulação mais simples fazem da distância algébrica uma métrica adequada para obtenção dos coeficientes elipsoide.

4 Método matemático

A equação geral de uma quádrlica dada em (2) possui um parâmetro livre, pois se todos os coeficientes forem escalados pelo mesmo fator, a superfície continua a mesma. Logo, um método de normalização que evite a solução trivial (todos os parâmetros iguais

a zero) se faz necessário. A normalização indicada na equação (5) pode ser usada:

$$a + b + c = 1 \quad (5)$$

Essa normalização tem a vantagem de ser invariante a rotação e translação do elipsoide, evita a solução trivial e elimina o parâmetro livre. Utilizando o método dos mínimos quadrados a expressão do erro a ser minimizado com a distância algébrica normalizada é dada pela equação 6.

$$E = \sum (a(x_i^2 - z_i^2) + b(y_i^2 - z_i^2) + z_i^2 + dx_iy_i + ex_iz_i + fy_iz_i + gx_i + hy_i + iz_i + j)^2 \quad (6)$$

Sendo x_i , y_i e z_i as coordenadas do ponto i . Como o elipsoide desejado deve ter menor erro possível, algum método é necessário para encontrar os parâmetros que resultem no erro mínimo. Se o quadrado da expressão dentro do somatório for calculado percebe-se que todas as derivadas parciais geram equações lineares. Como exemplo calculando a derivada parcial do erro na variável a , a equação 7 é obtida.

$$\frac{dE}{da} = \sum 2(x_i^2 - z_i^2)^2 a + 2(x_i^2 - z_i^2)(by_i^2 - bz_i^2 + z_i^2 + dx_iz_i + ex_iz_i + fy_iz_i + gx_i + hy_i + iz_i + j) \quad (7)$$

Os coeficientes dessa derivada parcial e de todas as outras podem ser obtidos realizando os somatórios em cima das coordenadas dos pontos. Calculando as 9 derivadas parciais e igualando todas a zero um sistema linear 9x9 é obtido e a solução desse sistema, se for única, descreve a quádrlica com menor erro quadrático de distância algébrica.

O problema desse método é que a equação geral das quádrlicas não descreve apenas elipsoides, mas sim várias superfícies dentro de 17 formas básicas, como por exemplo o cone, o cilindro, o elipsoide, o cone elíptico, o cilindro elíptico, o hiperboloide parabólico, o hiperboloide elíptico, o cilindro hiperbólico e o paraboloide (Ying, 2012). Alguns autores tentam adicionar restrições para garantir que os parâmetros obtidos serão relativos a um elipsoide (Fang, 2011; Hermerly, 2014; Renaudin, 2010). Não obstante, por serem não lineares, a resolução analítica de um sistema contendo essas equações se torna muito difícil e métodos iterativos se fazem necessários, prejudicando o desempenho do algoritmo (Fitzgibbon, 1999).

Entretanto, o fato da equação representar outras superfícies não é uma limitação do método. Se o sistema linear possuir uma solução única, então esse ponto será o mínimo global e local no espaço considerado. Supondo um elipsoide de raios definidos, não nulos e finitos. Dada a equação desse elipsoide é possível mostrar que um aumento infinitesimal em qual-

quer um dos coeficientes dessa equação resulta em outro elipsoide que pode ser representado como uma transformação de escala, rotação e translação do primeiro. Essa demonstração é possível considerando os coeficientes da equação das quádricas como coordenadas de um espaço topológico (Gallier, 2016).

Qualquer rotação aplicada em um elipsoide de raios definidos gera outro elipsoide e o mesmo ocorre com a translação. Logo, se o método citado resultar na equação de um paraboloide, dado um elipsoide qualquer que se encaixa nos pontos dados, existe um caminho entre esse elipsoide e o paraboloide dito, em que o erro sempre diminui, pois nenhum ponto tem todas as derivadas parciais nulas, além do que representa o paraboloide.

Se a rotação e a translação não conseguem fazer um elipsoide passar para um paraboloide, então no caminho um dos raios do elipsoide vai crescer até infinito ou diminuir até zero para que ele se transforme em um paraboloide.

Na Figura 2 um conjunto de pontos em que o melhor encaixe é uma parábola foi montado e uma elipse que se encaixa bem nos dados é mostrada em vermelho. Com o método de descida de gradiente são geradas sucessivas elipses com erro menor até chegar em uma parábola. O raio da elipse aumenta até o infinito até que ela se quebra em uma parábola.

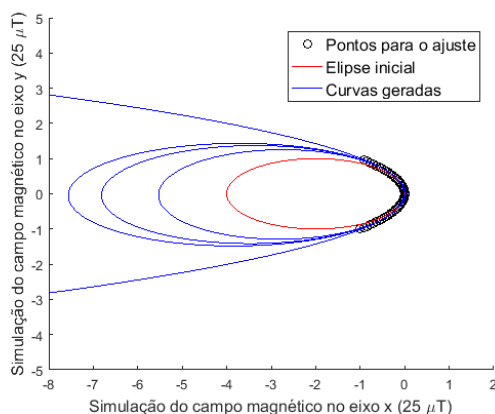


Figura 2. Caminho entre elipse e parábola

O raio da elipse no maior eixo é um valor muito importante na calibração, uma vez que se ele for muito grande o algoritmo vai retornar resultados sem sentido. Se existem infinitas elipses com menor erro é impossível determinar qual é a correta para calibração. O mesmo pode ser estendido para elipsoides, porém a demonstração é muito trabalhosa e envolve uma variedade grande de superfícies.

Portanto, se a solução do sistema linear for uma superfície qualquer diferente de um elipsoide, qualquer algoritmo baseado em distância algébrica irá chegar a resultados inconsistentes, seja direto ou iterativo. Isso também ocorre com a distância euclidiana, porém pela complexidade da fórmula de distância entre um ponto e um elipsoide é difícil demonstrar em que ocasiões isso ocorre.

Para esse tipo de problema não é possível que o sistema seja sem solução e se tiverem infinitas soluções os mesmos problemas acontecem.

5 Tratamento dos dados

Se a solução do sistema linear não representa um elipsoide e o algoritmo não consegue melhorar os resultados isso ocorre devido ao fato de que problema não está no algoritmo em si, mas nos dados de calibração, a nuvem de pontos obtida girando o sensor em várias direções.

O principal fator que leva a resultados ruins é a distribuição dos pontos. Se os pontos colhidos durante a calibração estiverem com uma distribuição uniforme em toda a superfície do elipsoide os resultados obtidos são excelentes.

Além disso, os algoritmos baseados em mínimos quadrados são muito sensíveis a *outliers* (Bektas, 2015). Por isso, um tratamento adequado dos dados pode melhorar consideravelmente os resultados do sistema como um todo.

Em (Camps, 2009) o autor propõe projetar os pontos em 2 dimensões para calcular sua distribuição e verificar se o algoritmo precisa de mais pontos ou não.

Considerando um processo onde o usuário pode colocar o dispositivo em modo de calibração e girá-lo, o sistema pode avisar se a quantidade e distribuição dos pontos é adequada acendendo um LED para o usuário quando não necessitar de mais dados.

Yu et. al. propõe um algoritmo de duas fases no estilo RANSAC modificado que elimina os *outliers* do elipsoide, gerando respostas melhores sobre condições intensas de ruído (Yu, 2009).

Para este trabalho foi feito um algoritmo que recebe os dados do magnetômetro e guarda até reunir 200 pontos. Depois disso o algoritmo verifica se a distribuição da densidade dos pontos está adequada. Caso não esteja, substitui-se os pontos em área de alta densidade por novos pontos adquiridos, até chegar na distribuição necessária para executar o algoritmo.

O sistema linear é então resolvido, e se a equação não formar um elipsoide ele continua na fase de obter mais pontos, apesar disto acontecer raramente, pois apenas a distribuição aproximadamente uniforme já é uma garantia grande que a resposta será um elipsoide.

6 Resultados

Foi realizado um teste baseado em simulação computacional. Um elipsoide foi gerado, com o centro, os raios e os ângulos de orientação gerados aleatoriamente. Uma nuvem de 200 pontos pertencentes ao elipsoide foi gerada onde cada unidade de área da superfície tem a mesma probabilidade de conter qualquer quantidade de pontos.

Ruído gaussiano branco, com média zero e um valor de variância específico foi adicionado nas coordenadas dos pontos e o algoritmo de calibração proposto foi executado, retornando os parâmetros do elipsoide. O teste foi repetido para diferentes valores de variância. Quanto maior a variância do ruído gaussiano maior a diferença entre o elipsoide original e o obtido pelo ajuste, resultando em uma menor compensação dos erros lineares pelo processo de calibração.

A Tabela 1 mostra o erro em porcentagem, a distância entre o centro do elipsoide calculado ao centro do elipsoide original dividida pela distância do elipsoide original até a origem. Portanto um valor de 1% de erro significa que o algoritmo conseguir filtrar 99% dos erros de translação (*offset* e *hard-iron* juntos) das medições do magnetômetro simuladas.

Tabela 1. Erro por variância do ruído gaussiano

Variância do Ruído	Erro no centro
0,01	0,37%
0,1	5,66%
1	22,9%
10	68,6%

Para gerar a Tabela 1, os elipsoides foram gerados com a média dos três raios igual a um. Percebe-se que mesmo com uma variância muito grande de 10 vezes as dimensões do raio do elipsoide o processo de calibração consegue reduzir os erros de translação em 41,4% se comparado as medições sem calibração.

Para uma variância típica de ruído de 0.01, ou seja, 10% da dimensão do raio do elipsoide de desvio-padrão, o algoritmo retira 99,63% deste tipo de erro. A precisão do cálculo das dimensões dos raios e dos ângulos têm resultados semelhantes.

Com distribuição uniforme dos pontos na superfície do elipsoide e ruído gaussiano, executando-se o algoritmo 1 milhão de vezes, em todas elas a forma obtida foi um elipsoide. Outras formas só tendem a ser produzidas quando os dados estão em formas muito específicas, como todos os pontos em uma mesma linha ou formando um hiperboloide.

A Figura 3 mostra o algoritmo sendo aplicado com o elipsoide sendo cortado pelo plano $z=0$ (os pontos foram gerados com $z = 0$).

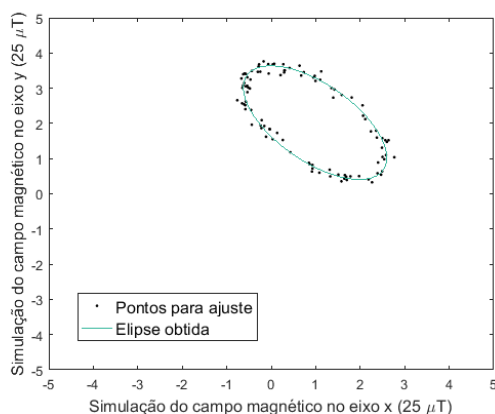


Figura 3. Ajuste de uma elipse aos pontos, utilizando o algoritmo proposto

Além da simulação computacional, o algoritmo descrito, foi testado com dados reais obtidos pelo magnetômetro MAG 3110 de 3 eixos, presente no kit de desenvolvimento FRDM-FXS-MULTI-B (Freescale, Estados Unidos). Esta expansão foi utilizada com a placa FRDM-K64F, e os dados do magnetômetro foram obtidos com o usuário fazendo movimentos aleatórios para calibração.

O teste foi realizado 5 vezes, e em todas elas o algoritmo retornou um elipsoide bem definido. O processo de calibração foi capaz de deixar a nuvem de pontos mais esférica e centrada na origem.

A própria Freescale disponibiliza uma biblioteca de código aberto para fusão de sensores (FSFLK). Ela contém um algoritmo para calibração do magnetômetro e também utiliza o método do elipsoide. Existe uma versão compilada especificamente para a placa FRDM-K64F e o *datasheet* da biblioteca define métodos de teste para o algoritmo assim como algumas medidas de erro e eficiência especificamente para esta placa.

Como o algoritmo da Freescale é um dos mais utilizados em sistemas embarcados, ele é uma boa referência de comparação para avaliar a performance do algoritmo aqui proposto. Além disso sua documentação clara e detalhada oferece um melhor suporte as comparações.

Os dois algoritmos foram executados na placa FRDM-64F que possui um processador ARM Cortex-M4F dentro do mesmo teste descrito anteriormente. Ele tem um conjunto de instruções específicas para processamento digital de sinais e realiza multiplicações e adições em ponto flutuante de 32-bits em um único ciclo de *clock*. Já que as medições do magnetômetro tem apenas 10 bits de precisão, operações com ponto flutuante de 32-bits são mais do que suficientes para que o erro acumulado não interfira nos resultados.

O algoritmo aqui proposto utiliza 113 multiplicações e 55 somas para cada ponto de entrada e mais um custo fixo de um pouco menos do que 2600 instruções para resolver o sistema linear 9×9 pelo método da Eliminação Gauss e calcular os parâmetros finais de calibração. Portanto sua implementação com um conjunto de instruções do processador ARM Cortex-M4F executa $158 \cdot N + 2600$ operações, todas elas gastando um único ciclo de *clock*.

De acordo com o *datasheet* (Freescale, 2015), o algoritmo de calibração da biblioteca FSFLK gasta 2860 ciclos de *clock* por iteração, sendo que para cada ponto de medição ele executa uma iteração nova. Esses dados foram confirmados no teste, utilizando a maneira de medir o número de ciclos de *clock* especificada no *datasheet*.

Portanto para 100 pontos de entrada, o algoritmo gasta 19400 ciclos de *clock* o que é suficiente para apenas 7 iterações do algoritmo da biblioteca FSFLK. Com esse número de iterações este algoritmo apresenta um erro aproximadamente 40 vezes maior do que se executado com todos os 100 pontos.

Além disso, executando o mesmo procedimento de medição de erro especificado no *datasheet* (Freescale, 2015), que consiste em colocar a placa em diversas posições com ângulos conhecidos e realizar as medições, os dois algoritmos apresentaram um erro menor do que 2 graus. O erro sem nenhum algoritmo de calibração chegou a 8 graus. Os testes indicaram um erro menor do que o erro de 5 graus descrito na especificação da biblioteca FSFLK.

Conclusão

Os métodos de ajuste de quádricas com restrições adicionais para que a superfície obtida só possa ser um elipsoide têm sido estudados por diversos pesquisadores da área da matemática e têm grande importância para diferentes áreas.

No entanto, para a calibração de magnetômetros essas restrições adicionais são prejudiciais, pois por serem não lineares trazem complicações para os algoritmos.

Um método simples, que encontra o elipsoide com menor erro quadrático resolvendo um sistema linear das derivadas parciais iguais a zero foi proposto. Foi mostrado que se esse método retorna um elipsoide as restrições não fazem diferença e se o método não retorna um elipsoide então nenhum outro método baseado em distância algébrica consegue encontrar um elipsoide adequado para a calibração.

Para resolver este problema foi desenvolvido um algoritmo de tratamento dos dados, para retirar dados inadequados, e como resultado nos casos práticos é muito raro da resolução do sistema linear sobre o conjunto de pontos não representar um elipsoide. Além disso o algoritmo geral fica muito mais rápido do que vários outros propostos para o mesmo problema de calibração e com erros muito pequenos.

Este trabalho mostra que a distância algébrica é uma métrica adequada para projetar algoritmos muito rápidos e com pequeno erro. Embora existam algoritmos com melhores condições de erro, o erro já é muito pequeno e mais do que suficiente para a maioria das aplicações, enquanto a diminuição no tempo de execução pode se mostrar importante em várias aplicações.

Agradecimentos

Esta pesquisa é financiada pela Comissão de Aperfeiçoamento de Pessoal do Nível Superior (CAPES - 8887.095626/2015-01), pela Fundação de Amparo à Pesquisa e Inovação do Espírito Santo (FAPES - 67566480) e pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) mediante bolsa de Mestrado e Projeto de Pesquisa (308529/2013-8).

Referências Bibliográficas

- Bektas, S. (2015). Least Squares Fitting of Ellipsoid Using Orthogonal Distances. *Boletim de Ciências Geodésicas*, Vol. 21, No. 2, pp. 329-339.
- Camps, F; Harasse, S. e Monin, A., (2009). Numerical calibration for 3-axis accelerometers and magnetometers. *IEEE International Conference on Electro/Information Technology*, pp. 217-221.
- Fang, J; Sun, H; Cao, J; Zhang, X. e Tao, Y. (2011). A Novel Calibration Method of Magnetic Compass Based on Ellipsoide Fitting. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, Vol. 60, No. 6, pp. 2053-2061.
- Fraden, J. (2010). *Handbook of Modern Sensors: Physics Designs and Applications*. 4th ed. New York: Springer, pp. 223-242.
- Fitzgibbon, A; Pilu, M; Fisher, R. B. (1999). Direct Least Square Fitting of Ellipses. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, Vol. 21, No. 5, pp. 476-480.
- Freescale Semiconductor (2015). *Freescale Fusion Library for Kinetis MCUs*. Austin, Texas, United States, pp. 12-28.
- Gallier, J. (2016). *Basics of Algebra, Topology, and Differential Calculus*. Department of Computer and Information Science, University of Pennsylvania, Cap 27, Sec. 4.
- Harker, M; O'Leary, P; Zsombor-Murray, P. (2008). Direct type-specific conic fitting and eigenvalue bias correction. *Image and Vision Computing*, Vol. 26, No. 3, pp. 372-381.
- Hemerly, E. M; Coelho, F. A. A. (2014). Explicit Solution for Magnetometer Calibration. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, Vol. 63, No. 8, pp. 2093-2095.
- Renaudin, V; Afzal, M. H; Lachapelle, G. (2010). Complete Triaxis Magnetometer Calibration in the Magnetic Domain. *Journal of Sensors*, Vol. 2010, pp. 1-10.
- Vasconcelos, J. F; Elkaim, G; Silvestre, C; Oliveira, P; Cardeira, B. (2011). Geometric Approach to Strapdown Magnetometer Calibration in Sensor Frame. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, Vol. 47, No. 2, pp. 1293-1306.
- Ying, X; Yang, L; Kong, J; Hou, Y; Guan, S; Zha, H. (2012). Direct Least Square Fitting of Ellipsoids. *21st International Conference on Pattern Recognition*, pp. 3228-3231.
- Yu, J; Zheng, H; Kulkarni, S. R; Poor, H. V. (2009). Two-Stage Outlier Elimination for Robust Curve and Surface Fitting. *Journal on Advances in Signal Processing*. Vol. 2010, No. 1.